**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 4 С. 583−587**

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.6

Фрактальный сплайн как модель фрактальных функций для генерирования фрактальных сигналов

О. Б. Новикова

Национальный авиационный университет,
Украина, 03058, г. Киев, пр. Космонавта Комарова, д. 1

E-mail: novikovaolga88@gmail.com

Получено 10 июня 2013 г.

В работе представлен способ получения фрактальных сигналов с помощью фрактальных сплайнов, аналогичных сигналам, генерируемыми фрактальными функциями. Обосновывается гипотеза об идентичности дискретных фрактальных функций и линейных фрактальных сплайнов. Рассмотрены особенности расчета матрицы планирования для кумулятивного фрактального сплайна, приведены примеры сгенерированных кривых.

Ключевые слова: фрактальная функция, фрактальный сплайн, фрактальный сигнал

Fractal spline as a model of fractal functions for fractal signals generation

O. B. Novikova

National Aviation University, 1 Kosmonavta Komarova pr., Kyiv, 03058, Ukraine

Abstract. — This paper presents a method for obtaining fractal signals using fractal splines similar to signals generated by fractal functions. The hypothesis about the identity of discrete fractal functions and linear fractal splines is justified. There are considered the features of planning matrix calculation of cumulative fractal spline, examples of generated curves are shown.

Keywords: fractal function, fractal spline, fractal signal

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 583–587 (Russian).

Математической основой для формирования фрактальных сигналов выступают фрактальные функции, первоначально известные как непрерывные, но всюду не дифференцируемые функции. К ним относят функции Больцано, Вейерштрасса, Римана, Ханкеля, Дарбу и ряд других. Функции без производной — это не абстрактный объект математического анализа, а доказанный результат решения сложных задач теории сингулярностей и хаоса. Например, с точки зрения современной физики функция без производной есть траектория броуновской частицы [Зельдович, Соколов, с. 494]. А явление турбулентности в жидкости описывается функцией Вейерштрасса [Мандельброт, с. 148].

Функция Больцано и связанная с ней апериодичная рекурсивная последовательность нулей и единиц (последовательность Морса–Туе) используется для формирования кодофазоманипулируемых (КФМ) фрактальных сигналов [Пащенко, Пащенко, 2010]. КФМ-сигналы представляют собой последовательность радиоимпульсов, фазы которых изменяются по заданному закону [Варакин, с. 38]. Для фрактальных КФМ-сигналов последовательность символов кода фазовой модуляции является самоподобной, что достигается путем использования системы n-го числа связанных между собой генераторов. Сигналы такого типа нашли применение в системах скрытой передачи информации и в маловысотной радиолокации.

Модифицированная функция Дарбу–Кравченко применяется для синтеза фрактальных решеток в радиолокации [Кравченко, Масюк, с. 60]. Самоподобный характер этих функций делает их потенциально применимыми для моделирования в других сферах: эконофизике, биомедицине, гидрологии и пр.

Сложность расчетов и индивидуальность алгоритма для каждой из перечисленных фрактальных функций делает сложным их использование для генерирования фрактальных сигналов. Еще сложнее получать оценки таких функций (например, в процессе приема фрактальных сигналов), даже если известен вид функции. Несмотря на то, что аналитически фрактальные функции выражены бесконечным рядом, на практике ограничиваются конечным числом слагаемых.

В настоящей статье предложен иной способ генерации фрактальных сигналов (конечных масштабов), который основывается на фрактальных сплайнах.

Сплайны и фракталы

Идея объединения сплайнов и фракталов в одной модели выросла из анализа и сравнения свойств этих объектов. Поскольку и сплайны, и фракталы являются популярными инструментами генерирования кривых, попытка их сблизить началась с компьютерной графики. В [Szeliski, Terzopoulos, 1989] дается четкое разграничение сфер влияния: сплайны относятся к детерминистическим моделям, фракталы — к стохастическим. Формальная связь между фракталами и сплайнами минимальной кривизны достигается путем сложения кривой сплайна и фрактального спектра, полученного с помощью Фурье-анализа. Даже такой простейший способ комбинирования сплайнов и фракталов позволил получить более реалистичные кривые. Р. Голдман [Goldman, 2009] заметил связь между системами итерированных функций (СИФ) и алгоритмом де Кастельжо — рекурсивным методом построения кривых Безье. Показав переход от кривых Безье к фракталам с контрольными точками, Голдман предположил, что математическая связь между фракталами и сплайнами лежит в комплексной плоскости.

Инкапсулирование свойств сплайнов и фракталов в одном объекте есть следующий шаг по их сближению. Алгоритмически достигнуть этого возможно, применив рекурсивный способ построения фрактального сплайна, а именно: материнский сплайн (сплайн нулевого масштаба) строится как обычный эрмитов сплайн. Затем каждый его фрагмент заменяется уменьшенной копией материнского сплайна, и процесс рекурсивно повторяется до нужной глубины. Нет ограничений по длине и пропорции размещения фрагментов. Периодичность сплайна обеспечивает гладкую склейку вложенных копий. Детальное описание алгоритма и свойства фрактальных сплайнов рассмотрены в [Новікова, 2012].

Фрактальный сплайн имеет ряд преимуществ как перед «родительскими объектами», так и перед другими инструментами математического анализа и геометрического моделирования.

Его главное достоинство — возможность генерировать регулярные и нерегулярные фрактальные объекты с контрольными точками, локально менять их свойства, комбинировать несколько фракталов в одном. Физическая интерпретация фрактальных сплайнов состоит в следующем: это стойкие к ошибкам, информационно емкие, самоподобные структуры, имеющие дробную размерность Хаусдорфа. Сплайн имеет достаточно простую аппаратную реализацию. Конкретные примеры для отдельных масштабов показаны в [Шелевицький, 2005].

Фрактальный сплайн как модель дискретной фрактальной функции

Рассмотрим применение фрактальных сплайнов к фрактальным функциям.

Фрактальные функции можно условно разделить на две группы: образованные тригонометрическими функциями и дискретный набор точек. Ко второй группе относятся функции Больцано, Безиковича, Ван-дер-Вардена. Анализ свойств этих функций позволяет выделить следующие особенности:

1) Рекуррентный алгоритм построения, результатом которого есть конечное множество точек;
2) Точки соединяются прямыми, причем угол наклона не меняется ни на интервалах, ни на масштабах;
3) Пропорции размещения точек на одной прямой сохраняются;
4) Увеличение масштаба принципиально не меняет форму кривой, а лишь добавляет детали.

Эти свойства дискретных фрактальных функций позволяют говорить об их близости с фрактальными эрмитовыми сплайнами. Выбор эрмитового сплайна в качестве базиса не случаен. Во-первых, он сохраняет значение производной в узлах, во-вторых, не превышает значений табличной функций в отличие от естественного кубического сплайна, что важно для задач интерполяции [Сравнение сплайновой и эрмитовой интерполяции, 2013].

Сравнение функции Больцано и фрактального сплайна (рис. 1) позволяет говорить о тождестве графиков. Однако фрактальный эрмитов сплайн имеет важное преимущество — он действительно непрерывен на фрагментах, в отличие от функции Больцано, где точки соединены ломаной.

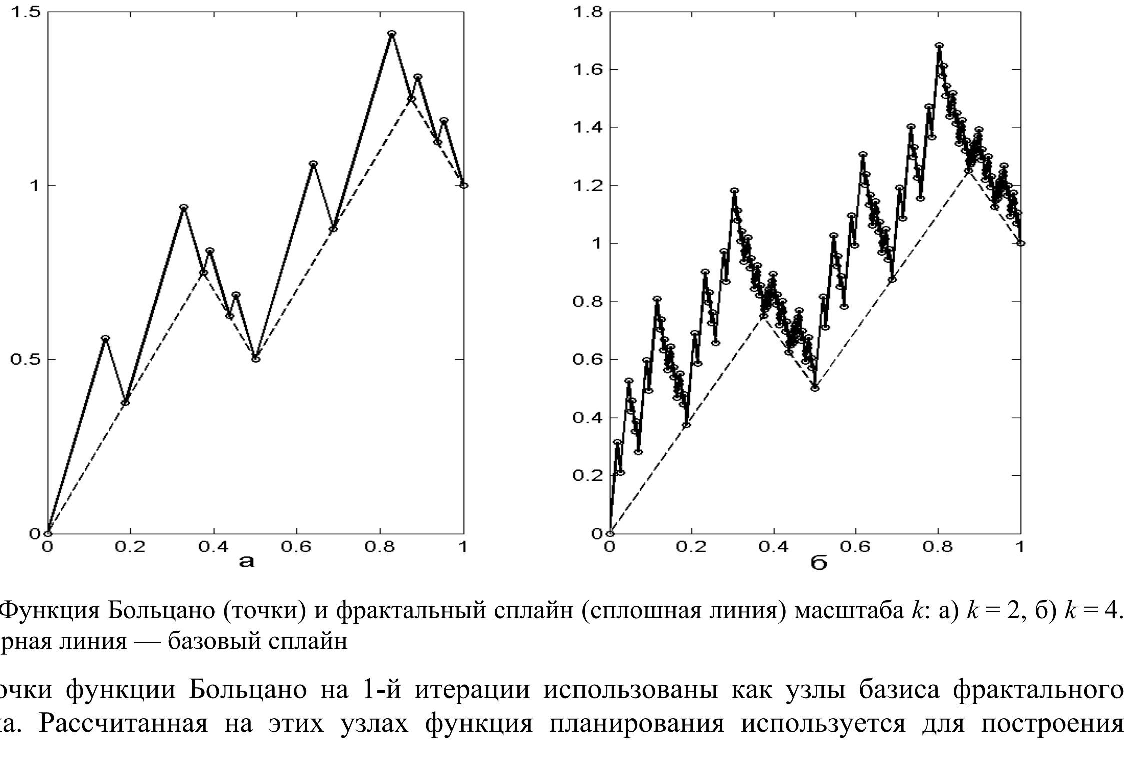

Рис. 1. Функция Больцано (точки) и фрактальный сплайн (сплошная линия) масштаба k: а) $k = 2$, б) $k = 4$. Пунктирная линия — базовый сплайн

Точки функции Больцано на 1-й итерации использованы как узлы базиса фрактального сплайна. Рассчитанная на этих узлах функция планирования используется для построения фрактального сплайна 1-й степени. Ее копия, уменьшенная в k раз, где k — отношение длины текущего фрагмента к длине всего базиса, позволяет построить сплайн следующего масштаба. Таким образом, с помощью фрактальных сплайнов можно получить временной ряд, воспроизводящий функцию Больцано произвольной глубины. Приближение функции Больцано полиномами Бернштейна рассмотрено в [Козлова, 2013].

Кумулятивный фрактальный сплайн как модель тригонометрической фрактальной функции

Сумма фрактальных сплайнов нескольких масштабов есть кумулятивный фрактальный сплайн. Его использование показано для группы тригонометрических фрактальных функций, которые аналитически выражаются как сумма синусоид. Например, функция Вейерштрасса

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где 0 a 1, b 1 — нечетное число, $ab > 1 + 3\pi / 2$.

Кумулятивный фрактальный сплайн есть сумма фрактальных сплайнов с нулевого масштаба по k-й:

$$S_{\Sigma} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i S_i ,$$

где $\alpha_i \in [0;1]$ — весовой коэффициент. В частности, случай $\alpha_i = 0$ означает исключение фрактального сплайна i-го масштаба из разложения, $\alpha_i = 1$ — полное включение в разложение.

Фрактальный сплайн на каждом масштабе — это набор стыкованных фрагментов-сплайнов:

$$S_i = s_1 \cup s_2 \cup \ldots s_R = \bigcup_{j=1}^{R} s_j ,$$

где R — количество фрагментов. Каждый фрагмент можно представить как произведение матрицы планирования p на матрицу коэффициентов A: $s_j = p_j A$.

Если сплайн нулевого масштаба представить как $S_0 = P_0 A$, то для равномерного фрактального сплайна существует переход $P_0 \to p_j$, т. е. нет необходимости рассчитывать матрицу планирования на каждом фрагменте или на каждом масштабе, ее можно получить сжатием начальной матрицы.

Пусть матрица P_0 имеет размерность m x n, а матрица p_j — размерность q x n, где $q = (tu(2) - tu(1))^{-k} / step + 1$, $tu(i)$ — узел сплайна, k — масштаб, $step$ — шаг сетки. Тогда если $q \neq n$, то матрицу p_j можно получить из P_0 выборкой строк по правилу

$$1 + \frac{m-n}{q-n} * (z-1),$$

где $z = 1 \ldots q$ — номер строки матрицы p_j.

Пример приближения функции Вейерштрасса с параметрами a = 0.5, b = 4 кумулятивным фрактальным сплайном 2-го масштаба показан на рисунке 2. Очевидно, что добиться полного совпадения невозможно в виду того, что сплайн — это кубический полином, а функция Вейерштрасса — косинусоида.

Таким образом, аппарат фрактальных сплайнов позволяет генерировать кривые, эквивалентные порождаемым фрактальными функциями, но со значительно меньшими алгоритмическими затратами. Для линейного фрактального сплайна можно найти такие значения параметров, при которых он совпадет с функцией Больцано. Фрактальный сплайн представляет более универсальную модель для генерации фрактальных сигналов, нежели отдельные фрактальные функции. Полученная математическая модель может быть использована для решения задач идентификации, аппроксимации, оптимизации многомерных временных рядов.

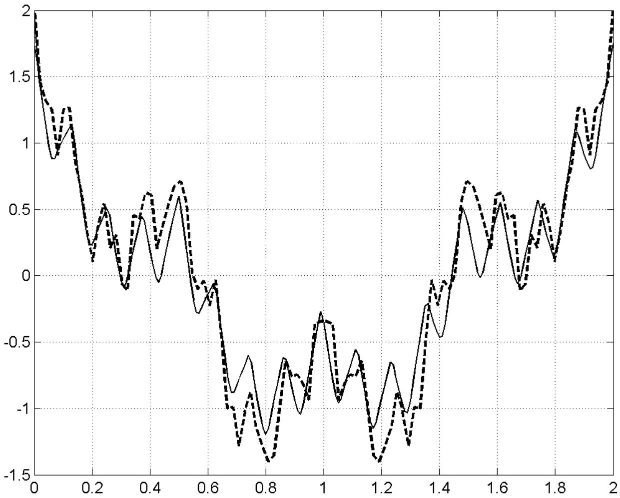

Рис. 2. Интерполяция функции Вейерштрасса (пунктирная линия) кумулятивным фрактальным сплайном масштаба $k = 2$ (сплошная линия)

Список литературы

Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. — М.: Радио и связь, 1985. — 384 с.

Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук. — 1985. — Том 146, вып. 3. — С. 493–506.

Козлова И. А. Приближение функции Больцано многочленами Бернштейна // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Том 13, вып. 1(2). — С. 56–59.

Кравченко В. Ф., Масюк В. М. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. Кн. 3. — М.: ИПРЖР, 2002. — 72 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / пер. с англ. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.

Новікова О. Б. Фрактальний сплайн — модель широкосмугового сигналу // Радіоелектроніка та телекомунікації. — 2012. — № 738. — С. 28–33.

Пащенко Р. Э., Пащенко Э. И. Формирование кодофазоманипулируемых фрактальных сигналов на основе последовательности Морса–Туе // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних сил. — 2010. — № 3(25). — С. 78–82.

Сравнение сплайновой и эрмитовой интерполяции // Справочник по MatLab [Электронный ресурс]. URL: http://radiomaster.ru/cad/matlab/glava17/index37.php (дата обращения: 20.05.2013).

Шелевицький І. В. Сплайн-методи і засоби аналізу і синтезу цифрових сигналів: Дис. докт. техн. наук / Київ: Національний авіаційний університет, 2005.

Goldman R. The marriage of fractals and splines: fractals with control points, splines as attractors. [Электронный ресурс]. — 2009. — URL: http://www.youtube.com/watch?v=jEjZl2nqcAU (дата обращения: 20.05.2013).

Szeliski R., Terzopoulos D. From splines to fractals // ACM Siggraph Computer Graphics. — 1989. — Vol. 23, no. 3. — P. 51–60.