**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 4 С. 607–622**

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 519.676

Структура моделей перколяции узлов на трехмерных квадратных решетках

П. В. Москалев

Воронежский государственный аграрный университет,
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, д. 1

E-mail: moskalefff@gmail.com

*Получено 23 мая 2013 г.,
после доработки 4 июля 2013 г.*

В работе рассматривается структура моделей перколяции узлов на трехмерных квадратных решетках при различных формах $(1, \pi)$-окрестности. Для этих моделей предложены изо- и анизотропные модификации алгоритма инвазивной перколяции с $(1, 0)$- и $(1, \pi)$-окрестностями. Все рассмотренные алгоритмы являются частными случаями анизотропного алгоритма инвазивной перколяции на n-мерной решетке с $(1, \pi)$-окрестностью. Данный алгоритм положен в основу библиотеки SPSL, выпущенной под лицензией GNU GPL-3 с использованием свободного языка программирования R.

Ключевые слова: перколяция узлов, n-мерная квадратная решетка, неметрическое расстояние Минковского, язык программирования R, библиотека SPSL

The structure of site percolation models on three-dimensional square lattices

P. V. Moskalev

Voronezh State Agricultural University, 1 Michurin street, Voronezh, 394087, Russia

Abstract. — In this paper we consider the structure of site percolation models on three-dimensional square lattices with various shapes of $(1, \pi)$-neighborhood. For these models, are proposed iso- and anisotropic modifications of the invasion percolation algorithm with $(1, 0)$- and $(1, \pi)$-neighborhoods. All the above algorithms are special cases of the anisotropic invasion percolation algorithm on the n-dimensional lattice with a $(1, \pi)$-neighborhood. This algorithm is the basis for the package SPSL, released under GNU GPL-3 using the free programming language R.

Keywords: site percolation, n-dimensional square lattice, non-metric Minkowski distance, R programming language, SPSL package

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 607–622 (Russian).

Введение

Впервые задачи теории перколяции появились в работах П. Флори и У. Штокмайера [Flory, 1941; Stockmayer, 1943], посвященных моделированию полимеризации высокомолекулярных соединений. Однако формирование современного математического аппарата и собственной терминологии в исследованиях процессов перколяции принято связывать с публикацией в 1957 году работы С. Бродбента и Дж. Хаммерсли [Broadbent and Hammersley, 1957], в которой они рассматривают задачу о протекании некоторой жидкости через случайно-неоднородную проницаемую среду.

Интересной разновидностью перколяционных моделей является сформулированная Д. Уилкинсоном и Дж. Уиллемсеном задача об инвазивной перколяции [Wilkinson and Willemsen, 1983; Koplik et al., 1983]. Чаще всего процесс инвазии, или вытеснения, рассматривается как результат взаимодействия двух несмешивающихся жидкостей: первой, уже заполняющей пористую среду, и второй, подаваемой в эту среду под некоторым давлением. Основное влияние на этот процесс оказывает соотношение градиентов давления в потоках инжектируемой и вытесняемой жидкости, обусловленное действием сил инерции, вязкого трения и межфазного взаимодействия обеих жидкостей со стенками капиллярных каналов. Существенной особенностью процесса вытеснения является наличие во многих пористых средах тупиковых пор с пониженной связностью, что приводит к захвату во внутрипоровом пространстве некоторого объема вытесняемой жидкости.

Более простая, но не менее важная разновидность моделей инвазивной перколяции возникает при изучении метода ртутной порометрии. В экспериментальных исследованиях пористых структур метод инвазивной ртутной порометрии относится к числу наиболее распространенных и хорошо изученных методов, который позволяет оценивать поры с эквивалентным гидравлическим диаметром d от 3.5 нм до 500 мкм. В его основе лежит высказанная в 1921 году Е. Уошбурном [Washburn, 1921] идея создания контролируемого перепада давления Δp в окружающей пористое тело жидкой ртути для вдавливания некоторого ее объема Δv в капилляры последнего. Квазистатическое увеличение перепада давлений Δp позволяет ртути постепенно проникать во все более мелкие капилляры пористого тела, эквивалентный диаметр d которых будет соответствовать величине вынуждающей силы Δp, а приращение удельного объема инжектируемой жидкости Δv — суммарному объему пор данного диаметра на единицу массы исследуемого образца. Для снижения влияния на результирующие данные низкой связности тупиковых пор и захвата в поровом пространстве вытесняемых газов и/или жидкостей пористый образец перед испытаниями подвергается вакуумированию, а вдавливаемая жидкость — фильтрованию для очистки от посторонних частиц и двойной перегонке для исключения газовыделения в процессе испытаний. В результате, для адекватного описания процесса ртутной порометрии с помощью моделей инвазивной решеточной перколяции требуется лишь выделение подмножества достижимых узлов решетки, связанного с заданным стартовым подмножеством. Отсутствие необходимости в моделировании захвата вытесняемой жидкостью тупиковых и слабосвязных фрагментов порового пространства не только существенно упрощает решаемую задачу, но и позволяет использовать инвазивную решеточную перколяцию без захвата для моделирования внутренней структуры пористой среды.

Общие определения

Одной из базовых задач, возникающих при моделировании перколяции, является задача выделения подмножества или кластера узлов, непрерывным образом связанных с заданным стартовым подмножеством. Простейшая модель инвазивной решеточной перколяции строится с помощью взвешенного однородного графа или решетки, достижимость произвольного узла которой задается некоторой псевдослучайной величиной U_i. В том случае, если величины U_i и U_j в соседних узлах решетки при $i = j \pm \varepsilon_k$ взаимно независимы, то говорят о некоррелированной перколяции или перколяции Бернулли. Величина ε_k является компонентой сдвигового вектора $\boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, определяемого формой и радиусом окрестности внутренних узлов решетки.

Из курсов топологии и теории множеств известно [Александров, 1977], что ключевое влияние на связность оказывает функция метрики, определяющая расстояния и формирующая ε-окрестность некоторой точки b. Одним из достаточно общих способов определения окрестности произвольной точки $U_{\varepsilon,\pi}(b)$ является использование функции неметрического расстояния Минковского $\rho_\pi(a, b)$:

$$U_{\varepsilon,\pi}(b) = \{a : \rho_\pi(a, b) \leqslant \varepsilon\}, \quad \rho_\pi(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^\pi\right)^{1/\pi}, \tag{1}$$

где $\pi \geqslant 0$ — показатель неметрического расстояния Минковского (далее по тексту для краткости именуемый просто показателем Минковского); $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — координаты точек a и b.

Применение термина «неметрическое расстояние» обусловлено тем, что строгое определение метрики накладывает на функцию (1) следующие ограничения: а) $\rho_\pi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$; б) $\rho_\pi(a, b) = \rho_\pi(b, a)$; в) $\rho_\pi(a, b) \leqslant \rho_\pi(a, c) + \rho_\pi(c, b)$. Для неметрического расстояния Минковского все три ограничения выполняются лишь при $\pi \geqslant 1$, а на интервале $0 \leqslant \pi < 1$ знак в третьем неравенстве (неравенстве треугольника) меняется на противоположный $\rho_\pi(a, b) > \rho_\pi(a, c) + \rho_\pi(c, b)$. В наших задачах функция неметрического расстояния $\rho_\pi(a, b)$ определяет лишь меру удаленности точек a и b вдоль проходящей через них прямой и используется в (1) для определения окрестности b с соответствующим показателем Минковского π.

В общем случае относительные доли достижимых узлов p_k является компонентами вектора $\boldsymbol{p}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, длина которого соответствует форме и радиусу используемой окрестности внутренних узлов решетки. При равных компонентах вектора $\boldsymbol{p}$ реализации кластеров будут обладать статистически изотропной структурой, а при неравных — структура реализаций станет статистически анизотропной [Москалев, Шитов, 2007].

Изотропные кластеры с $(1, 0)$-окрестностью

Рассмотрим задачу построения статистически изотропного кластера узлов на трехмерной квадратной решетке с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана. Среди множества алгоритмов, применяющихся для решения задач перколяции, достаточно высокой эффективностью отличается однопроходный алгоритм, базовые реализации которого в были представлены в работах П. Лиса [Leath, 1976] и З. Александровиц [Alexandrowicz, 1980]. Применительно к задаче инвазивной некоррелированной перколяции без захвата основные этапы построения статистически изотропного кластера узлов на трехмерной решетке с $(1, 0)$-окрестностью можно сформулировать следующим образом [Москалев, 2009]:

а) все узлы перколяционной решетки взвешиваются последовательностью псевдослучайных чисел с равномерным распределением $u_{xyz} \sim \mathbf{U}(0, 1)$; недостижимыми считаются те узлы перколяционной решетки, весовой коэффициент u_{xyz} которых больше или равен заданной доли достижимых узлов p, а достижимыми — узлы, весовой коэффициент которых меньше доли достижимых узлов

$$u_{xyz} < p; \tag{2}$$

б) среди узлов решетки формируется некоторое стартовое подмножество и либо все, либо только достижимые узлы стартового подмножества помечаются числовой меткой $l > 1$, к примеру $l = 2$;

в) узлы стартового подмножества объединяются с достижимыми узлами из своего $(1, 0)$-периметра, формируемого как объединение $(1, 0)$-окрестностей, и помечаются числовой меткой l;

г) достижимые узлы $(1, 0)$-периметра образуют новое стартовое подмножество на следующей итерации;

д) пункты (в-г) повторяются до исчерпания достижимых узлов в текущем $(1, 0)$-периметре кластера, либо до присоединения к кластеру узлов из заданного целевого подмножества.

Описанный алгоритм используется в этом разделе для построения статистически изотропных реализаций кластеров узлов и распределений относительных частот по их выборочной совокупности на трехмерной квадратной решетке с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана. В листинге 1 показана реализация на языке C общей функции “`ssTNd()`”, обеспечивающей маркировку кластера узлов, связанного с заданным стартовым подмножеством на n-мерной квадратной решетке с анизотропной $(1, \pi)$-окрестностью Мура.

Листинг 1. Реализация функции “`ssTNd()`” на языке C

```
#include <R.h>
#include <Rinternals.h>
///////////////////////////////////////////////////////////////////
// Функция ssTNd() обеспечивает маркировку кластера узлов,
// связанного со стартовым подмножеством на n-мерной
// квадратной решетке с анизотропной (1,п)-окрестностью.
///////////////////////////////////////////////////////////////////
// Аргументы:
//   bA - число узлов стартового подмножества;
//   clA - линейные индексы узлов кластера;
//   acA - матрица достижимости узлов решетки;
//   eA, pA - линейные индексы и относительные доли
//            достижимых узлов для (1,п)-окрестности.
// Переменные:
//   cls, acc, e, b, p - указатели на clA, acA, eA, bA, pA
//   a, *b - индексы узлов из текущего (1,п)-периметра
//           кластера по вектору cls[]: от, до;
//   c - индекс текущего узла периметра по вектору cls[];
//   h - индекс текущего узла окрестности по вектору e[];
//   n - число узлов, образующих (1,п)-окрестность.
///////////////////////////////////////////////////////////////////
SEXP ssTNd(SEXP pA, SEXP acA, SEXP bA, SEXP eA, SEXP clA) {
  acA = coerceVector(acA, REALSXP);
  clA = coerceVector(clA, INTSXP);
  pA = coerceVector(pA, REALSXP);
  bA = coerceVector(bA, INTSXP);
  eA = coerceVector(eA, INTSXP);
  double *p, *acc;
  int *b, *e, *cls,
      n=length(eA), a=0, db, c, h, ch;
  cls = INTEGER(clA); e = INTEGER(eA); b = INTEGER(bA);
  acc = REAL(acA); p = REAL(pA); db = *b;
  while (db>0) {              // Пока периметр непуст:
    db = 0;                   // Обнуляем текущий периметр.
```

```
    for (c=a; c<*b; c++) {     // Для всех узлов периметра:
      for (h=0; h<n; h++) {    // Для всех узлов окрестности:
        ch = cls[c] + e[h];
        if (acc[ch] < p[h]) { // Если узел достижим
          acc[ch] = 2; db++;  // то помечаем узел и
          cls[*b+db-1] = ch;  // сохраняем его индекс.
        }
      }
    }
    a = *b; *b += db;         // Индексы текущего периметра.
  }
  return(R_NilValue);
}
```

В листинге 2 показана реализация на языке R функций “`ssi30()`” и “`fssi30()`”, которые обеспечивают инициализацию переменных, необходимых для корректного вызова функции “`ssTNd()`”. Функция “`ssi30()`” обеспечивает маркировку статистически изотропного кластера узлов, связанного с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1,0)$-окрестностью фон Неймана при заданной доле достижимых узлов “`p`”. Функция “`fssi30()`” обеспечивает расчет матрицы относительных частот узлов для выборки статистически изотропных реализаций заданного объема “`n`”, связанных с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1,0)$-окрестностью фон Неймана при заданной доле достижимых узлов “`p`”.

Листинг 2. Реализации функций “`ssi30()`” и “`fssi30()`” на языке R

```
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Функции:
# ssi30()  - обеспечивает маркировку изотропных кластеров узлов на
#            трехмерной квадратной решетке с (1,0)-окрестностью;
# fssi30() - обеспечивает построение матрицы относительных частот
#            для выборки изотропных кластеров узлов на трехмерной
#            квадратной решетке с (1,0)-окрестностью.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Аргументы:
# n - объем выборки кластеров;
# x - линейный размер перколяционной решетки;
# p - относительная доля достижимых узлов решетки;
# set - линейные индексы стартового подмножества;
# all - триггер: "Маркировать все узлы или только достижимые?"
# Переменные:
# e - линейные индексы узлов из (1,0)-окрестности;
# b - длина стартового подмножества узлов.
# Значения:
# acc - матрица достижимости узлов перколяционной решетки;
# rfq - матрица относительных частот узлов перколяционной решетки.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
ssi30 <- function(x=33, p=0.311608,
                  set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  e <- as.integer(c(-1, 1,-x, x,-x^2, x^2))
  p <- as.double(rep(p, length(e)))
  acc <- array(runif(x^3), rep(x, times=3))
  if (!all) set <- set[acc[set] < mean(p)]
  b <- as.integer(length(set))
  cls <- rep(0L, max(p)*x^3 + b*all)
  acc[set] <- 2
  acc[c(1,x),,] <- acc[,c(1,x),] <- acc[,,c(1,x)] <- 1
  cls[seq_along(set)] <- as.integer(set - 1)
```

```
  .Call("ssTNd", p, acc, b, e, cls)
  return(acc)
}
fssi30 <- function(n=1000, x=33, p=0.311608,
                   set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  rfq <- array(0, dim=rep(x, times=3))
  for (i in seq(n))
    rfq <- rfq + (ssi30(x, p, set, all) > 1)
  return(rfq/n)
}
```

Приведенные выше реализации были опубликованы автором в составе библиотеки SPSL [Moskalev, 2012] под лицензией GNU GPL-3 и с июня 2012 года доступны для свободной загрузки через систему репозиториев CRAN.

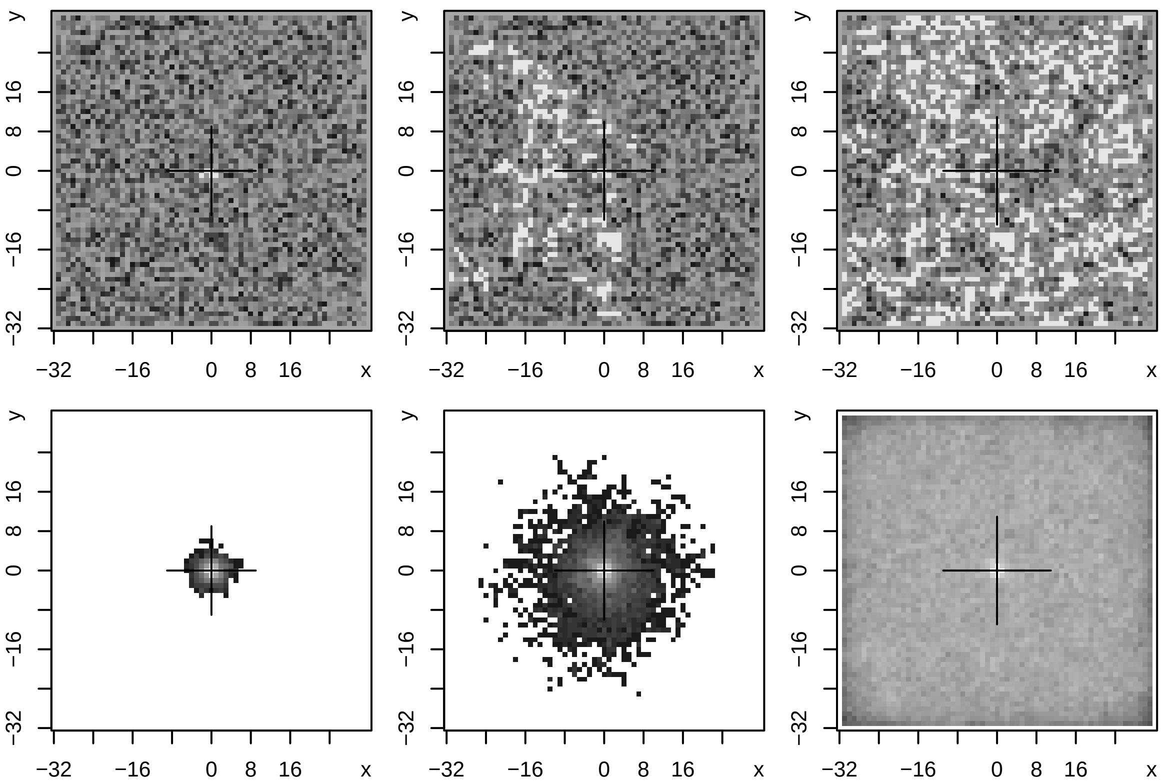

Рис. 1. Сечения плоскостью $z = 0$ изотропных кластеров (верхний ряд) и распределений относительных частот узлов (нижний ряд) с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов для выборки объемом $m = 500$ реализаций при: $p = 0.2816 < p_c$ (слева); $p = 0.3116 \approx p_c$ (в центре); $p = 0.3416 > p_c$ (справа)

Примеры построения статистически изотропных реализаций кластеров и распределений относительных частот на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана и непроницаемыми граничными условиями при различных значениях доли достижимых узлов p показаны на рисунке 1.

Реализации и распределения относительных частот, показанные на рисунке 1 (слева), соответствуют докритическим значениям доли достижимых узлов $p < p_c$. На рисунке 1 (в центре) показаны реализации и распределения при околокритических значениях доли достижимых узлов $p \approx p_c$, а на рисунке 1 (справа) — при сверхкритических значениях $p > p_c$. Для большей наглядности взвешивающая данную решетку последовательность псевдослучайных чисел $u_{xyz} \sim \mathbf{U}(0, 1)$

была зафиксирована. Белым цветом в верхнем ряду на рисунке 1 обозначены узлы, принадлежащие кластеру; светло-серым цветом — недостижимые узлы, а темно-серым — достижимые узлы, не связанные со стартовым подмножеством.

Черным цветом в нижнем ряду на рисунке 1 показаны узлы с относительными частотами $w_{xy0} = 0.02$, а белым — с частотами $w_{xy0} = 0.32$; все узлы с частотами, выходящими за пределы данного интервала $w_{xy0} \notin [0.02; 0.32]$, условно не показаны. Символом “+” на рисунке 1 отмечено стартовое подмножество узлов кластера в центре решетки, причем размеры элементов символа относительно центральной точки $(0, 0, 0)$ соответствуют доле достижимых узлов, масштабированной по радиусу перколяционной решетки $\frac{(x-1)p}{2}$.

Изотропные кластеры с $(1, \pi)$-окрестностью

В классической задаче о перколяции узлов на трехмерной квадратной решетке используется единичная окрестность фон Неймана $U_{1,0}(b)$, соответствующая нулевому показателю Минковского $\pi = 0$. Для выделенного узла b такая окрестность включает в себя $n = 6$ узлов, только одна из координат которых отличается от одноименной координаты узла b на единицу. В другом предельном случае при $\pi \to \infty$ единичная окрестность Мура $U_{1,\infty}(b)$ для выделенного узла b на трехмерной квадратной решетке будет включать в себя $n = 26$ узлов, хотя бы одна из координат которых отличается от одноименной координаты выделенного узла на единицу.

Нетрудно проверить, что единичная окрестность Мура для узла b на трехмерной квадратной решетке образуется как объединение трех подмножеств узлов, для которых: а) только одна, б) только две, в) только три из координат отличаются от одноименной координаты b на единицу. Тогда при промежуточных показателях Минковского $\pi \in (0, \infty)$ мера удаленности ρ_π для шести осевых узлов, образующих окрестность $U_{1,0}$, будет сохраняться постоянной и равной единице $\rho_{\pi,1} = 1$, а для остальных 20 узлов, входящих в окрестность $U_{1,\infty}$, будет убывать от $\rho_{\pi,2} \to \rho_{\pi,3} \to \infty$ при $\pi \to 0+$ до $\rho_{\pi,3} \to \rho_{\pi,2} \to 1+$ при $\pi \to \infty$. Например, в манхэттенской метрике при $\pi = 1$ расстояние до 20 неосевых узлов будет равно $\rho_{1,2} = 2$ или $\rho_{1,3} = 3$, а в евклидовой метрике при $\pi = 2$ расстояние до тех же узлов будет равно $\rho_{2,2} = \sqrt{2}$ или $\rho_{2,3} = \sqrt{3}$.

Для учета неметрического расстояния в модели изотропной решеточной перколяции узлов проведем нормировку доли достижимых узлов p в неравенстве (2) на меру их удаленности ρ_π от текущего узла. Тогда итерационный процесс построения реализации перколяционного кластера будет основываться на проверке выполнения весового неравенства

$$u_{xyz} < \frac{p}{\rho_\pi} \tag{3}$$

для каждого узла (x, y, z) из единичной окрестности Мура некоторого текущего подмножества узлов, где $u_{xyz} \sim \mathbf{U}(0, 1)$ — равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$ псевдослучайные числа; p — относительная доля достижимых узлов решетки.

Также как и в предыдущем случае те узлы, для которых неравенство (3) выполняется, помечаются числовой меткой $l > 1$ и образуют текущее подмножество для следующей итерации. Условием остановки процесса является появление на очередной итерации пустого текущего подмножества узлов или достижение узла из заданного целевого подмножества.

В листинге 3 показана реализация на языке R функций “`ssi3d()`” и “`fssi3d()`”, которые обеспечивают инициализацию переменных, необходимых для корректного вызова функции “`ssTNd()`”. Функция “`ssi3d()`” обеспечивает маркировку статистически изотропного кластера узлов, связанного с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1, \pi)$-окрестностью Мура при заданных долях достижимых узлов “`p0`”, “`p1`” и “`p2`”. Функция “`fssi3d()`” обеспечивает расчет матрицы относительных частот узлов для выборки статистически изотропных реализаций заданного объема “n”, связанных с заданным стартовым подмножеством “set” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “x” с $(1,\pi)$-окрестностью Мура при заданных долях достижимых узлов “p0”, “p1” и “p2”.

Листинг 3. Реализации функций “ssi3d()” и “fssi3d()” на языке R

```
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Функции:
# ssi3d()  - обеспечивает маркировку изотропных кластеров узлов на
#            трехмерной квадратной решетке с (1,π)-окрестностью;
# fssi3d() - обеспечивает построение матрицы относительных частот
#            для выборки изотропных кластеров узлов на трехмерной
#            квадратной решетке с (1,π)-окрестностью.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Аргументы:
# n - объем выборки кластеров;
# x - линейный размер перколяционной решетки;
# p0 - относительная доля достижимых узлов решетки;
# p1 - значение p0, взвешенное на расстояние до узлов из
#      двумерной (1,π)-окрестности;
# p2 - значение p0, взвешенное на расстояние до узлов из
#      трехмерной (1,π)-окрестности;
# set - линейные индексы стартового подмножества;
# all - триггер: "Маркировать все узлы или только достижимые?"
# Переменные:
# e0 - линейные индексы узлов из (1,0)-окрестности;
# e1 - линейные индексы узлов из двумерной (1,π)-окрестности;
# e2 - линейные индексы узлов из трехмерной (1,π)-окрестности;
# b - длина стартового подмножества узлов.
# Значения:
# acc - матрица достижимости узлов перколяционной решетки;
# rfq - матрица относительных частот узлов перколяционной решетки.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
ssi3d <- function(x=33, p0=0.2, p1=p0/2, p2=p0/3,
                  set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  e0 <- c(-1, 1,-x, x,-x^2, x^2)
  e1 <- colSums(matrix(e0[c(
    1,3, 2,3, 1,4, 2,4,
    1,5, 2,5, 1,6, 2,6,
    3,5, 4,5, 3,6, 4,6)], nrow=2))
  e2 <- colSums(matrix(e0[c(
    1,3,5, 2,3,5, 1,4,5, 2,4,5,
    1,3,6, 2,3,6, 1,4,6, 2,4,6)], nrow=3))
  e <- as.integer(c(e0,e1,e2))
  p0 <- rep(p0, length(e0))
  p1 <- rep(p1, length(e1))
  p2 <- rep(p2, length(e2))
  p <- as.double(c(p0,p1,p2))
  acc <- array(runif(x^3), rep(x, times=3))
  if (!all) set <- set[acc[set] < mean(p)]
  b <- as.integer(length(set))
  cls <- rep(0L, max(p)*x^3 + b*all)
  acc[set] <- 2
  acc[c(1,x),,] <- acc[,c(1,x),] <- acc[,,c(1,x)] <- 1
  cls[seq_along(set)] <- as.integer(set - 1)
  .Call("ssTNd", p, acc, b, e, cls)
  return(acc)
}
fssi3d <- function(n=1000, x=33, p0=0.2, p1=p0/2, p2=p0/3,
                   set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
```

```
  rfq <- array(0, dim=rep(x, times=3))
  for (i in seq(n))
    rfq <- rfq + (ssi3d(x, p0, p1, p2, set, all) > 1)
  return(rfq/n)
}
```

Приведенные выше реализации функций “`ssi3d()`” и “`fssi3d()`” также вошли в состав библиотеки SPSL [Moskalev, 2012], опубликованной автором под лицензией GNU GPL-3.

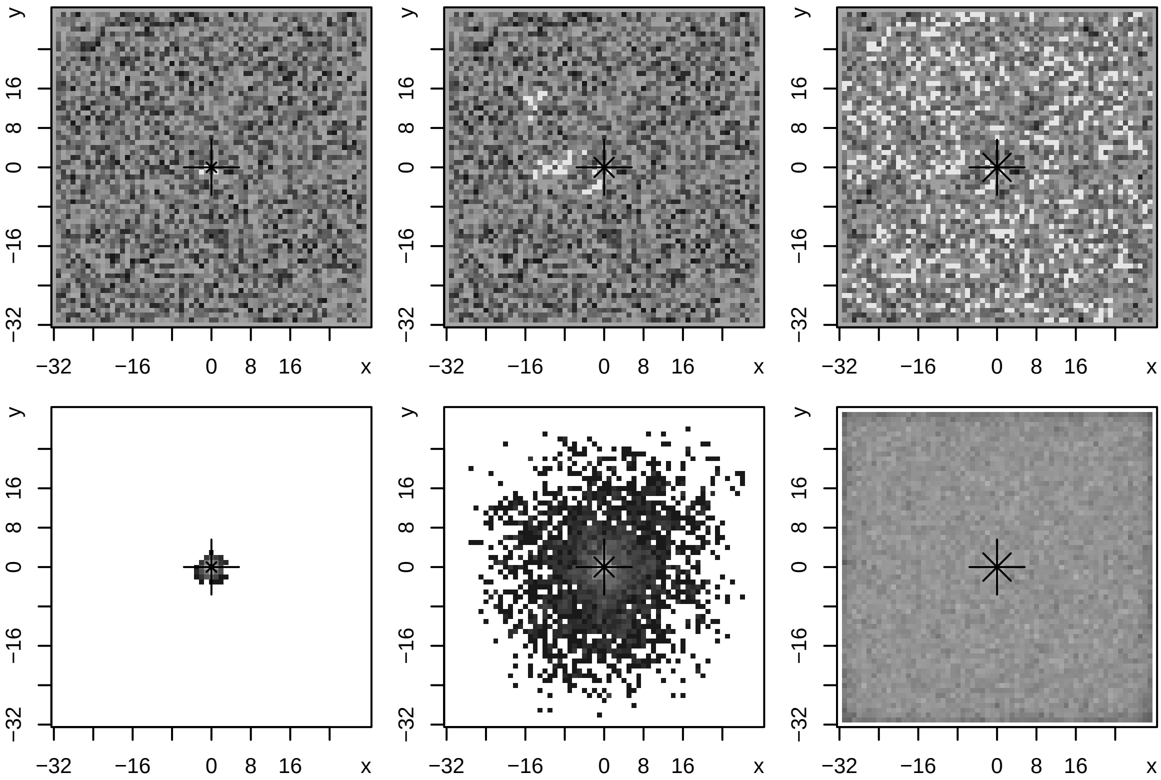

Рис. 2. Сечения плоскостью $z = 0$ изотропных кластеров (верхний ряд) и распределений относительных частот узлов (нижний ряд) с $(1, \pi)$-окрестностью Мура на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов для выборки объемом $m = 500$ реализаций при $p = 0.175$ и: $\pi = 0.5$ (слева); $\pi = 1$ (в центре); $\pi = 2$ (справа)

Примеры построения отдельных реализаций статистически изотропных кластеров и распределений относительных частот на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов с $(1, \pi)$-окрестностью Мура и непроницаемыми граничными условиями при фиксированной доле достижимых узлов $p = 0.175$ и различных значениях показателя Минковского π приведены на рисунке 2.

На рисунке 2 (слева) показаны реализации и распределения относительных частот при значениях показателя Минковского $\pi = 0.5$, соответствующих неметрическим расстояниям. На рисунке 2 (в центре) показаны реализации и распределения относительных частот при значениях $\pi = 1$, соответствующих манхеттенской метрике, а на рисунке 2 (справа) — при значениях $\pi = 2$, соответствующих евклидовой метрике. Остальные параметры для отображения отдельных реализаций в верхнем ряду на рисунке 2 и распределений относительных частот в нижнем ряду на рисунке 2 выбраны идентичными примерам из предыдущего раздела. Символом “ж” на рисунке 2 отмечено стартовое подмножество узлов кластера в центре решетки, причем размеры элементов символов относительно центральной точки $(0, 0, 0)$ соответствуют долям достижимых узлов и их попарным средним, нормированным на меру удаленности узла в $(1, \pi)$-окрестности Мура и масштабированным по радиусу перколяционной решетки $\frac{(x-1)p}{2\rho_\pi}$.

Сравнение статистически изотропных распределений относительных частот для инвариантно взвешенных решеток с единичными окрестностями фон Неймана и Мура в нижнем ряду на рисунках 1 и 2 показывает, что вероятность появления перколяционного кластера $P_\infty(p, \pi)$ является возрастающей функцией как по доле достижимых узлов p, так и по показателю Минковского π. Следовательно, при возрастании значений показателя π на решетке с окрестностью Мура критическое значение доли достижимых узлов $p_c(\pi)$ будет снижаться. Действительно, сравнивая показанные в нижнем ряду слева на рисунках 1 и 2 сечения плоскостью $z = 0$ статистически изотропных распределений относительных частот узлов с единичными окрестностями фон Неймана и Мура нетрудно заметить, что последний случай соответствует докритическому значению для трехмерной решетки $p = 0.175 < p_c(\pi = 0.5)$. Тогда показанные в центре и справа в нижнем ряду на рисунке 2 распределения соответствуют около- и сверхкритическим значениям долей достижимых узлов для трехмерной решетки: $p = 0.175 \approx p_c(\pi = 1)$ и $p = 0.175 < p_c(\pi = 2)$.

Анизотропные кластеры с $(1, 0)$-окрестностью

Рассмотрим задачу о построении статистически анизотропного кластера узлов на трехмерной квадратной решетке с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана. С алгоритмической точки зрения это означает векторизацию изотропного весового неравенства (2) по узлам, образующим $(1, 0)$-окрестность фон Неймана [Москалев, 2013]

$$u_{xyz} < p_k \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где p_k — компоненты вектора долей достижимых узлов $\boldsymbol{p}$ размерности $n = 6$ для трехмерной решетки. При $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$ кластер узлов будет статистически изотропным, в противном случае — неравные компоненты вектора $\boldsymbol{p}$ приведут к появлению ненулевой меры статистической анизотропии.

Для количественной оценки статистической анизотропии кластера воспользуемся евклидовой нормой разности векторов $L_2 = \|\boldsymbol{p} - \langle \boldsymbol{p} \rangle\|$, где $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ — усредненный по компонентам вектор долей достижимых узлов $\boldsymbol{p}$. Тогда в изотропном случае при $\boldsymbol{p} = \langle \boldsymbol{p} \rangle$ мера анизотропии будет равна нулю $L_2 = 0$, а в анизотропном случае при $\boldsymbol{p} \neq \langle \boldsymbol{p} \rangle$ — строго больше нуля $L_2 > 0$.

Также как и в изотропном случае те узлы, для которых неравенство (4) выполняется, помечаются числовой меткой $l > 1$ и образуют текущее подмножество для следующей итерации. Условием остановки процесса является появление на очередной итерации пустого текущего подмножества узлов или достижение узла из заданного целевого подмножества.

В листинге 4 показана реализация на языке R функций “`ssa30()`” и “`fssa30()`”, которые обеспечивают инициализацию переменных, необходимых для корректного вызова функции “`ssTNd()`”. Функция “`ssa30()`” обеспечивает маркировку статистически анизотропного кластера узлов, связанного с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана при заданных компонентах вектора долей достижимых узлов “`p`”. Функция “`fssa30()`” обеспечивает расчет матрицы относительных частот узлов для выборки статистически анизотропных реализаций заданного объема “`n`”, связанных с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана при заданных компонентах вектора долей достижимых узлов “`p`”.

Листинг 4. Реализации функций “ssa30()” и “fssa30()” на языке R

```
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Функции:
# ssa30()  - обеспечивает маркировку анизотропных кластеров узлов на
#            трехмерной квадратной решетке с (1,0)-окрестностью;
# fssa30() - обеспечивает построение матрицы относительных частот
#            для выборки анизотропных кластеров узлов на трехмерной
#            квадратной решетке с (1,0)-окрестностью.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Аргументы:
# n - объем выборки кластеров;
# x - линейный размер перколяционной решетки;
# p - вектор относительных долей достижимых узлов по основным
#     направлениям решетки: -x, +x, -y, +y, -z, +z;
# set - линейные индексы стартового подмножества;
# all - триггер: "Маркировать все узлы или только достижимые?"
# Переменные:
# e - линейные индексы узлов из (1,0)-окрестности;
# b - длина стартового подмножества узлов.
# Значения:
# acc - матрица достижимости узлов перколяционной решетки;
# rfq - матрица относительных частот узлов перколяционной решетки.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
ssa30 <- function(x=33, p=runif(6, max=0.6),
                  set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  e <- as.integer(c(-1, 1,-x, x,-x^2, x^2))
  p <- as.double(p)
  acc <- array(runif(x^3), rep(x,3))
  if (!all) set <- set[acc[set] < mean(p)]
  b <- as.integer(length(set))
  cls <- rep(0L, max(p)*x^3 + b*all)
  acc[set] <- 2
  acc[c(1,x),,] <- acc[,c(1,x),] <- acc[,,c(1,x)] <- 1
  cls[seq_along(set)] <- as.integer(set - 1)
  .Call("ssTNd", p, acc, b, e, cls)
  return(acc)
}
fssa30 <- function(n=1000, x=33, p=runif(6, max=0.6),
                   set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  rfq <- array(0, dim=rep(x, times=3))
  for (i in seq(n))
    rfq <- rfq + (ssa30(x, p, set, all) > 1)
  return(rfq/n)
}
```

Приведенные выше реализации функций “ssa30()” и “fssa30()” вошли в состав библиотеки SPSL [Moskalev, 2012], опубликованной автором под лицензией GNU GPL-3.

Примеры построения отдельных реализаций статистически анизотропных кластеров и распределений относительных частот на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов с $(1,0)$-окрестностью фон Неймана и непроницаемыми граничными условиями при различных значениях доли достижимых узлов p показаны на рисунке 3.

Примеры построения отдельных реализаций статистически анизотропных кластеров и распределений относительных частот на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов с $(1,0)$-окрестностью фон Неймана и непроницаемыми граничными условиями при различных векторах долей достижимых узлов $\boldsymbol{p}$ показаны на рисунке 3. Основные параметры для отображения отдельных реализаций в верхнем ряду на рисунке 3 и распределений относительных

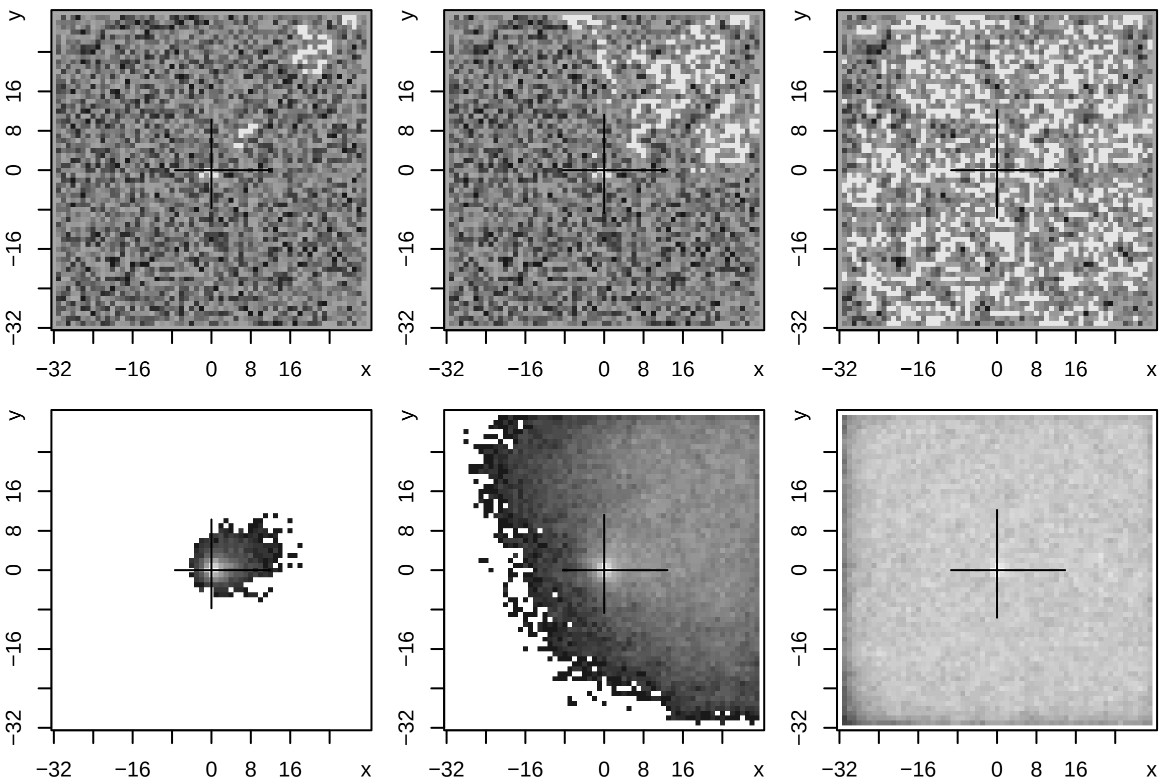

Рис. 3. Сечения плоскостью $z = 0$ анизотропных кластеров (верхний ряд) и распределений относительных частот узлов (нижний ряд) с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов для выборки объемом $m = 500$ реализаций при: $\boldsymbol{p}_1 = (0.232;\ 0.372;\ 0.242;\ 0.322;\ 0.282;\ 0.282)$ (слева); $\boldsymbol{p}_2 = (0.262;\ 0.402;\ 0.272;\ 0.352;\ 0.312;\ 0.312)$ (в центре); $\boldsymbol{p}_3 = (0.292;\ 0.432;\ 0.302;\ 0.382;\ 0.342;\ 0.342)$ (справа)

частот в нижнем ряду на рисунке 3 выбраны идентичными примерам из предыдущих разделов. Символом “+” на рисунке 3 отмечено стартовое подмножество узлов кластера в центре решетки, причем размеры элементов символов относительно центральной точки $(0, 0, 0)$ соответствуют компонентам вектора долей достижимых узлов, масштабированным по радиусу перколяционной решетки $\frac{(x-1)\boldsymbol{p}}{2}$.

Используя сечения плоскостью $z = 0$ статистически анизотропных распределений относительных частот, представленных в нижнем ряду на рисунке 3, нетрудно заметить, что основное влияние на протекание в заданном направлении перколяционной решетки $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ оказывают значения соответствующих компонент векторов $\boldsymbol{p}_3$. К примеру, кластеры распределении относительных частот, показанном в нижнем ряду слева на рисунке 3 обладают структурой, сверхкритической в направлениях орт $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и докритической в направлениях $-\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{j}$. Действительно, сравнивая компоненты вектора $\boldsymbol{p}_1 = (0.232;\ 0.372;\ 0.242;\ 0.322;\ 0.282;\ 0.282)$ с порогом перколяции узлов на трехмерной квадратной решетке $p_c \approx 0.311$ можно записать, что доли достижимых узлов имеют докритические значения $p_{11} < p_{13} < p_c$ в направлениях орт $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, и сверхкритические $p_{12} > p_{14} > p_c$ в направлениях $-\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{j}$. При этом протекания ни в одном из этих направлений не наблюдается, поскольку доли достижимых узлов в ортогональных направлениях $\pm\boldsymbol{k}$ также имеют докритические значения $p_{15} = p_{16} < p_c$.

Анизотропные кластеры с $(1, \pi)$-окрестностью

Рассмотрим задачу о построении статистически анизотропного кластера узлов на трехмерной квадратной решетке с $(1, \pi)$-окрестностью Мура. С алгоритмической точки зрения это означает нормирование векторизованного весового неравенства (4) на неметрическое расстояние Минковского ρ_π до данного узла с текущим показателем π [Москалев, 2013]:

$$u_{xyz} < \frac{p_k}{\rho_\pi} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где p_k — компоненты вектора долей достижимых узлов $\boldsymbol{p}$ размерности $n = 26$ для трехмерной решетки. $(1, \pi)$-окрестность Мура на трехмерной квадратной решетке образуется как объединение трех подмножеств узлов, для которых: а) только одна; б) только две; в) только три из координат отличаются от одноименной координаты выделенного узла на единицу. Нормирующий делитель взвешивающего неравенства ρ_π для элементов этих подмножеств будет принимать одно из трех значений: а) $\rho_\pi = 1^{1/\pi} = 1$; б) $\rho_\pi = 2^{1/\pi} = \sqrt[\pi]{2}$; в) $\rho_\pi = 3^{1/\pi} = \sqrt[\pi]{3}$.

Также как и в предыдущих случаях те узлы, для которых указанное неравенство выполняется, помечаются числовой меткой $l > 1$ и образуют текущее подмножество для следующей итерации. Условием остановки процесса является появление на очередной итерации пустого текущего подмножества узлов или достижение узла из заданного целевого подмножества.

В листинге 5 показана реализация на языке R функций “`ssa3d()`” и “`fssa3d()`”, которые обеспечивают инициализацию переменных, необходимых для корректного вызова функции “`ssTNd()`”. Функция “`ssa3d()`” обеспечивает маркировку статистически анизотропного кластера узлов, связанного с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1, \pi)$-окрестностью Мура при заданных компонентах векторов долей достижимых узлов “`p0`”, “`p1`” и “`p2`”. Функция “`fssa3d()`” обеспечивает расчет матрицы относительных частот узлов для выборки статистически анизотропных реализаций заданного объема “`n`”, связанных с заданным стартовым подмножеством “`set`” на трехмерной квадратной решетке заданного размера “`x`” с $(1, \pi)$-окрестностью Мура при заданных компонентах векторов долей достижимых узлов “`p0`”, “`p1`” и “`p2`”.

Листинг 5. Реализации функций “`ssa3d()`” и “`fssa3d()`” на языке R

```
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Функции:
# ssa3d()  - обеспечивает маркировку анизотропных кластеров узлов на
#            трехмерной квадратной решетке с (1,п)-окрестностью;
# fssa3d() - обеспечивает построение матрицы относительных частот
#            для выборки анизотропных кластеров узлов на трехмерной
#            квадратной решетке с (1,п)-окрестностью.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
# Аргументы:
# n - объем выборки кластеров;
# x - линейный размер перколяционной решетки;
# p0 - вектор относительных долей достижимых узлов по основным
#      направлениям решетки: -x, +x, -y, +y, -z, +z;
# p1 - парные усредненные комбинации компонент p0, взвешенные на
#      расстояние до узлов из двумерной (1,п)-окрестности;
# p2 - тройные усредненные комбинации компонент p0, взвешенные на
#      расстояние до узлов из трехмерной (1,п)-окрестности;
# set - линейные индексы стартового подмножества;
# all - триггер: "Маркировать все узлы или только достижимые?"
# Переменные:
# e0 - линейные индексы узлов из (1,0)-окрестности;
# e1 - линейные индексы узлов из двумерной (1,п)-окрестности;
# e2 - линейные индексы узлов из трехмерной (1,п)-окрестности;
# b - длина стартового подмножества узлов.
# Значения:
# acc - матрица достижимости узлов перколяционной решетки;
```

```
# rfq - матрица относительных частот узлов перколяционной решетки.
# # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # # #
ssa3d <- function(x=33,
                  p0=runif(6, max=0.4),
                  p1=colMeans(matrix(p0[c(
                    1,3, 2,3, 1,4, 2,4,
                    1,5, 2,5, 1,6, 2,6,
                    3,5, 4,5, 3,6, 4,6)], nrow=2))/2,
                  p2=colMeans(matrix(p0[c(
                    1,3,5, 2,3,5, 1,4,5, 2,4,5,
                    1,3,6, 2,3,6, 1,4,6, 2,4,6)], nrow=3))/3,
                  set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  e0 <- c(-1, 1,-x, x,-x^2, x^2)
  e1 <- colSums(matrix(e0[c(
    1,3, 2,3, 1,4, 2,4,
    1,5, 2,5, 1,6, 2,6,
    3,5, 4,5, 3,6, 4,6)], nrow=2))
  e2 <- colSums(matrix(e0[c(
    1,3,5, 2,3,5, 1,4,5, 2,4,5,
    1,3,6, 2,3,6, 1,4,6, 2,4,6)], nrow=3))
  e <- as.integer(c(e0,e1,e2))
  p <- as.double(c(p0,p1,p2))
  acc <- array(runif(x^3), rep(x, times=3))
  if (!all) set <- set[acc[set] < mean(p)]
  b <- as.integer(length(set))
  cls <- rep(0L, max(p)*x^3 + b*all)
  acc[set] <- 2
  acc[c(1,x),,] <- acc[,c(1,x),] <- acc[,,c(1,x)] <- 1
  cls[seq_along(set)] <- as.integer(set - 1)
  .Call("ssTNd", p, acc, b, e, cls)
  return(acc)
}
fssa3d <- function(n=1000, x=33,
                   p0=runif(6, max=0.4),
                   p1=colMeans(matrix(p0[c(
                     1,3, 2,3, 1,4, 2,4,
                     1,5, 2,5, 1,6, 2,6,
                     3,5, 4,5, 3,6, 4,6)], nrow=2))/2,
                   p2=colMeans(matrix(p0[c(
                     1,3,5, 2,3,5, 1,4,5, 2,4,5,
                     1,3,6, 2,3,6, 1,4,6, 2,4,6)], nrow=3))/3,
                   set=(x^3+1)/2, all=TRUE) {
  rfq <- array(0, dim=rep(x, times=3))
  for (i in seq(n))
    rfq <- rfq + (ssa3d(x, p0, p1, p2, set, all) > 1)
  return(rfq/n)
}
```

Приведенные выше реализации функций “ssa3d()” и “fssa3d()” вошли в состав библиотеки SPSL [Moskalev, 2012], опубликованной автором под лицензией GNU GPL-3.

Примеры построения отдельных реализаций статистически анизотропных кластеров и распределений относительных частот на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов с $(1, \pi)$-окрестностью Мура и непроницаемыми граничными условиями при фиксированном векторе долей достижимых узлов $\boldsymbol{p}$ по основным направлениям перколяционной решетки: $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ и различных значениях показателя Минковского π приведены на рисунке 4.

На рисунке 4 (слева) показаны реализации и распределения относительных частот при значениях показателя Минковского $\pi = 0.5$, соответствующих неметрическим расстояниям. На

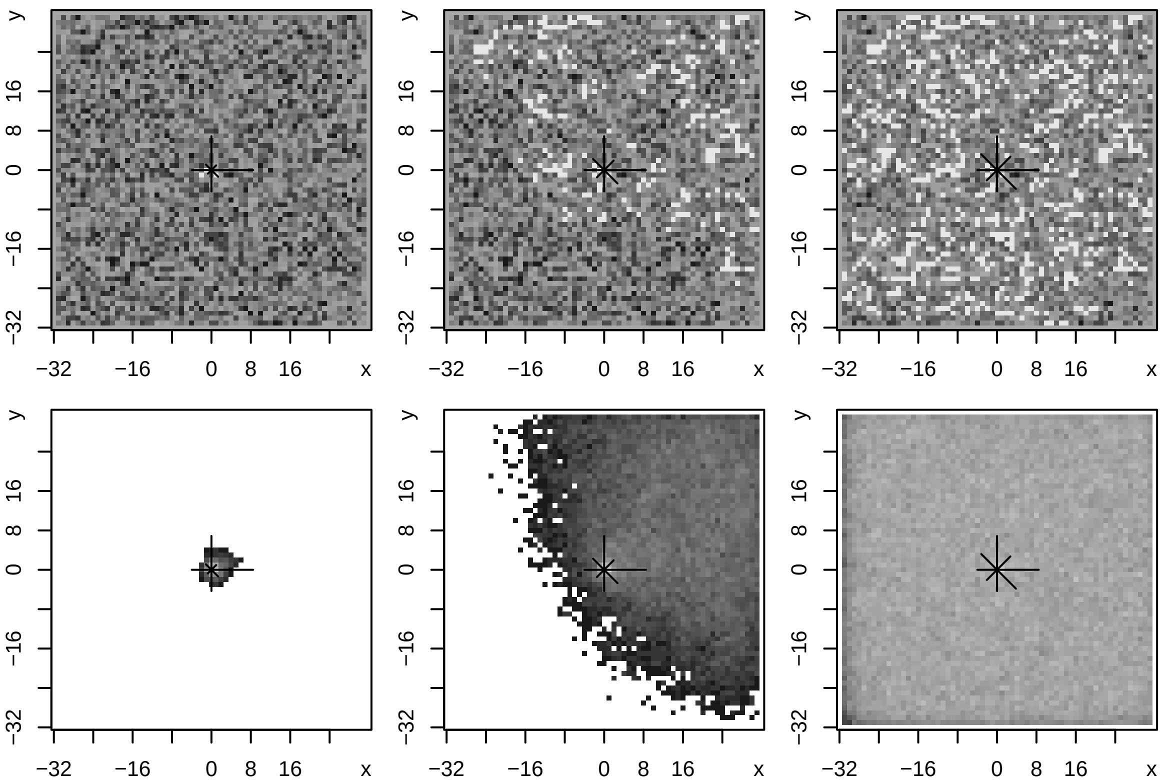

Рис. 4. Сечения плоскостью $z = 0$ анизотропных кластеров (верхний ряд) и распределений относительных частот узлов (нижний ряд) с $(1, \pi)$-окрестностью Мура на трехмерной квадратной решетке размером $x = 65$ узлов для выборки объемом $m = 500$ реализаций при $\boldsymbol{p}_3 = (0.125;\ 0.265;\ 0.135;\ 0.215;\ 0.175;\ 0.175)$ и: $\pi = 0.5$ (слева); $\pi = 1$ (в центре); $\pi = 2$ (справа)

рисунке 4 (в центре) показаны реализации и распределения относительных частот при значениях $\pi = 1$, соответствующих манхеттенской метрике, а на рис. 4 (справа) — при значениях $\pi = 2$, соответствующих евклидовой метрике. Основные параметры для отображения отдельных реализаций в верхнем ряду на рисунке 3 и распределений относительных частот в нижнем ряду на рисунке 3 выбраны идентичными примерам из предыдущих разделов. Символом “$\ast$” на рисунке 4 отмечено стартовое подмножество узлов кластера в центре решетки, причем размеры элементов символов относительно центральной точки $(0, 0, 0)$ соответствуют компонентам вектора долей достижимых узлов и их попарным средним, нормированным на меру их удаленности в $(1, \pi)$-окрестности Мура и масштабированным по радиусу перколяционной решетки $\frac{(x-1)\boldsymbol{p}}{2\rho_\pi}$.

Заключение

Сопоставление структуры рассмотренных выше моделей перколяции узлов на трехмерной квадратной решетке показывает, что изотропная модель с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана является частным случаем как изотропной модели с $(1, \pi)$-окрестностью Мура, так и анизотропной модели с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана. В свою очередь, изо- и анизотропная модели с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана, а также изотропная модель с $(1, \pi)$-окрестностью Мура являются частными случаями анизотропной модели с $(1, \pi)$-окрестностью Мура, причем размерность решетки на указанные отношения существенной роли не влияет. Это приводит к выводу о существовании иерархической структуры моделей перколяции узлов на n-мерных квадратных решетках, допускающих описание в рамках универсального алгоритма, реализация которого приведена в листинге 1.

Основным параметром изотропной модели перколяции узлов с $(1, 0)$-окрестностью фон Неймана является относительная доля достижимых узлов: $p = \frac{N_p}{N_t}$, где N_p — количество достижимых узлов решетки; N_t — общее количество узлов решетки. Сопоставляя отдельному узлу перколяционной решетки некий минимальный объем V_0, нетрудно показать, что с физической точки зрения относительная доля достижимых узлов p соответствует априорной оценке полной объемной пористости моделируемой среды: $\Pi_{vt} = \frac{V_p}{V_t}$, где $V_p = V_0 N_p$ — полный (несвязный) объем порового пространства; $V_t = V_0 N_t$ — репрезентативный объем пористой среды. Тогда компоненты вектора $\boldsymbol{p}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ в анизотропных моделях перколяции узлов будут совпадать с априорными оценками полной объемной пористости по соответствующим направлениям моделируемой среды $\Pi_{vt}(\Pi_{vt1}, \Pi_{vt2}, \ldots, \Pi_{vtn})$.

Выделение кластера, содержащего N_c узлов, позволяет оценить эффективную объемную пористость моделируемой среды: $\Pi_{vc} = \frac{V_c}{V_t}$, где $V_c = V_0 N_c$ — эффективный (связный) объем порового пространства. Обобщение $(1, 0)$-окрестности фон Неймана до $(1, \pi)$-окрестности Мура показывает, что связный объем порового пространства зависит от показателя Минковского $V_{c,\pi}$ и подчиняется неравенству: $0 \leqslant V_{c,0} \leqslant V_{c,\pi} \leqslant V_{c,\infty} \leqslant V_p$, где $V_{c,0}$, $V_{c,\infty}$ — объемы порового пространства, соответствующие наихудшей и наилучшей связности моделируемой среды.

Список литературы

Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

Москалев П. В., Шитов В. В. Математическое моделирование пористых структур. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 120 с.

Москалев П. В. Анализ структуры перколяционного кластера // *Журнал технической физики*. — 2009. — Т. 79, № 6. — С. 1–7.

Москалев П. В. Иерархическое построение моделей перколяции узлов на n-мерных квадратных решетках // Математика. Компьютер. Образование. Сборник тезисов XX Международной научной конференции. — № 20. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. — С. 184.

Alexandrowicz Z. Critically branched chains and percolation clusters // *Physics Letters A*. — 1980. — Vol. 80, no. 4. — P. 284–286.

Broadbent S., Hammersley J. Percolation processes: I. Crystals and mazes // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 1957. — Vol. 53, no. 3. — P. 629–641.

Flory P. Molecular size distribution in three dimensional polymers. Part I–III // *Journal of the American Chemical Society*. — 1941. — Vol. 63, no. 11. — P. 3083–3100.

Koplik J., Wilkinson D., Willemsen J. Percolation and capillary fluid displacement // The Mathematics and Physics of Disordered Media: Percolation, Random Walk, Modeling, and Simulation / Hughes B., Ninham B. (ed.). — Berlin: Springer, 1983. — P. 169–183.

Leath P. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold // *Physical Review B*. — 1976. — Vol. 14, no. 11. — P. 5046–5055.

Moskalev P. V. SPSL: Site percolation on square lattice. — 2012. — R package version 0.1-8. — URL: `http://cran.r-project.org/package=SPSL`.

Stockmayer W. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers // *The Journal of Chemical Physics*. — 1943. — Vol. 11, no. 2. — P. 45–55.

Washburn E. Note on a method of determining the distribution of pore sizes in a porous material // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 1921. — Vol. 7, no. 4. — P. 115–116.

Wilkinson D., Willemsen J. Invasion percolation: a new form of percolation theory // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1983. — Vol. 16, no. 14. — P. 3365–3376.