КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 4 С. 573–582

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.8

Об эффективности методов максимального сечения в теории переноса излучения

И. В. Прохоров[a], А. С. Жуплев[b]

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7
Дальневосточный федеральный университет,
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, д. 8

E-mail: [a] prh@iam.dvo.ru, [b] zhuplev@gmail.com

Получено 12 апреля 2013 г.,
после доработки 27 мая 2013 г.

В работе рассматриваются две модификации метода максимального сечения для решения стационарного уравнения переноса излучения в трехмерной неоднородной среде. Обе модификации основаны на применении метода Монте-Карло к суммированию ряда Неймана для решения уравнения переноса. Одна из них — традиционная, вторая — основана на использовании ветвящихся цепей Маркова. Проводится численное сравнение этих алгоритмов.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, алгоритмы Монте-Карло, метод максимального сечения

On the efficiency of the maximum cross section method in radiation transport theory

I. V. Prokhorov, A. S. Zhuplev

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, 7 Radio St., Vladivostok, 690041, Russia
Far Eastern Federal University, 8 Sukhanova St., Vladivostok, 690950, Russia

Abstract. — We consider two versions of the maximum cross section method for the solutions of the stationary equation of radiative transfer in dimensional inhomogeneous medium. Both are based on the application Monte-Carlo method to the summation of the Neumann series for the solution transport equation. First modification is traditional and second is based on the use of branching Markov chains. We carried out numerical comparison of these algorithms.

Keywords: radiation transfer equation, Monte Carlo algorithms, maximum cross section method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 573–582 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-98521) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», (госконтракты 16.740.11.0456, 14.740.11.1000).

Введение

С бурным развитием вычислительной техники число приложений методов Монте-Карло неуклонно возрастает. Одним из наиболее ярких таких приложений является расчет плотности потока излучения в области трехмерного пространства, заполненного рассеивающим и поглощающим веществом. Эта характеристика излучения удовлетворяет интегродифференциальному уравнению и в общем случае является функцией семи переменных. Несмотря на то, что для стационарного монохроматического процесса излучения количество переменных сокращается до пяти, проблема вычисления решения уравнения или функционалов от него стоит достаточно остро.

Основную часть компьютерного времени при нахождении плотности потока излучения в неоднородной среде методом статистических испытаний занимает моделирование длины свободного пробега частиц. В работе [Coleman, 1968] был предложен метод максимального сечения, позволяющий проводить вычисления с постоянной длинной свободного пробега. Этот способ позволяет не только значительно сократить время расчетов, но и унифицировать процесс построения траекторий по сравнению методом, использующим физическое сечение, что особенно актуально в среде со сложной внутренней структурой. Однако, если значения коэффициента ослабления сильно варьируются, то постоянная мажоранта сильно превышает сечение ослабления в некоторых областях. В результате количество фиктивных столкновений оказывается очень большим, что снижает эффективность метода максимального сечения. В этом случае для повышения производительности метода максимального сечения выгоднее использовать не постоянную, а кусочно-постоянную мажоранту коэффициента ослабления [Михайлов, 1970]. К сожалению, при этом опять возрастает сложность вычисления длины свободного пробега и приходится искать компромиссные решения данной проблемы.

Несмотря на многолетнюю историю, метод максимального сечения продолжает привлекать внимание специалистов как с точки зрения его обоснования, так и с точки зрения его приложений [Ермаков, Жиглявский, 1978; Михайлов, Аверина, 2009; Антюфеев, 2012]. Причем это касается не только теории переноса излучения, но и теории управления, массового обслуживания и др.

Хорошо известно, что одним из универсальных способов уменьшения дисперсии в задачах суммирования рядов Неймана является использование ветвящихся марковских цепей [Ермаков, 2009]. В настоящее время такой подход активно применяется в различных задачах вычислительной математики и математической физики [Медведев, Михайлов, 2009; Бреднихин, Медведев, Михайлов, 2010; Прохоров, Яровенко, 2005; Kovtanyuk, Prokhorov, 2011; Прохоров, 2013]. В данной работе для решения стационарного уравнения переноса излучения предлагается модификация метода максимального сечения с ветвлением траекторий в точках, где требуется определить тип рассеяния частицы. Проводится численное сравнение трудоемкости традиционного и модифицированного методов максимального сечения.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное монохроматическое уравнение переноса излучения следующего вида [Марчук, Михайлов, Назаралиев и др., 1976; Гермогенова, 1986; Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000]:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \mu(r) f(r,\omega) = \mu_s(r) \int\limits_{\Omega} P(r,\omega\cdot\omega') f(r,\omega') d\omega' + J(r,\omega), \tag{1}$$

где $r = (r_1, r_2, r_3) \in G$, G — выпуклая ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$, $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, Ω — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. В уравнении (1) функция $f(r,\omega)$ интерпретируется как плотность потока частиц в точке r в направлении ω, функция $J(r,\omega)$ описывает распределение внутренних источников излучения в среде, $\mu(r)$, $\mu_s(r)$ — называются коэффициентами полного ослабления и рассеяния, а $P(r,\omega\cdot\omega')$ — индикатрисой рассеяния.

Для характеристики неоднородности среды G, в которой изучается процесс переноса излучения, обычно вводится в рассмотрение некоторое разбиение G_0 области G [Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000]. Множество G_0 является объединением конечного числа областей

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^{p} G_i, \quad G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

таких, что $\overline{G}_0 = \overline{G}$, где через $\overline{G}_0$ и $\overline{G}$ обозначены соответствующие замыкания областей G_0 и G. Области G_i можно интерпретировать как некоторые части неоднородной среды G, заполненные i-м веществом. Относительно геометрии множества G_0 традиционно предполагается выполнения свойства обобщенной выпуклости [Гермогенова, 1986; Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000]. Согласно этому свойству любой луч $L_{r,\omega} = \{r + t\omega, t \geq 0\}$, исходящий из точки $r \in G_0$ в направлением $\omega \in \Omega$ пересекает ∂G_0 в конечном числе точек.

Обозначим через $C_b(X)$, $X \in \mathbb{R}^m$ банахово пространство функций, определенных на $\overline{X}$, ограниченных и непрерывных на X, с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. Относительно коэффициентов уравнения (1) будем предполагать следующее. Все функции μ, μ_s, J, P, — неотрицательные, $\mu(r), \mu_s(r) \in C_b(G_0)$, причем $\mu(r) \geq \mu_s(r)$, $J(r,\omega) \in C_b(G_0\times\Omega)$, а функция $P(r,\omega\cdot\omega') \in C_b(G_0\times[-1,1])$ и удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{\Omega} P(r,\omega\cdot\omega')d\omega' = 1.$$

Обозначим

$$\Gamma^{\pm} = \{(z,\omega) \in \partial G \times \Omega : \quad L_{z,\mp\omega} \cap G_0 \neq \emptyset\}$$

и присоединим к уравнению (1) граничное условие

$$f(\xi,\omega) = h(\xi,\omega), \quad (\xi,\omega) \in \Gamma^{-}. \tag{2}$$

Неотрицательная функция $h(\xi,\omega) \in C_b(\Gamma^{-})$ описывает входящий в среду G поток излучения.

Пусть $d(r,\omega)$ — расстояние от точки $r \in \overline{G}$ до границы $\partial G = \overline{G} \setminus G$ в направлении ω. Согласно [Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000], функция $d(r,\omega) \in C_b(G\times\Omega)$.

К пространству $D(G_0\times\Omega)$ будем относить функции $f(r,\omega)$ из $C_b(G_0\times\Omega)$ такие, что $\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega)$ принадлежат пространству $C_b(G_0\times\Omega)$, и для любых точек $(r,\omega) \in G_0\times\Omega$ функция $f(r+t\omega,\omega)$ абсолютно непрерывна по переменной $t \in [-d(r,-\omega), d(r,\omega)]$.

Определим операторы $L : D(G_0\times\Omega) \to C_b(G_0\times\Omega)$ и $S : C_b(G_0\times\Omega) \to C_b(G_0\times\Omega)$ следующими выражениями

$$(Lf)(r,\omega) = \omega\cdot\nabla_r f(r,\omega) + \mu(r)f(r,\omega), \tag{3}$$

$$(Sf)(r,\omega) = \mu_s(r)\int\limits_{\Omega} P(r,\omega\cdot\omega')f(r,\omega')d\omega'. \tag{4}$$

Под решением прямой задачи (1), (2) будем понимать функцию $f(r,\omega) \in D(G_0\times\Omega)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$(Lf)(r,\omega) = (Sf)(r,\omega) + J(r,\omega), \quad (r,\omega) \in G_0\times\Omega,$$

$$f(\xi,\omega) = h(\xi,\omega), \quad (\xi,\omega) \in \Gamma^{-}.$$

Ряды Неймана для нахождения решения краевой задачи

Так как $\mu \in C_b(G_0)$, то функции

$$\tau(r,\omega) = \int_0^{d(r,-\omega)} \mu(r - t\omega)dt, \quad \tau(r,\omega,t) = \int_0^t \mu(r - t'\omega)dt',$$

называемые иногда оптическими расстояниями, принадлежат пространству $C_b(G_0 \times \Omega)$ и $C_b(G_0 \times \Omega \times [0, d(r,-\omega])$ соответственно [Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000].

Решение задачи (1), (2) эквивалентно решению следующего уравнения [Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000]:

$$f = f_0 + ASf \tag{5}$$

в $C_b(G_0 \times \Omega)$, где

$$f_0(r,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega)\exp(-\tau(r,-\omega)) + (AJ)(r,\omega)$$

и оператор $A : C_b(G_0 \times \Omega) \to D(G_0 \times \Omega)$, являющийся правым обратным к оператору L, определен соотношением

$$(A\phi)(r,\omega) = \int_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,t))\phi(r - t\omega,\omega)dt.$$

Поскольку $\mu_s(r) \le \mu(r)$, то решение уравнения (5) может быть найдено в виде ряда Неймана [Гермогенова, 1986; Аниконов, Ковтанюк, Прохоров, 2000]

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} (AS)^m f_0, \tag{6}$$

который равномерно сходится со скоростью q^m в пространстве $C_b(G_0 \times \Omega)$, где

$$\|AS\| \le q = \sup_{(r,\omega)\in G_0\times\Omega} \left(\frac{\mu_s(r)}{\mu(r)} (1 - \exp(-\tau(r,-\omega))) \right).$$

Уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{L}f = \overline{S}f + J, \tag{7}$$

где

$$(\overline{L}f)(r,\omega) = \omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \overline{\mu} f(r,\omega), \quad \overline{\mu} = \sup_{r\in G_0} \mu(r),$$

$$(\overline{S}f)(r,\omega) = \mu_s(r) \int_\Omega P(r,\omega\cdot\omega')f(r,\omega')d\omega' + (\overline{\mu} - \mu(r))f(r,\omega).$$

Учитывая это, помимо представления (6), для решения задачи (1), (2) справедливо следующее представление (см., например, [Kovtanyuk, Prokhorov, 2008]):

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} (\overline{AS})^m \overline{f}_0, \tag{8}$$

где

$$\overline{f}_0(r,\omega) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega)\exp(-\overline{\mu}d(r,-\omega)) + (\overline{A}J)(r,\omega),$$

$$(\overline{A}\phi)(r,\omega) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\overline{\mu}t)\phi(r - t\omega,\omega)dt.$$

Ряд (8) равномерно сходится со скоростью $\overline{q}^m$, где

$$\|\overline{AS}\| \le \overline{q} = \sup_{(r,\omega)\in G_0\times\Omega} \left(\frac{\overline{\mu} - \mu(r) + \mu_s(r)}{\overline{\mu}} \left(1 - e^{-\overline{\mu}d(r,-\omega)}\right) \right).$$

Заметим, что $q \le \overline{q} < 1$, поэтому ряд (8) сходится к f медленнее, нежели ряд (6).

Методы Монте-Карло

В предыдущем параграфе даны два представления решения краевой задачи (1), (2) в виде рядов Неймана, члены которых представляют собой многомерные интегралы. Достаточно естественным подходом, применяемым при решении задач большой размерности, является метод Монте-Карло. Далее мы опишем две модификации вычисления суммы ряда (8), которые соответствуют методу максимально сечения.

Пусть M — число членов усеченного ряда Неймана (8), а N — число моделируемых траекторий, тогда для решения f можно использовать следующую оценку [Coleman, 1968; Марчук, Михайлов, Назаралиев и др., 1976]:

$$f(r,\omega) \approx f_{ms}(r,\omega;N,M) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n(r,\omega;M), \tag{9}$$

$$a_n(r,\omega;M) = \overline{f_0}(r,\omega) + \sum_{m=1}^{M}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\overline{\mu}}\left(1 - \exp(-\overline{\mu}d(r^{n,i-1}, -\omega^{n,i-1}))\right)\times$$
$$\times\left(\overline{\mu} - \mu(r^{n,i}) + \mu_s(r^{n,i})\right)\overline{f_0}(r^{n,j},\omega^{n,j})). \tag{10}$$

В (10) точка $r^{n,i}$ определяется следующим законом:

$$r^{n,i} = r^{n,i-1} - \omega^{n,i-1}t_{n,i}, \quad r^{n,0} = r, \quad \omega^{n,0} = \omega, \tag{11}$$

где $t_{n,i}$ — независимая реализация случайной величины, распределенной на отрезке $[0, d(r^{n,i-1}, -\omega^{n,i-1})]$ с плотностью

$$\frac{\overline{\mu}\exp(-\overline{\mu}t)}{1 - \exp(-\overline{\mu}d(r^{n,i-1}, -\omega^{n,i-1}))}. \tag{12}$$

Для определения вектора $\omega^{n,i}$ используем следующие расчетные формулы. Пусть $\alpha_{n,i}$ — реализация равномерно распределенной на $[0,1]$ случайной величины α. Тогда, при

$$\alpha_{n,i} \ge \frac{\overline{\mu} - \mu(r^{n,i})}{\overline{\mu} - \mu(r^{n,i}) + \mu_s(r^{n,i})}, \tag{13}$$

$$\omega^{n,i} = Q^{n,i-1}\nu^{n,i}, \tag{14}$$

где

$$\nu^{n,i} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{n,i})\sqrt{1-\nu_{n,i}^2} \\ \sin(\varphi_{n,i})\sqrt{1-\nu_{n,i}^2} \\ \nu_{n,i} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$
Q^{n,i-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_1^{n,i-1}\omega_3^{n,i-1}}{\sqrt{1-\omega_3^{n,i-1}}} & -\dfrac{\omega_2^{n,i-1}}{\sqrt{1-\omega_3^{n,i-1}}} & \omega_1^{n,i-1} \\ \dfrac{\omega_2^{n,i-1}\omega_3^{n,i-1}}{\sqrt{1-\omega_3^{n,i-1}}} & \dfrac{\omega_1^{n,i-1}}{\sqrt{1-\omega_3^{n,i-1}}} & \omega_2^{n,i-1} \\ -\sqrt{1-\omega_3^{n,i-1}} & 0 & \omega_3^{n,i-1} \end{pmatrix}, & \omega_3^{n,i-1} \neq 1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \omega_3^{n,i-1} = 1, \end{cases} \tag{16}
$$

а при

$$
\alpha_{n,i} < \frac{\overline{\mu} - \mu(r^{n,i})}{\overline{\mu} - \mu(r^{n,i}) + \mu_s(r^{n,i})}, \tag{17}
$$

$$
\omega^{n,i} = \omega^{n,i-1}. \tag{18}
$$

В соотношении (15) угол $\varphi_{n,i}$ есть реализация равномерно распределенной на промежутке $[0, 2\pi)$ случайной величины, а $\nu_{n,i}$ реализация случайной величины распределенной плотностью вероятности $P(r, \nu)$, $\nu \in [-1, 1]$. При определении матрицы $Q^{n,i-1}$ в (16) величины $\omega_1^{n,i-1}, \omega_2^{n,i-1}, \omega_3^{n,i-1}$ обозначают соответствующие компоненты вектора $\omega^{n,i-1}$.

В данной работе предлагается модификация алгоритма максимального сечения, основанная на использовании ветвящихся марковских цепей. Эта схема соответствует решению интегрального уравнения методом последовательных приближений и выглядит следующим образом:

$$
f(r, \omega) \approx f_{msb}(r, \omega; N, M), \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned} f_{msb}(r, \omega; N, m) = \frac{1}{\overline{\mu}}\left(1 - \exp(-\overline{\mu} d(r, -\omega))\right) \times \\ \times \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\mu_s(r^n) f_{msb}(r^n, \widetilde{\omega}^n; N, m-1) + (\overline{\mu} - \mu(r^n)) f_{msb}(r^n, \omega^n; N, m-1)\right], \end{aligned} \tag{20}
$$

где $m = 1, \ldots, M$ и $f_{msb}(r, \omega; N, 0) = \overline{f}_0(r, \omega)$. В (19) точки r^n определяются следующей формулой

$$
r^n = r - \omega t_n, \tag{21}
$$

где t_n — реализация случайной величины, распределенной на отрезке $[0, d(r, -\omega)]$ с плотностью

$$
\frac{\overline{\mu}\exp(-\overline{\mu} t)}{1 - \exp(-\overline{\mu} d(r, -\omega))}. \tag{22}
$$

Единичные векторы $\widetilde{\omega}^n$ в (20) находятся по формуле $\widetilde{\omega}^n = Q^n \nu^n$, где вектор ν^n и матрица поворота Q^n определяются равенствами аналогичными (15) и (16) с той лишь разницей, что величины $\varphi^{n,i-1}, \nu^{n,i-1}, \omega_1^{n,i-1}, \omega_2^{n,i-1}, \omega_3^{n,i-1}$ заменены на $\varphi^n, \nu^n, \omega_1^n, \omega_2^n, \omega_3^n$ соответственно.

Программная реализация рекуррентных соотношений (20) осуществляется с помощью использования рекурсивных процедур. С одной стороны, эта особенность алгоритма предъявляет дополнительные требования к объему оперативной памяти компьютера и времени выполнения программы, а с другой — уменьшает дисперсию оценки для суммы ряда Неймана, поскольку позволяет не производить случайный розыгрыш событий «истинного физического» рассеяния, заданного индикатрисой рассеяния P, и «фиктивного» рассеяния вперед.

Численные эксперименты

Оценка работоспособности и точности работы алгоритмов производилась на ряде численных экспериментов. Во всех экспериментах область G представляет собой шар единичного радиуса с центром в начале координат и решение уравнения переноса $f(r, \omega)$ находится в точке $r = (1, 0, 0)$, $\omega = (1, 0, 0)$. Разбиение G_0 области G состоит из объединения конечного числа шаров (включений) $G_i = \{r : |r - r^i| < R_i\}, i = 2, ..., p$ и множества $G_1 = G \setminus \bigcup_{i=2}^{p} \overline{G}_i$. Коэффициенты μ, μ_s внутри зон G_i, $i = 1, ..., p$ постоянны и равны μ_i, $\mu_{s,i}$ соответственно.

С целью анализа качества работы алгоритмов количество членов ряда Неймана M и число траекторий N в экспериментах варьируется. Тестирование проводилось на персональном компьютере с процессором Intel Core i7 (3.40 GHz) и 8 гигабайтами оперативной памяти. В каждом эксперименте находились относительная погрешность, дисперсия оценки и время (в микросекундах), затраченное на выполнение алгоритмов.

Опуская зависимость от переменных $(r, \omega; N, M)$, через f_{ms}, f_{msb} будем обозначать статистические оценки для суммы f ряда Неймана (8), определяемые формулами (9), (10) и (19), (20) соответственно. Напомним, что f_{ms} и f_{msb} это аппроксимации для f, полученные методами максимального сечения без ветвления и с ветвлением. Через f_s обозначим оценку для f, получаемую применением весового метода Монте-Карло к вычислению ряда (6), учитывающего рассеяние в среде и вылет из нее, причем розыгрыш свободного пробега осуществляется с плотностью вероятности, отвечающей кусочно-постоянному сечению $\mu(r)$ [Марчук, Михайлов, Назаралиев и др., 1976].

Через $\varepsilon_{ms}, Df_{ms}, s(f_{ms})$, $\varepsilon_{msb}, Df_{msb}, s(f_{msb})$ и $\varepsilon_s, Df_s, s(f_s)$ обозначим относительную погрешность приближенного решения, дисперсию оценки и трудоемкость соответствующего метода Монте-Карло. Согласно [Соболь, 1973], произведение дисперсии $D\zeta$ случайной величины ζ на среднее время t расчета одного выборочного значения ζ, называется трудоемкостью и является критерием качества алгоритма.

Сравнение алгоритмов проводилось на двух аналитических примерах, которые соответствуют двум типам рассеяния в среде: изотропному и «дельта-рассеянию» вперед. В первом случае решение f и функции J, h, описывающие внутренние и внешние источники, имеют вид

$$f(r, \omega) = \frac{\overline{\mu} + 1}{\underline{\mu_a}} - \omega \cdot r, \quad \text{где} \quad \underline{\mu_a} = \inf_{r \in G}(\mu(r) - \mu_s(r)), \tag{23}$$

$$J(r, \omega) = \mu_a(r)\frac{\overline{\mu} + 1}{\underline{\mu_a}}, -1 - \mu(r)(\omega \cdot r),$$

$$h(r, \omega) = \frac{\overline{\mu} + 1}{\underline{\mu_a}} - \omega \cdot r, \quad |r| = 1, \quad \omega \cdot r < 0,$$

во втором случае

$$f(r, \omega) = 10 \exp\left(- \int_0^{d(r, -\omega)} \mu_a(r - \omega t) dt \right), \tag{24}$$

$J = 0$ и $h = 10$.

В экспериментах 1 и 2 использовалось решение (23) с разным количеством включений $G_2, ..., G_p$. В первом эксперименте количество включений равно 1 ($p = 2$), а во втором — 10 ($p = 11$). В качестве областей $G_2, ..., G_p$ брались шары радиуса 0.1 с центрами в точках $r^2 = (0.9, 0.0, 0.0)$, $r^3 = (0.7, 0.2, 0.0)$, $r^4 = (0.7, -0.2, 0.0)$, $r^5 = (0.7, 0.2, 0.2)$, $r^6 = (0.7, -0.2, 0.2)$, $r^7 = (0.7, 0.2, -0.2)$, $r^8 = (0.7, -0.2, -0.2)$, $r^9 = (0.4, 0.2, 0.0)$, $r^{10} = (0.4, -0.2, 0.0)$, $r^{11} = (0.0, 0.0, 0.0)$

соответственно. Для всех включений G_i, $i = 2, ..., p$ полагалось, что $\mu_i = 2$, $\mu_{s,i} = 1$, а в основной среде G_1 коэффициенты ослабления и рассеяния равны 4 и 2.

Таблица 1. Результаты расчетов эксперимента 1 (изотропное рассеяние, 1 включение)

M	ε_{ms}, %	Df_{ms}	$s(f_{ms})$	ε_{msb}, %	Df_{msb}	$s(f_{msb})$	ε_s, %	Df_s	$s(f_s)$
6	1.5341	0.2215	1.4236	1.5244	0.1290	1.6417	0.9144	0.1763	2.0215
7	0.6606	0.2041	1.5410	0.6691	0.1200	1.8456	0.3885	0.1748	2.2148
8	0.2897	0.1972	1.7076	0.2836	0.1172	2.1718	0.1725	0.1752	2.5287
9	0.1046	0.1949	1.9218	0.1359	0.1159	2.4992	0.0750	0.1757	2.8452
10	0.0583	0.1932	2.1094	0.0480	0.1154	2.8758	0.0193	0.1746	3.1843

Таблица 2. Результаты расчетов эксперимента 2 (изотропное рассеяние, 10 включений)

M	ε_{ms}, %	Df_{ms}	$s(f_{ms})$	ε_{msb}, %	Df_{msb}	$s(f_{msb})$	ε_s, %	Df_s	$s(f_s)$
6	1.7887	0.2291	1.7334	1.8046	0.1318	2.1432	0.8682	0.1787	4.7016
7	0.7954	0.2081	1.8437	0.8074	0.1209	2.4932	0.3864	0.1774	5.4282
8	0.3789	0.1991	2.0316	0.3636	0.1173	2.9804	0.1488	0.1774	6.3591
9	0.1749	0.1957	2.2987	0.1677	0.1161	3.6211	0.0727	0.1778	7.1331
10	0.0706	0.1943	2.5253	0.0829	0.1154	4.2086	0.0259	0.1778	7.7548

Таблица 3. Результаты расчетов эксперимента 3 («дельта-рассеяние», 1 включение)

M	ε_{ms}, %	Df_{ms}	$s(f_{ms})$	ε_{msb}, %	Df_{msb}	$s(f_{msb})$	ε_s,%	Df_s	$s(f_s)$
6	24.5556	0.0921	0.5920	24.8051	0.0774	0.9580	18.4883	0.0986	1.1102
7	13.3916	0.0917	0.6892	13.1795	0.0765	1.1367	8.9943	0.0986	1.2921
8	6.4334	0.0897	0.7763	6.3160	0.0752	1.3087	3.9130	0.0961	1.4302
9	2.7229	0.0891	0.8670	2.8436	0.0732	1.4539	1.5288	0.0955	1.5971
10	1.1543	0.0876	0.9511	1.2428	0.0715	1.6054	0.4606	0.0945	1.7515

Таблица 4. Результаты расчетов эксперимента 4 («дельта-рассеяние», 10 включений)

M	ε_{ms}, %	Df_{ms}	$s(f_{ms})$	ε_{msb}, %	Df_{msb}	$s(f_{msb})$	ε_s, %	Df_s	$s(f_s)$
6	27.9675	0.1162	0.7666	27.8214	0.0938	1.4922	15.6120	0.1269	3.3917
7	15.6262	0.1170	0.9050	15.4742	0.0917	1.8853	7.2622	0.1253	3.8908
8	7.8270	0.1145	1.0232	7.6416	0.0895	2.3164	3.1934	0.1227	4.3412
9	3.6242	0.1121	1.1365	3.6351	0.0867	2.7476	0.9522	0.1226	4.8724
10	1.4921	0.1105	1.2513	1.6550	0.0850	3.1980	0.4075	0.1208	5.3252

Тесты 3 и 4 соответствуют решению вида (24) для одного и десяти включений соответственно. Характеристики среды совпадают с аналогичными характеристиками экспериментов 1 и 2.

Во всех четырех экспериментах количество траекторий было одинаковым ($N = 10^6$). Результаты расчетов при различном числе членов усеченного ряда Неймана ($M = 6, 7, 8, 9, 10$) приведены в таблицах 1–4.

Анализ таблиц 1–4 показывает, что как для изотропного рассеяния в среде, так и для рассеяния строго вперед результаты качественно схожи. Методы максимального сечения при

Таблица 5. Результаты расчетов эксперимента 5 (изотропное рассеяние, 1 включение)

M	ε_{ms}, %	Df_{ms}	$s(f_{ms})$	ε_{msb}, %	Df_{msb}	$s(f_{msb})$	ε_s, %	Df_s	$s(f_s)$
6	5.8764	0.4733	2.5404	5.8644	0.2147	7.5906	0.8158	0.2434	2.7035
7	3.0881	0.3460	2.2079	3.0993	0.1484	8.2575	0.3589	0.2450	3.2379
8	1.6029	0.2872	2.1504	1.5958	0.1243	10.5012	0.1623	0.2452	3.6229
9	0.8118	0.2606	2.2073	0.8222	0.1155	14.2421	0.0707	0.2458	4.0718
10	0.4282	0.2468	2.3485	0.3926	0.1117	19.9924	0.0353	0.2461	4.5230

одинаковом количестве членов ряда Неймана уступают в точности. Это обусловлено более медленной сходимостью ряда Неймана (8) по сравнению со сходимостью ряда (6). В рассмотренных экспериментах для параметров $q, \overline{q}$, определяющих скорость сходимости рядов (6),(8), имеем следующие оценки $q < 1/2$, $\overline{q} < 3/4$. Это общая и хорошо известная проблема методов максимального сечения [Марчук, Михайлов, Назаралиев и др., 1976; Антюфеев, 2012]. Если вариация функции $\mu(r)$ в области G уменьшается, то степень остроты этой проблемы снижается.

При одном и том же M методы максимального сечения по трудоемкости, в целом, более экономичны. Это особенно проявляется в ситуации, когда структура неоднородной среды усложняется и количество включений увеличивается (табл. 2,4). Метод максимального сечения с ветвлением, как и ожидалось, обладает наименьшей дисперсией. Тем не менее, это незначительно сказывается на уменьшении трудоемкости метода по сравнению с традиционным методом максимального сечения. При увеличении числа членов ряда Неймана и меры областей в которых $\mu(r) < \overline{\mu}$, количество ветвлений увеличивается, что незамедлительно сказывается на трудоемкости метода использующего рекурсию. Это утверждение более отчетливо продемонстрировано в эксперименте 5, в котором характеристики среды совпадали с соответствующими характеристиками эксперимента 1, но размер неоднородности G_2 был увеличен. Включение G_2 — шар радиуса 0.4 (а не 0.1) с центром в точке $(0.55, 0.0, 0.0)$. В таблице 5 приведены результаты расчетов, которые показывают, что трудоемкость алгоритма с ветвлением при $M = 10$ становится почти на порядок больше, чем в методе максимального включения без ветвления.

Заключение

В работе проведен сравнительный численный анализ двух модификаций метода максимального сечения применительно к решению стационарного уравнения переноса излучения в неоднородной среде. Основной вывод следующий: метод максимального сечения с ветвлением имеет большую трудоемкость, нежели алгоритм максимального сечения без ветвления. Это связано с тем, что время затрачиваемое на выполнение алгоритма максимального сечения с ветвлением значительно превосходит время выполнения традиционного метода максимального сечения, а различия в дисперсии оценок не велики. Этот вывод находится в согласии с результатами работ [Медведев, Михайлов, 2009; Бреднихин, Медведев, Михайлов, 2010], где исследовались методы Монте-Карло с ветвлением применительно к моделированию переноса частиц в однородных средах с размножением. В частности, в [Медведев, Михайлов, 2009], было замечено, что если дисперсия оценки конечна, то преимущество метода с ветвлением снижается. Касательно эффективного применения методов, использующих ветвление траекторий, в задачах переноса излучения в рассеивающих средах с френелевским отражением на границах [Прохоров, Яровенко, 2005; Kovtanyuk, Prokhorov, 2011], стоит отметить следующее. Так как при расчете не рассеянной компоненты решения уравнения в методе с ветвлением осуществляется построение детерминированного дерева траекторий, то статистическая оценка для нерассеянной компоненты обладает нулевой дисперсией, чего нельзя сказать о методе, где проводится розыгрыш актов зеркального отражения и преломления по закону Снеллиуса. Поэтому для сред с преобладанием не рассеянного излучения мы также имеем качественные отличия для дисперсии в алгоритмах с ветвлением и без него.

Список литературы

Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В. Использование уравнения переноса в томографии. — М.: Логос, 2000.

Антюфеев В. С. К обоснованию модификации метода максимального сечения // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17, № 2. — С. 13–19.

Бреднихин С. А., Медведев И. Н., Михайлов Г. А. Оценка параметров критичности ветвящихся процессов методом Монте-Карло // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 362–374.

Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. — М.: Наука, 1986.

Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Обобщение «метода максимального сечения» для моделирования распределений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. — Т. 18, № 3. — С. 757–761.

Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике. — Санкт-Петербург: Бином. Лаборатория знаний, 2009.

Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976.

Медведев И. Н., Михайлов Г. А. Исследование весовых алгоритмов метода Монте-Карло с ветвлением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 3. — С. 441–452.

Михайлов Г. А. Метод моделирования длины свободного пробега частицы // Атомная энергия. — 1970. — Т. 28, № 2. — С. 175–180.

Михайлов Г. А., Аверина Т. А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.

Прохоров И. В., Яровенко И. П. Численное решение дифракционных задач для уравнения переноса излучения // Сибирские электронные математические известия. — 2005. — Т. 2. — С. 88–101.

Прохоров И. В. Задача Коши для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 5. — С. 753–766.

Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973.

Coleman W. A. Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique to radiation transport problems // Nucl. Sci. Eng. — 1968. — Vol. 32, no. 1. — P. 76–81.

Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V. A boundary-value problem for the polarized-radiation transfer equation with Fresnel interface conditions for a layered medium // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 235, no. 8. — P. 2006–2014.

Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V. Numerical solution of the inverse problem for the polarized-radiation transfer equation // Numerical Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 1, no. 1. —- P. 46–57.