

## Сравнительный анализ моделей Дарси и Бринкмана при исследовании нестационарных режимов сопряженной естественной конвекции в пористой цилиндрической области

Т. А. Трифонова<sup>1,а</sup>, М. А. Шеремет<sup>1,2,б</sup>

<sup>1</sup> Томский государственный университет  
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

<sup>2</sup> Томский политехнический университет,  
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30

E-mail: <sup>а</sup>tanneka@mail.ru, <sup>б</sup>Michael-sher@yandex.ru

Получено 4 мая 2013 г.,  
после доработки 6 октября 2013 г.

Проведен сравнительный анализ двух моделей пористой среды (Дарси и Бринкмана) на примере математического моделирования нестационарных режимов термогравитационной конвекции в пористой вертикальной цилиндрической полости с теплопроводной оболочкой конечной толщины в условиях конвективного охлаждения со стороны окружающей среды. Краевая задача математической физики, сформулированная в безразмерных переменных «функция тока — завихренность — температура», реализована численно неявным методом конечных разностей. Представлены результаты тестовых расчетов и влияния сеточных параметров, отражающие правомерность применения предлагаемого численного подхода. Установлены особенности класса сопряженных задач при использовании рассматриваемых моделей пористой среды.

Ключевые слова: сопряженный теплоперенос, термогравитационная конвекция, приближения Дарси–Буссинеска и Бринкмана–Буссинеска, пористая вертикальная цилиндрическая полость, нестационарный режим, численное моделирование

## Comparative analysis of Darcy and Brinkman models at studying of transient conjugate natural convection in a porous cylindrical cavity

T. A. Trifonova<sup>1</sup>, M. A. Sheremet<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia

<sup>2</sup> Tomsk Polytechnic University, 30 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia

**Abstract.** — Comparative analysis of two models of porous medium (Darcy and Brinkman) on an example of mathematical simulation of transient natural convection in a porous vertical cylindrical cavity with heat-conducting shell of finite thickness in conditions of convective cooling from an environment has been carried out. The boundary-value problem of mathematical physics formulated in dimensionless variables such as stream function, vorticity and temperature has been solved by implicit finite difference method. The presented verification results validate used numerical approach and also confirm that the solution is not dependent on the mesh size. Features of the conjugate heat transfer problems with considered models of porous medium have been determined.

Keywords: conjugate heat transfer, natural convection, Darcy–Boussinesq and Brinkman–Boussinesq approximations, porous vertical cylindrical cavity, transient regime, numerical simulation.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp.623–634 (Russian).

## Введение

При математическом исследовании процессов тепломассопереноса в изотропных пористых средах [Bejan, 2004; Nield, Bejan, 2006; Маскет, 2004; Шейдеггер, 2008] применяют различные модели, основанные на базовых законах переноса массы, импульса и энергии в пористом материале. В большинстве работ [Alhashash, Saleh, Hashim, 2013; Bejan, 2004; Misirlioglu, Baytas, Pop, 2006; Nield, Bejan, 2006; Saleh, Hashim, 2012; Маскет, 2004; Шейдеггер, 2008] в качестве такого закона рассматривают закон Дарси

$$\bar{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \bar{V}, \quad (1)$$

где  $p$  — давление;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $K$  — проницаемость пористой среды;  $\bar{V}$  — вектор скорости жидкости.

В модели Дарси (1) влияние инерционных эффектов на режимы течения и теплоперенос в пористой среде считается пренебрежимо малым. Однако известно, что в случае интенсивного течения или при наличии высокопористого материала наблюдаются отклонения от линейного закона фильтрации вследствие существенного влияния инерционных эффектов, которые, в частности, приводят к отрыву потока от поверхности твердого скелета. Теоретически [Bear, 1972; Bejan, 2004; Nield, Bejan, 2006; Маскет, 2004] было установлено, что применимость модели Дарси (1) ограничивается малыми значениями модифицированного числа Рейнольдса:  $Re' (= u\sqrt{K}/\nu) < 1$ , где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Диапазон  $1 < Re' < 10$  соответствует формированию и развитию переходных режимов, где еще можно использовать приближение Дарси с определенной точностью, при  $Re' > 10$  инерционные эффекты нельзя не учитывать. В случае свободноконвективного переноса энергии модифицированное число Рейнольдса принимает вид  $\sqrt{\frac{Ra \cdot Da}{Pr}}$ . Следовательно, инерционные эффекты в случае

естественной конвекции существенно проявляются при  $\frac{Ra \cdot Da}{Pr} > 100$ . Необходимо отметить, что данное неравенство получено исходя из анализа несопряженных режимов переноса энергии.

В настоящее время в качестве законов фильтрации для анализа процессов переноса при  $\frac{Ra \cdot Da}{Pr} > 100$  используют модель Форхгеймера [Bear, 1972; Bejan, 2004; Forchheimer, 1901; Nield, Bejan, 2006], которая в случае изотропной среды принимает вид

$$\bar{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \bar{V} - \frac{c_F \rho_f}{\sqrt{K}} |\bar{V}| \bar{V}, \quad (2)$$

где  $c_F$  — параметр Форхгеймера;  $\rho_f$  — плотность жидкости;

и модель Бринкмана [Bear, 1972; Bejan, 2004; Brinkman, 1949a; Brinkman, 1949b; Nield, Bejan, 2006], которая для изотропной среды используется в форме

$$\bar{\nabla} p = -\frac{\mu}{K} \bar{V} + \tilde{\mu} \nabla^2 \bar{V}, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mu}$  — коэффициент эффективной вязкости.

В [Neale, Nader, 1974] предложено в качестве коэффициента эффективной вязкости  $\tilde{\mu}$  рассматривать коэффициент динамической вязкости жидкости  $\mu$ , что согласуется с экспериментальными данными.

Целью настоящей работы является сравнительный анализ моделей Дарси и Бринкмана на примере свободноконвективного теплопереноса в пористом вертикальном цилиндре с теплопроводными стенками конечной толщины при наличии внешних граничных условий III рода, а также оценка применимости отмеченного выше ограничения модели Дарси для класса сопряженных задач термогравитационной конвекции. Необходимо отметить, что подробное исследование нестационарных режимов естественной конвекции в предложенном объекте ранее было проведено с применением модели Дарси [Трифонова, Шеремет, 2013]. В предлагаемом исследовании анализ будет проводиться с использованием модели Бринкмана, а полученные результаты будут сопоставляться с данными [Трифонова, Шеремет, 2013].

## Математическая модель

Рассматривается краевая задача термогравитационной конвекции в пористом вертикальном цилиндре с теплопроводными стенками конечной толщины (рис. 1). Предполагается, что граница  $z = 0$  является адиабатической, а на остальных внешних границах моделируется конвективный теплообмен с окружающей средой. Температура внешней среды  $T^e$  меньше начальной температуры анализируемого объекта  $T_0$ . Все условия, при которых проводится численный анализ, аналогичны используемым в [Трифонова, Шеремет, 2013] за исключением того, что жидкость, насыщающая пористую среду, удовлетворяет приближению Бринкмана–Буссинеска. Необходимо отметить, что появление модели Бринкмана требует формулировки дополнительных граничных условий прилипания для вектора скорости на внутренних границах раздела сред для замыкания краевой задачи. Отсутствие таких условий в модели Дарси связано с неучетом влияния импульса. Поэтому в модели Дарси окончательный порядок соотношения баланса сил или уравнения движения оказывается на единицу меньше, чем соответствующий порядок уравнений Навье–Стокса или уравнений модели Бринкмана, что отражается в количестве замыкающих соотношений.

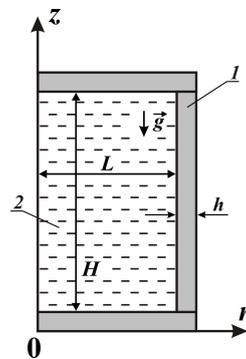


Рис. 1. Область решения задачи: 1 — твердая оболочка, 2 — пористая среда

Процесс переноса массы, импульса и энергии описывается системой нестационарных двумерных уравнений Бринкмана–Буссинеска в пористой среде [Алешкова, Шеремет, 2010] и плоским нестационарным уравнением теплопроводности в твердой ограждающей оболочке в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{V_r}{K} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \nabla^2 V_z - \frac{V_z}{K} \right) + g\beta(T - T_0), \quad (6)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = a_2 \nabla^2 T, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_1 \nabla^2 T, \quad (8)$$

где  $r, z$  — координаты цилиндрической системы координат;  $V_r$  и  $V_z$  — составляющие вектора скорости в проекции на оси  $r, z$  соответственно;  $\rho$  — плотность;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения;  $T$  — температура;  $T_0$  — начальная температура области решения;  $t$  — время;  $\sigma$  — относительная эффективная объемная теплоемкость пористой среды;  $a_1$  — коэффициент теплопроводности материала ограждающей твердой оболочки;  $a_2$  — коэффициент теплопроводности пористой среды.

Вследствие отсутствия уравнения для давления в сформулированной системе (4)–(8) при ее решении возникают трудности с определением поля давления, согласованного с полем скорости. С целью преодоления указанных выше особенностей решения уравнений тепломассопереноса в естественных переменных «скорость — давление» наиболее целесообразным представляется преобразование сформулированной системы уравнений математической физики к виду, исключающему непосредственный поиск поля давления. Для этого вводятся в рассмотрение функция тока  $\psi$ :  $V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ ,  $V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$  и завихренность скорости  $\omega = \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z}$ .

Сформулируем математическую модель в безразмерных переменных «функция тока — завихренность — температура». В качестве масштабов расстояния, скорости, времени, температуры, функции тока и завихренности были выбраны  $L = H$ ,  $\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)L}$ ,  $\sqrt{L/[g\beta(T_0 - T^c)]}$ ,  $(T_0 - T^c)$ ,  $\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)L^5}$ ,  $\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)}/L$ . Безразмерные переменные имели вид

$$R = r/L, \quad Z = z/L, \quad U = V_r/\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)L}, \quad V = V_z/\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)L},$$

$$\tau = t\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)}/L, \quad \Theta = (T - T^c)/(T_0 - T^c), \quad \Psi = \psi/\sqrt{g\beta(T_0 - T^c)L^5}, \quad \Omega = \omega\sqrt{L/[g\beta(T_0 - T^c)]},$$

где  $L$  — размер пористой полости (рис. 1);  $R, Z$  — безразмерные координаты, соответствующие координатам  $r, z$ ;  $U, V$  — безразмерные скорости, соответствующие скоростям  $V_r, V_z$ ;  $\tau$  — безразмерное время;  $\Theta$  — безразмерная температура;  $\Psi$  — безразмерный аналог функции тока;  $\Omega$  — безразмерный аналог завихренности скорости.

Безразмерные уравнения Бринкмана–Буссинеска примут вид [Алешкова, Шеремет, 2010]: в пористой полости (2 на рис. 1)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = -R\Omega, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Omega)}{\partial R} + \frac{\partial(V\Omega)}{\partial Z} = \sqrt{\text{Pr}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Z^2} - \frac{\Omega}{R^2} - \frac{\Omega}{\text{Da}} \right] + \frac{\partial \Theta}{\partial R}, \quad (10)$$

$$\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial R} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right], \quad (11)$$

в твердой оболочке цилиндра (1 на рис. 1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a_{1,2}}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right]. \quad (12)$$

Здесь  $\text{Ra} = g\beta(T_0 - T^c)L^3/\nu a_2$  — число Рэлея;  $\text{Pr} = \nu/a_2$  — число Прандтля;  $\text{Da} = K/L^2$  — число Дарси,  $a_{1,2} = a_1/a_2$  — относительный коэффициент теплопроводности.

Сформулированная система уравнений (9)–(12) не содержит поле давления, что при численном решении позволяет существенно сократить время вычислений. При необходимости решения динамической задачи можно воспользоваться уравнением Пуассона для давления [Роуч, 1980].

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (9)–(12) имеют вид:

- начальные условия:  $\Psi(R, Z, 0) = 0$ ,  $\Omega(R, Z, 0) = 0$ ,  $\Theta(R, Z, 0) = 1$ ;
- на границе  $Z = 0$  моделировалось условие теплоизоляции  $\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = 0$ ;
- на границах  $R = 1+h/L$  и  $Z = 1+2h/L$  были реализованы условия конвективного теплообмена с окружающей средой  $\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{n}} = \text{Bi}\Theta$ ;
- на оси симметрии  $R = 0$ :  $\Psi = \Omega = \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0$ ;
- на внутренней границе  $R = 1$ :  $\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$ ,  $\Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}$ ,  $\Theta_1 = \Theta_2$ ,  $\lambda_{1,2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial R}$ ;
- на внутренних границах  $Z = h/L$  и  $Z = 1+h/L$ :

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = 0, \quad \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \lambda_{1,2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial Z} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial Z}.$$

Здесь  $\text{Bi} = \alpha L / \lambda_1$  — число Био;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена между внешней средой и рассматриваемой областью решения;  $\lambda_{1,2} = \lambda_1 / \lambda_2$  — относительный коэффициент теплопроводности;  $\lambda_1$  — коэффициент теплопроводности материала твердой оболочки;  $\lambda_2$  — эффективный коэффициент теплопроводности пористой среды.

Сформулированная краевая задача (9)–(12) с соответствующими начальными и граничными условиями решена методом конечных разностей [Aleshkova, Sheremet, 2010; Sheremet, 2010; Алешкова, Шеремет, 2010; Роуч, 1980; Трифонова, Шеремет, 2013] на равномерной сетке. Алгоритм решения подробно описан в [Aleshkova, Sheremet, 2010; Sheremet, 2010; Алешкова, Шеремет, 2010; Трифонова, Шеремет, 2013].

Разработанный метод решения был протестирован на серии сопряженных и несопряженных задач термогравитационной конвекции в пористых полостях [Aleshkova, Sheremet, 2010; Sheremet, 2010; Алешкова, Шеремет, 2010; Трифонова, Шеремет, 2013]. Для верификации модели Бринкмана–Буссинеска была рассмотрена задача естественной конвекции в замкнутой квадратной пористой полости с изотермическими стенками [Basak et al., 2006].

На рисунках 2–4 показано сравнение изолиний функции тока и температуры при  $\text{Ra} = 10^6$  и различных значениях числа Дарси с численными результатами [Basak et al., 2006].

Представленные распределения наглядно показывают, что применяемая математическая модель и используемый численный алгоритм решения приводят к достаточно хорошему согласованию с результатами других авторов.

Разработанный метод решения сопряженной задачи термогравитационной конвекции также был протестирован на множестве сеток. На рисунке 5 представлены профили температуры и скорости в сечении  $R = 0.5$  при  $\tau = 200$ ,  $\text{Ra} = 10^6$ ,  $\text{Pr} = 0.7$ ,  $\text{Bi} = 1.0$ ,  $\text{Da} = 10^{-3}$ ,  $\lambda_{1,2} = 10.0$ ,  $h/L = 0.1$ , отражающие влияние размерности разностной сетки при использовании модели Бринкмана–Буссинеска.

На рисунке указаны размерности сетки в пористой полости, по толщине твердой стенки выбиралось по 10 % узлов от соответствующего направления внутренней сетки. Исходя из соображений оптимизации точности вычислений и времени расчета, для дальнейшего анализа была выбрана разностная сетка размерности  $100 \times 100$ .

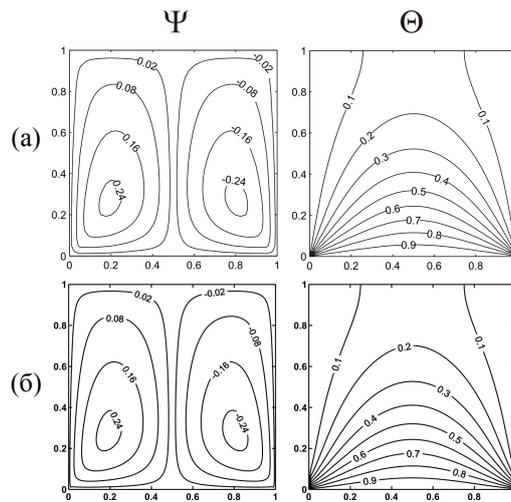


Рис. 2. Изолинии функции тока  $\Psi$  и температуры  $\Theta$  при  $Pr = 0.7$ ,  $Ra = 10^6$ ,  $Da = 10^{-5}$ : данные [Basak et al., 2006] (a), полученные результаты (б)

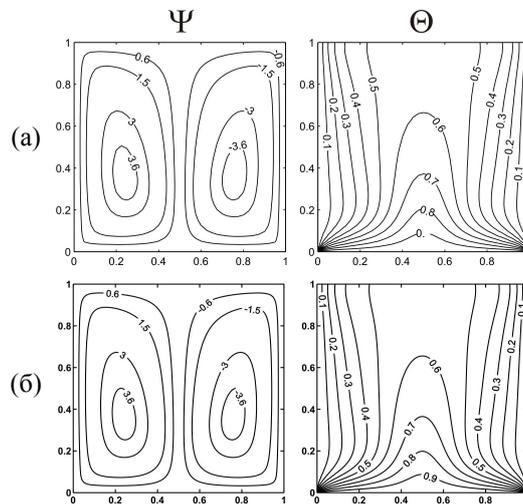


Рис. 3. Изолинии функции тока  $\Psi$  и температуры  $\Theta$  при  $Pr = 0.7$ ,  $Ra = 10^6$ ,  $Da = 10^{-4}$ : данные [Basak et al., 2006] (a), полученные результаты (б)

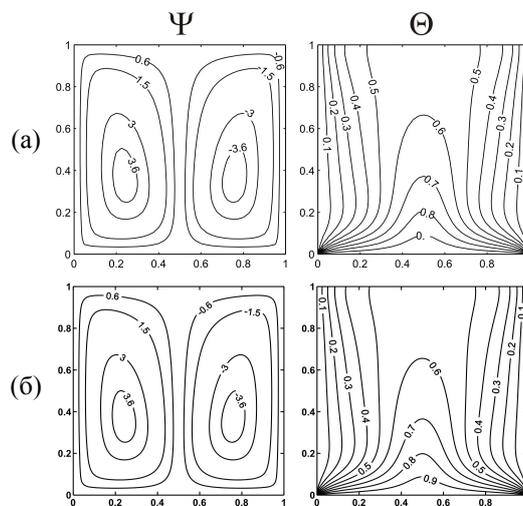


Рис. 4. Изолинии функции тока  $\Psi$  и температуры  $\Theta$  при  $Pr = 0.7$ ,  $Ra = 10^6$ ,  $Da = 10^{-3}$ : данные [Basak et al., 2006] (a), полученные результаты (б)

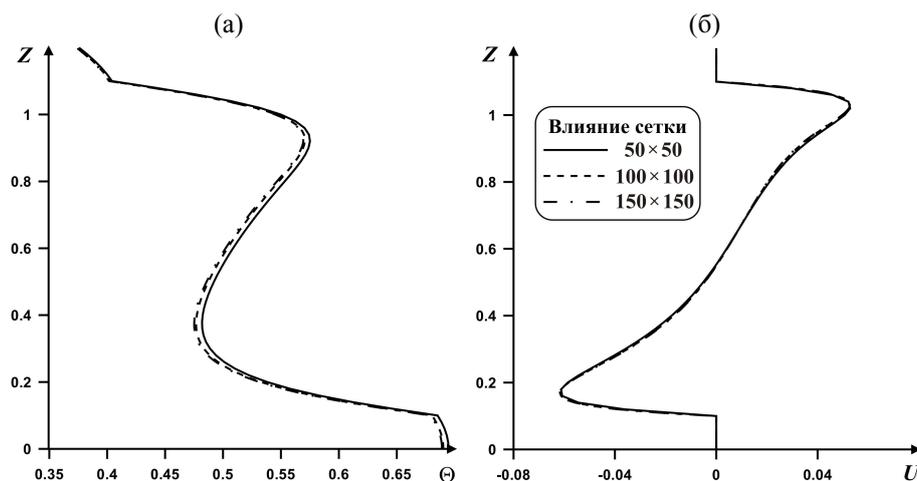


Рис. 5. Профили температуры  $\Theta$  (а) и горизонтальной компоненты скорости  $U$  (б) в сечении  $R = 0.5$  в зависимости от размерности внутренней сетки

## Результаты численного моделирования

Численные исследования проведены при следующих значениях определяющих параметров:  $Ra = 10^6$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $Bi = 1.0$ ,  $10^{-5} \leq Da \leq 10^{-3}$ ,  $0.1 \leq h/L \leq 0.3$ ,  $a_{1,2} = 0.6$ ,  $\sigma = 1$ ,  $1 \leq \lambda_{1,2} \leq 20$ ,  $0 \leq \tau \leq 1000$ . При этом  $14.3 \leq \frac{Ra \cdot Da}{Pr} \leq 1428.6$ .

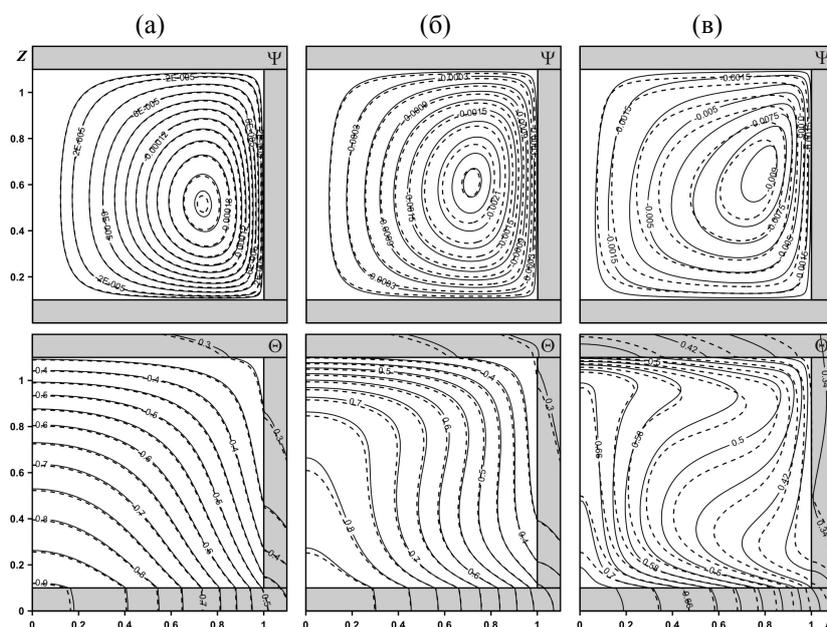


Рис. 6. Изолинии функции тока  $\Psi$  и температуры  $\Theta$  при  $h/L = 0.1$ ,  $\tau = 200$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$ :  $Da = 10^{-5}$  (а),  $Da = 10^{-4}$  (б),  $Da = 10^{-3}$  (в) (— модель Дарси–Буссинеска, - - - - модель Бринкмана–Буссинеска)

На рисунке 6 представлены распределения изолиний функции тока и температуры для  $h/L = 0.1$ ,  $\tau = 200$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$  при различных значениях числа Дарси. Сплошные линии соответствуют модели Дарси–Буссинеска, а штриховые — модели Бринкмана–Буссинеска. При  $Da = 10^{-5}$  и  $Da = 10^{-4}$  распределения локальных параметров для этих моделей незначительно отличаются друг от друга, что объясняется малыми скоростями движения среды и выполнением закона

линейной фильтрации. В случае  $Da = 10^{-3}$  (рис. 6в), что соответствует  $\frac{Ra \cdot Da}{Pr} = 1428.6$ , наблюдаются значительные отклонения в распределениях как линий тока, так и изотерм. Необходимо отметить, что модель Дарси дает завышенные значения скоростей движения среды, судя по величинам функции тока, а также прогнозирует более интенсивное охлаждение цилиндрической полости в отличие от приближения Бринкмана–Буссинеска. Сопряженная постановка задачи проявляется в распределении температуры внутри твердых стенок — боковая оболочка и верхнее основание полости остывают быстрее при использовании модели Бринкмана–Буссинеска (рис. 6в и 7а). Такой эффект, по всей видимости, связан с увеличением поверхности контакта между жидкостью и твердыми стенками оболочки цилиндра в совокупности с инерционными эффектами и дополнительной вязкостью (3).

Более детальное сравнение профилей температуры и горизонтальной компоненты скорости в сечении  $R = 0.5$  показано на рисунке 7. Представленные распределения подтверждают отмеченные выше эффекты. Как известно [Bejan, 2004; Nield, Bejan, 2006], максимум скорости при использовании модели Дарси достигается вблизи поверхности твердых стенок, что обусловлено отсутствием в модели условий прилипания (рис. 7б). При малых значениях числа Дарси аналогичные распределения устанавливаются и в случае модели Бринкмана (рис. 7б). В свою очередь рост проницаемости пористой среды отражается на формировании плавных профилей горизонтальной компоненты скорости около границ верхнего и нижнего оснований в приближении Бринкмана–Буссинеска вследствие наличия диффузионного слагаемого в этой модели. Физически увеличение поверхности контакта между фазами при высоких числах Рэлея приводит к формированию пограничных слоев вблизи обтекаемых поверхностей в пористых средах, что отражается на качественном совпадении формы скоростных профилей со случаем течения вязкой жидкости в чистой полости [Грифонова, Шеремет, 2013].

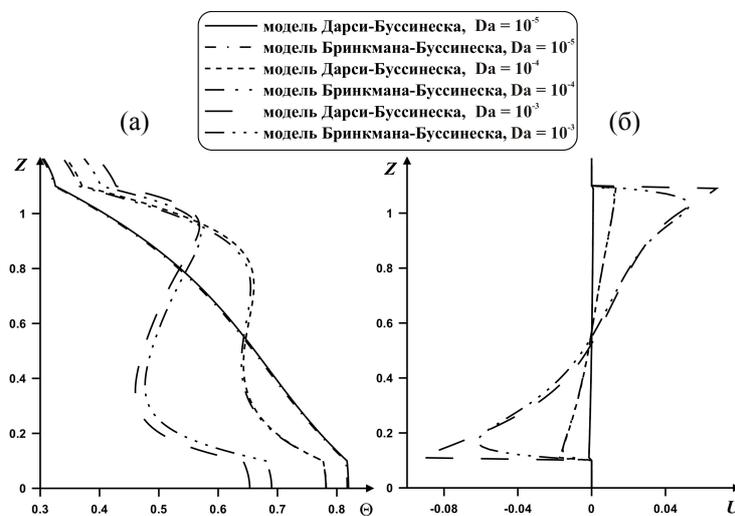


Рис. 7. Профили температуры  $\Theta$  (а) и горизонтальной компоненты скорости  $U$  (б) в сечении  $R = 0.5$  при  $h/L = 0.1$ ,  $\tau = 200$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$  и различных значениях  $Da$

На рисунке 8 продемонстрированы зависимости среднего числа Нуссельта на границе раздела нижнего основания и пористой полости, средней температуры внутри полости и максимального абсолютного значения функции тока от времени, проницаемости пористой полости и применяемой модели фильтрации. Как отмечалось выше, при  $Da = 10^{-3}$  наблюдаются значительные расхождения максимальных значений  $Nu_{avg}$  и  $|\Psi|_{max}$  между моделями фильтрации:

$$\max_{\tau} (Nu_{avg}^{\text{модель Дарси}}) = 2.038 \Big|_{\tau=142} > \max_{\tau} (Nu_{avg}^{\text{модель Бринкмана}}) = 1.625 \Big|_{\tau=142},$$

$$\max_{\tau} \left( |\Psi|_{\max}^{\text{модель Дарси}} \right) = 0.0106 \Big|_{\tau=88} > \max_{\tau} \left( |\Psi|_{\max}^{\text{модель Бринкмана}} \right) = 0.0089 \Big|_{\tau=103}$$

При этом значения средней температуры внутри полости незначительно отличаются при использовании различных моделей пористой среды. Качественно изменения интегральных параметров в случае применения модели Бринкмана–Буссинеска аналогичны результатам модели Дарси–Буссинеска, которые подробно были проанализированы в [Трифонова, Шеремет, 2013].

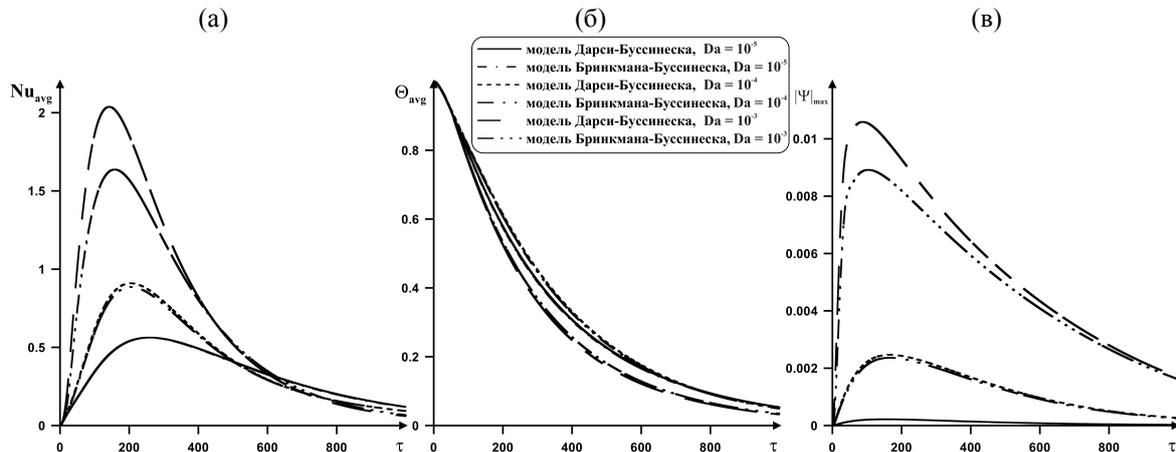


Рис. 8. Зависимости среднего числа Нуссельта на границе  $Z = h/L$  (а), средней температуры в пористой полости (б) и максимального абсолютного значения функции тока (в) от времени, проницаемости и модели пористой среды при  $h/L = 0.1$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$

Влияние относительного коэффициента теплопроводности при  $Da = 10^{-3}$ ,  $h/L = 0.1$ ,  $\tau = 200$  на локальные и интегральные параметры задачи представлено на рисунках 9, 10.

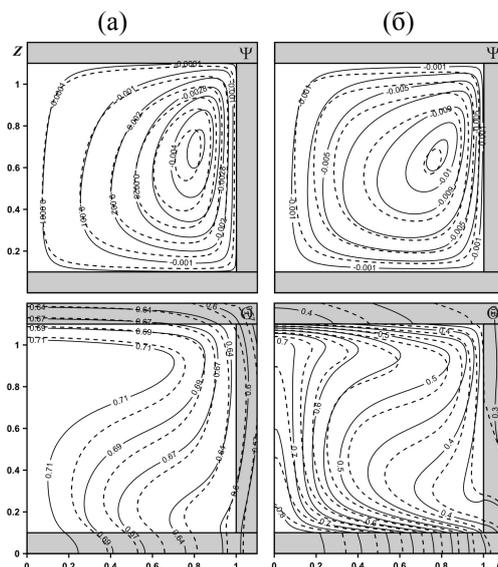


Рис. 9. Изолинии функции тока  $\Psi$  и температуры  $\Theta$  при  $Da = 10^{-3}$ ,  $h/L = 0.1$ ,  $\tau = 200$ :  $\lambda_{1,2} = 1$  (а),  $\lambda_{1,2} = 20$  (б) (— модель Дарси–Буссинеска, - - - модель Бринкмана–Буссинеска)

При малых значениях относительного коэффициента теплопроводности  $\lambda_{1,2} \approx 1$  отклонения результатов моделей Дарси–Буссинеска и Бринкмана–Буссинеска незначительные как по распределениям локальных параметров (рис. 9а), так и по значениям интегральных комплексов (рис. 10). При увеличении  $\lambda_{1,2} > 10$  (рис. 9б) влияние инерционных эффектов усиливается, что, например, отражается в существенном снижении  $Nu_{\text{avg}}$  и  $|\Psi|_{\max}$  (рис. 10).

Необходимо отметить, что при  $Da < 10^{-3}$  изменение  $\lambda_{1,2}$  не приводит к существенной модификации структуры изолиний функции тока и температуры.

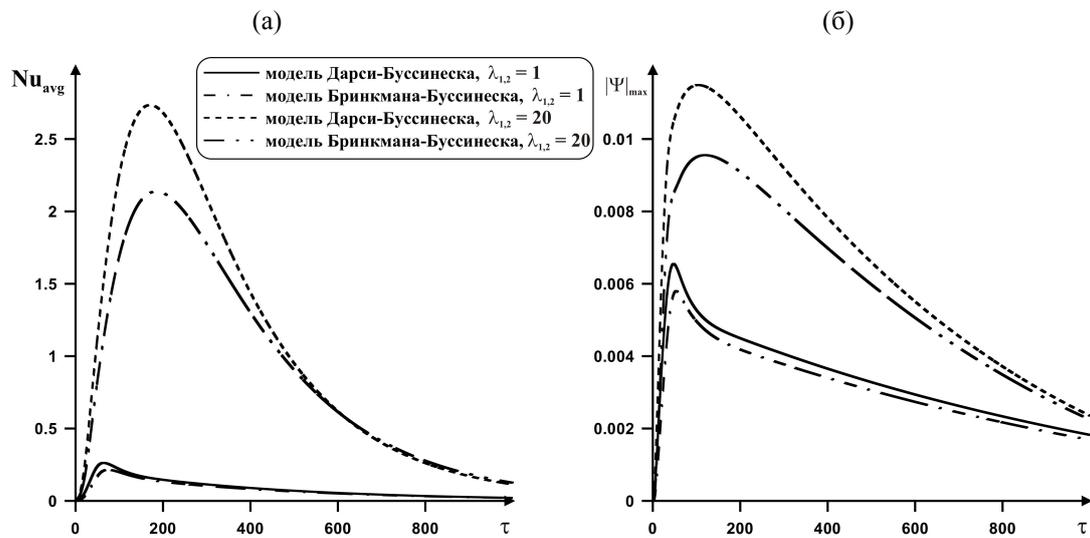


Рис. 10. Зависимости среднего числа Нуссельта на границе  $Z = h/L$  (а) и максимального абсолютного значения функции тока (б) от  $\tau$ ,  $\lambda_{1,2}$  и модели пористой среды при  $Da = 10^{-3}$ ,  $h/L = 0.1$

Влияние толщины ограждающей твердой оболочки на изменение среднего числа Нуссельта на границе  $Z = h/L$  и максимального абсолютного значения функции тока представлено на рис. 11. Необходимо отметить, что увеличение толщины ограждающих стенок проявляется в повышении относительного расхождения между используемыми моделями пористой среды.

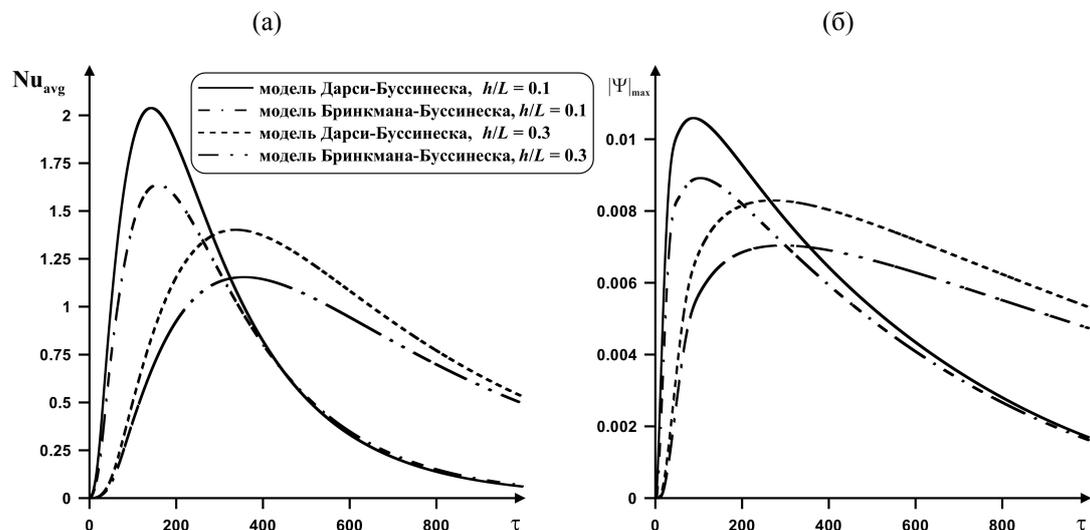


Рис. 11. Зависимости среднего числа Нуссельта на границе  $Z = h/L$  (а) и максимального абсолютного значения функции тока (б) от времени, относительной толщины твердой оболочки и модели пористой среды при  $Da = 10^{-3}$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$

## Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что при  $Da > 10^{-4}$  и соответствующих величинах  $h/L$  и  $\lambda_{1,2}$  приближение Дарси–Буссинеска прогнозирует завышенные значения скорости движения жидкости, а также более интенсивное охлаждение анализируемого объекта. Относительное отклонение интегральных параметров между рассматриваемыми законами

фильтрации достигает 20 % при  $h/L = 0.1$ ,  $\lambda_{1,2} = 10$ . Показано, что при малых значениях относительного коэффициента теплопроводности возможно применение приближения Дарси–Буссинеска. Увеличение относительной толщины ограждающей оболочки цилиндра и  $\lambda_{1,2}$  проявляется в более существенных количественных расхождениях между результатами, полученными на основе моделей Дарси–Буссинеска и Бринкмана–Буссинеска. Следует отметить, что оценочное соотношение, ограничивающее применение закона Дарси диапазоном  $\frac{Ra \cdot Da}{Pr} < 100$ , выведенное для случая несопряженных режимов переноса энергии, нельзя автоматически переносить на класс сопряженных задач вследствие существенного влияния теплофизических характеристик материала твердых стенок и их толщины. В частности, даже при  $\frac{Ra \cdot Da}{Pr} = 1428.6$  и  $\lambda_{1,2} = 1$  возможно использование закона Дарси.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК-5652.2012.8).

## Список литературы

- Алешкова И. А., Шеремет М. А.* Математическое моделирование сопряженной термогравитационной конвекции в пористой среде // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Вып. 2. — С. 49–56.
- Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. — М.: Институт компьютерных исследований, 2004. — 628 с.
- Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
- Трифоновна Т. А., Шеремет М. А.* Численные исследования нестационарных режимов сопряженной естественной конвекции в пористой цилиндрической области (модель Дарси–Буссинеска) // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 179–191.
- Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды. — М.: Институт компьютерных исследований, 2008. — 254 с.
- Aleshkova I. A., Sheremet M. A.* Unsteady conjugate natural convection in a square enclosure filled with a porous medium // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2010. — Vol. 53. — P. 5308–5320.
- Alhashash A., Saleh H., Hashim I.* Effect of conduction in bottom wall on Benard convection in a porous enclosure with localized heating and lateral cooling // Transport in Porous Media. — 2013. — Vol. 96. — P. 305–318.
- Basak T., Roy S., Paul T., Pop I.* Natural convection in a square cavity filled with a porous medium: Effects of various thermal boundary conditions // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2006. — Vol. 49. — P. 1430–1441.
- Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. — Amsterdam: Elsevier, 1972. — 764 p.
- Bejan A.* Convection heat transfer. — New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. — 694 p.
- Brinkman H. C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Applied Scientific Research. — 1949a. — Vol. 1. — P. 27–34.
- Brinkman H. C.* On the permeability of media consisting of closely packed porous particles // Applied Scientific Research. — 1949b. — Vol. 1. — P. 81–86.
- Forchheimer P.* Wasserbewegung durch Boden // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. — 1901. — Vol. 45. — P. 1736–1741.
- Misirlioglu A., Baytas A. C., Pop I.* Natural convection inside an inclined wavy enclosure filled with a porous medium // Transport in Porous Media. — 2006. — Vol. 64. — P. 229–246.
- Neale G., Nader W.* Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium // Canadian Journal of Chemical Engineering. — 1974. — Vol. 52. — P. 475–478.

- Nield D. A., Bejan A.* Convection in porous media. — New York: Springer, 2006. — 640 p.
- Saleh H., Hashim I.* Conjugate natural convection in a porous enclosure with non-uniform heat generation // *Transport in Porous Media*. — 2012. — Vol. 94. — P. 759–774.
- Sheremet M. A.* The influence of cross effects on the characteristics of heat and mass transfer in the conditions of conjugate natural convection // *Journal of Engineering Thermophysics*. — 2010. — Vol. 19. — P. 119–127.