

УДК: 519.216, 51-76

Анализ стохастически возмущенных равновесий и индуцированных шумом переходов в нелинейных дискретных системах

И. А. Башкирцева

Уральский федеральный университет,
Россия, 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51

E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru

*Получено 5 марта 2013 г.,
после доработки 18 августа 2013 г.*

В работе рассматриваются дискретные динамические системы, находящиеся под действием случайных возмущений. Динамика отклонений стохастических решений от детерминированных равновесий исследуется с помощью систем первого приближения. Получены необходимые и достаточные условия, при которых уравнения для первых двух моментов этих отклонений имеют устойчивые стационарные решения. Стационарные вторые моменты используются для оценки разброса случайных состояний вокруг устойчивых равновесий нелинейных систем, а также для анализа индуцированных шумом переходов между бассейнами притяжения этих равновесий. Конструктивность предлагаемого подхода демонстрируется на примере анализа различных стохастических режимов для модели популяционной динамики Рикера с эффектом Олли.

Ключевые слова: нелинейные дискретные системы, стохастические возмущения, индуцированные шумом переходы, модель Рикера

Analysis of stochastically forced equilibria and noise-induced transitions in nonlinear discrete systems

I. A. Bashkirtseva

Ural Federal University, Lenina av. 51, Ekaterinburg, 620083, Russia

Abstract. — Stochastically forced discrete dynamical systems are considered. Using first approximation systems, we study dynamics of deviations of stochastic solutions from deterministic equilibria. Necessary and sufficient conditions of the existence of stable stationary solutions of equations for mean-square deviations are derived. Stationary values of these mean-square deviations are used for the estimations of the dispersion of random states nearby stable equilibria and analysis of noise-induced transitions. Constructive application of the suggested technique to the analysis of various stochastic regimes in Ricker population model with Allee effect is demonstrated.

Keywords: nonlinear discrete systems, random disturbances, noise-induced transitions, Ricker model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 559–571 (Russian).

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 13-08-00069).

1. Введение

Разработка конструктивных методов анализа нелинейных динамических систем со случайными возмущениями является одной из актуальных задач современного математического моделирования. Даже малые случайные воздействия могут приводить к существенным изменениям в динамике системы [Moss, McClintock, 2007]. Как правило, в детерминированных системах анализ динамики сводится к отысканию аттракторов и исследованию поведения решений в их бассейнах притяжения. Решения же стохастических систем могут, пересекая сепаратрисы, переходить из одного бассейна притяжения в другой и порождать более сложные режимы динамики, не имеющие аналогов в детерминированном случае. В настоящее время, индуцированные шумами переходы в мультистабильных системах и стохастические бифуркации обнаружены в системах разной природы и являются объектом интенсивных исследований [Horsthemke, Lefever, 1984; Landa, McClintock, 2000; Gassmann, 1997; Анищенко и др., 2003; Kraut, Feudel, 2002; Lai, Tel, 2011].

В дискретных динамических системах со случайными возмущениями наблюдается широкий спектр нелинейных стохастических явлений как в зонах порядка, так и хаоса [Crutchfield et al, 1981; Неймарк, Ланда, 1987; Кузнецов, Капустина, 2000]. Под действием шума, случайные траектории системы покидают детерминированный аттрактор и формируют стохастический аттрактор с устойчивым стационарным вероятностным распределением. Это распределение дает полное вероятностное описание установившихся стохастических режимов и является решением стационарного уравнения Перрона–Фробениуса [Аникин, Голубенцев, 2007]. Аналитическое решение этого функционального уравнения даже для одномерных систем возможно лишь в весьма частных случаях. В этих обстоятельствах для описания стохастических аттракторов широко используется метод прямого численного моделирования. Этот метод требует больших вычислительных ресурсов, поэтому получение асимптотик и аппроксимаций является весьма актуальным направлением исследований. В работах [Bashkirtseva et al, 2010; Башкирцева и др., 2012] для аппроксимации стохастических аттракторов дискретных систем был развит подход, использующий технику функций стохастической чувствительности. Данная работа посвящена развитию этого подхода для построения более точных аппроксимаций дисперсий случайных состояний в системах с параметрическими шумами.

В разделе 2 данной статьи для аппроксимации стохастических аттракторов вблизи устойчивых равновесий используются стохастические системы первого приближения. При этом основными вероятностными характеристиками здесь являются первые два момента решений этих линейных систем. В работе получена система, задающая динамику этих моментов, и вопрос о существовании и устойчивости ее стационарного решения сведен в общем n -мерном случае к проверке некоторого спектрального критерия. Для одномерных систем получены явные параметрические формулы для дисперсии случайных состояний и границ доверительных интервалов.

В настоящее время теоретические разработки в нелинейной динамике находят новые интересные приложения к анализу математических моделей живых систем [Ризниченко, 2011]. Возможности практического использования теоретических результатов раздела 2 демонстрируются в разделе 3 на примере анализа стохастически возмущенных равновесий и индуцированных шумом переходов в популяционной модели Рикера с эффектом Олли.

2. Система первого приближения и ее моменты

Исходной математической моделью является нелинейная детерминированная система с дискретным временем

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор, $f(x)$ — достаточно гладкая вектор-функция, $t = 0, 1, 2, \dots$. Предполагается, что система (1) имеет экспоненциально устойчивое равновесие \bar{x} . Наряду с системой (1) рассмотрим стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x_t) \xi_t^i, \tag{2}$$

где $\sigma_i(x)$ — вектор-функции, ξ_t^i — некоррелированные скалярные случайные величины с параметрами $E \xi_t^i = 0$, $E(\xi_t^i)^2 = 1$, $t = 0, 1, \dots$. Функции $\sigma_i(x)$ характеризуют зависимость интенсивности случайных воздействий от состояния системы.

Под воздействием случайных возмущений стохастические решения системы (2) покидают детерминированное равновесие и формируют некоторое вероятностное распределение. В случае, когда вероятностное распределение состояний системы (2) стабилизируется, говорят, что система имеет стохастический аттрактор. Плотность распределений состояний в стохастическом аттракторе, вообще говоря, зависит от поведения функций $f(x)$ и $\sigma_i(x)$ во всем фазовом пространстве и задается сложным функциональным уравнением, решение которого связано с серьезными техническими трудностями даже в одномерном случае. При малых шумах, когда состояния в стохастическом аттракторе концентрируются вблизи исходного устойчивого равновесия, основные параметры вероятностного распределения могут быть найдены по локальным характеристикам системы (2) вблизи равновесия \bar{x} .

Для отклонений $z = x - \bar{x}$ случайных состояний x системы (2) от положения равновесия \bar{x} запишем систему первого приближения

$$z_{t+1} = Fz_t + \sum_{i=1}^k (S_{0,i} + S_{1,i}z_t) \xi_t^i, \tag{3}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S_{0,i} = \sigma_i(\bar{x}), \quad S_{1,i} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}).$$

Динамика первых $m_t = Ez_t$ и вторых $M_t = Ez_t z_t^T$ моментов системы (3) определяется уравнениями

$$m_{t+1} = Fm_t, \tag{4}$$

$$M_{t+1} = FM_tF^T + \sum_{i=1}^k (S_{0,i}S_{0,i}^T + S_{0,i}m_t^T S_{1,i}^T + S_{1,i}m_t S_{0,i}^T + S_{1,i}M_t S_{1,i}^T). \tag{5}$$

Будем использовать систему (4), (5) для аппроксимации устойчивого стационарного распределения стохастического аттрактора нелинейной системы (2) вблизи равновесия \bar{x} . Здесь возникает вопрос существования устойчивого стационарного решения (\bar{m}, \bar{M}) системы (4), (5). Для подсистемы (4), благодаря экспоненциальной устойчивости \bar{x} , $\rho(F) < 1$ ($\rho(F)$ — спектральный радиус матрицы F), и, следовательно, единственным стационарным и устойчивым решением является вектор $\bar{m} = 0$. Подставляя это решение $\bar{m} = 0$ в (5), получаем уравнение

$$M_{t+1} = FM_tF^T + \sum_{i=1}^k (S_{0,i}S_{0,i}^T + S_{1,i}M_t S_{1,i}^T). \tag{6}$$

Пусть матрица \bar{M} является стационарным решением уравнения (6):

$$\bar{M} = F\bar{M}F^T + \sum_{i=1}^k (S_{0,i}S_{0,i}^T + S_{1,i}\bar{M} S_{1,i}^T). \tag{7}$$

Вычитая (7) из (6), получим для отклонений $\Delta_t = M_t - \bar{M}$ однородное уравнение

$$\Delta_{t+1} = F\Delta_t F^T + \sum_{i=1}^k S_{1,i}\Delta_t S_{1,i}^T. \quad (8)$$

Это матричное уравнение задает динамику вторых моментов $\Delta_t = E y_t y_t^T$ решений y_t линейного однородного стохастического уравнения

$$y_{t+1} = Fy_t + \sum_{i=1}^k S_{1,i}y_t \xi_t^i. \quad (9)$$

Устойчивость стационарного решения \bar{M} уравнения (6) означает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0$ при любом Δ_0 , что эквивалентно экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $y = 0$ стохастической системы (9). Теория среднеквадратичной устойчивости линейных дискретных систем вида (9) достаточно хорошо разработана [Константинов, Невельсон, 1970; Kubrusly, 1985; Dragan, Moroza, 2006; Пакшин, 1994].

Рассмотрим матрицу $S_0 = \sum_{i=1}^k S_{0,i} S_{0,i}^T$ и операторы

$$\mathcal{F}[M] = FMF^T, \quad \mathcal{A}[M] = M - FMF^T, \quad \mathcal{S}[M] = \sum_{i=1}^k S_{1,i}MS_{1,i}^T, \quad \mathcal{P} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}.$$

Тогда уравнения (6), (7), (8) можно переписать в виде

$$M_{t+1} = \mathcal{F}[M_t] + \mathcal{S}[M_t] + S_0, \quad (10)$$

$$\bar{M} = \mathcal{F}[\bar{M}] + \mathcal{S}[\bar{M}] + S_0, \quad (11)$$

$$\Delta_{t+1} = \mathcal{F}[\Delta_t] + \mathcal{S}[\Delta_t]. \quad (12)$$

Существование оператора $\mathcal{A}^{-1} = (I - \mathcal{F})^{-1}$ следует из условия $\rho(F) < 1$ и соотношения $\rho(\mathcal{F}) = \rho^2(F)$.

Справедлива теорема.

Теорема.

Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Система (10) имеет стационарное экспоненциально устойчивое решение \bar{M} , удовлетворяющее (11);

(б) Решение $\Delta_t \equiv 0$ системы (12) является экспоненциально устойчивым;

(в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (9) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;

(г) $\rho(\mathcal{F} + \mathcal{S}) < 1$;

(д) $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Доказательство.

Эквивалентность (а), (б) и (в) непосредственно следует из предыдущих рассуждений.

Неравенство (г) является стандартным критерием для утверждения (б).

Из (б) непосредственно следует неравенство $\rho(\mathcal{F}) < 1$ утверждения (д). Докажем теперь, что из (а) следует второе неравенство $\rho(\mathcal{P}) < 1$ из (д). Введем обозначения: неравенство $Q > 0$ означает, что матрица Q — положительно определенная.

Рассмотрим \bar{M} – решение (11). Из условия $S_0 > 0$ следует, что $\bar{M} > 0$. Перепишем (11) как

$$\bar{M} - \mathcal{F}[\bar{M}] = \mathcal{S}[\bar{M}] + S_0$$

и, применяя слева оператор \mathcal{A}^{-1} , получим

$$\bar{M} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}[\bar{M}] + \mathcal{A}^{-1}[S_0] = \mathcal{P}[\bar{M}] + \mathcal{A}^{-1}[S_0].$$

Поскольку $\mathcal{A}^{-1}[S_0] = (I - \mathcal{F})^{-1}[S_0] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^n[S_0] > 0$, то

$$\mathcal{P}[\bar{M}] < \bar{M}. \tag{13}$$

Оператор \mathcal{P} , как произведение положительных операторов \mathcal{A}^{-1} и \mathcal{S} , также является положительным. Благодаря нормальности и телесности конуса неотрицательно определенных матриц, из неравенства (13) следует [Красносельский и др., 1985] неравенство $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Докажем, что из (д) следует (г). Пусть $\rho(\mathcal{P}) < 1$. Тогда существует обратный оператор $(I - \mathcal{P})^{-1}$. Легко проверить, что при $S_0 > 0$ матрица $\bar{M} = (I - \mathcal{P})^{-1}\mathcal{A}^{-1}[S_0] > 0$ удовлетворяет соотношению (11) и, как следствие, неравенству $(\mathcal{F} + \mathcal{S})[\bar{M}] < \bar{M}$. Оператор $\mathcal{F} + \mathcal{S}$ положителен, как сумма положительных операторов \mathcal{F} и \mathcal{S} . Из последнего неравенства вытекает [Красносельский и др., 1985] утверждение (г). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае аддитивных шумов, когда функции $\sigma_i(x)$ не зависят от x и, следовательно, оператор \mathcal{S} – нулевой, существование устойчивого стационарного решения уравнения (10) гарантируется условием $\rho(F) < 1$ устойчивости равновесия \bar{x} . Если же интенсивности шумов зависят от состояния $\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}) \neq 0\right)$, то просто устойчивости равновесия уже может оказаться недостаточно. Здесь наряду с $\rho(F) < 1$ требуется выполнения неравенства $\rho(\mathcal{P}) < 1$. При нарушении этого дополнительного условия последовательность вторых моментов, задаваемая системой (10), будет неограниченно возрастать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим случай, когда оператор \mathcal{S} , характеризующий зависимость шумов от состояния системы, имеет простую структуру:

$$\mathcal{S}[V] = \text{tr}(VG) \cdot Q, \tag{14}$$

где G и Q – неотрицательно-определенные $n \times n$ -матрицы. При этом оператор \mathcal{P} действует на матрицу V следующим образом: $\mathcal{P}(V) = \text{tr}(VG) \cdot \mathcal{A}^{-1}[Q]$, а его спектральный радиус имеет простое явное представление:

$$\rho(\mathcal{P}) = \text{tr}(WG), \tag{15}$$

где матрица $W = \mathcal{A}^{-1}[Q]$ является решением уравнения $W = \mathcal{F}[W] + Q$. В данном случае проверка алгебраического критерия $\rho(\mathcal{P}) < 1$ существенно упрощается.

Оператор \mathcal{S} имеет структуру (14), например, в случае, когда шумы, зависящие от состояния, входят лишь в одно уравнение системы (2). Пусть таковым является первое уравнение. В этом случае для оператора \mathcal{S} справедливо представление (14), где матрицы G и Q имеют элементы

$$[G]_{l,j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_l}(\bar{x}) \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_j}(\bar{x}), \quad [Q]_{1,1} = 1, \quad [Q]_{l,j} = 0 \quad (l \neq 1, j \neq 1).$$

В общем случае операторы вида (14) могут быть использованы в качестве мажорант. Действительно, благодаря положительности оператора \mathcal{S} из неравенства $V \leq \text{tr}(V)I$ следует неравенство

$$\mathcal{S}[V] \leq \text{tr}(V)\mathcal{S}[I] = \text{tr}(V) \sum_{i=1}^k S_{1i} S_{1i}^\top.$$

Здесь оператор $\bar{\mathcal{S}}[V] = \text{tr}(V) \sum_{i=1}^k S_{1i} S_{1i}^\top$, играющий роль мажоранты для оператора \mathcal{S} , имеет структуру (14). Далее, для оператора \mathcal{P} строим мажоранту $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{S}}$ и получаем для $\rho(\mathcal{P})$ простую оценку сверху:

$$\rho(\mathcal{P}) \leq \rho(\bar{\mathcal{P}}) = \text{tr}(W),$$

где матрица W является решением уравнения $W = \mathcal{F}[W] + \sum_{i=1}^k S_{1i} S_{1i}^\top$. В итоге неравенство $\text{tr}(W) < 1$ становится простым достаточным условием для утверждений (а), (б), (в), (г) теоремы.

В одномерном случае ($n = 1$) условие $\rho(\mathcal{P}) < 1$ имеет явное параметрическое представление:

$$\rho(\mathcal{P}) = \frac{q_1}{1 - (f'(\bar{x}))^2} < 1$$

и тогда дисперсия

$$M = \frac{q_0}{1 - (f'(\bar{x}))^2 - q_1}, \quad (16)$$

где

$$q_0 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2(\bar{x}), \quad q_1 = \sum_{i=1}^k (\sigma'_i(\bar{x}))^2.$$

Для наглядного геометрического описания разброса случайных состояний используют доверительные области. В случае одномерной гауссовской случайной величины с математическим ожиданием \bar{x} и дисперсией D доверительным интервалом является $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$, где $r = k\sqrt{2D}$, $k = \text{erf}^{-1}(P)$, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, а P — доверительная вероятность.

Для стохастического аттрактора системы (2), локализованного вблизи устойчивого равновесия \bar{x} , из (16) следует параметрическая формула, задающая радиус доверительного интервала

$$r = k \sqrt{\frac{2q_0}{1 - (f'(\bar{x}))^2 - q_1}}.$$

3. Пример

Рассмотрим в качестве исходной дискретную детерминированную систему

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad f(x) = \begin{cases} x^2 e^{a(1-x)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (17)$$

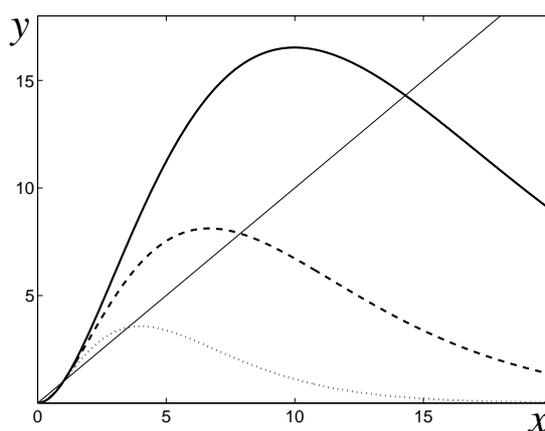


Рис. 1. Графики функции $f(x, a)$ для $a = 0.2$ (сплошная), $a = 0.3$ (пунктир), $a = 0.5$ (точки)

Эта система является модификацией известной дискретной популяционной модели Рикера, учитывающей эффект Олли (Allee effect) [Ризниченко, Рубин, 1993; Elaydi, Sacker, 2010]. Здесь

x_t — численность популяции в момент времени t . В зоне $0 < a < 1$ система имеет три равновесия $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_1 = 1$ и $\bar{x}_2(a) > \bar{x}_1$. Равновесие \bar{x}_0 всегда устойчиво, равновесие \bar{x}_1 всегда неустойчиво, а равновесие $\bar{x}_2(a)$ устойчиво при $0.1788 < a < 1$. При меньших a в системе наблюдается фейгенбаумовский каскад удвоения периода и переход к хаосу. Неустойчивое равновесие \bar{x}_1 разделяет бассейны притяжения устойчивых равновесий \bar{x}_0 и \bar{x}_2 . Если начальное состояние лежит левее \bar{x}_1 , то $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$ — популяция вымирает, а если правее — стабилизируется к \bar{x}_2 . В данном случае \bar{x}_1 играет роль порогового значения Олли эффекта. На рис. 1 приведены графики функции $f(x)$ для разных значений параметра a .

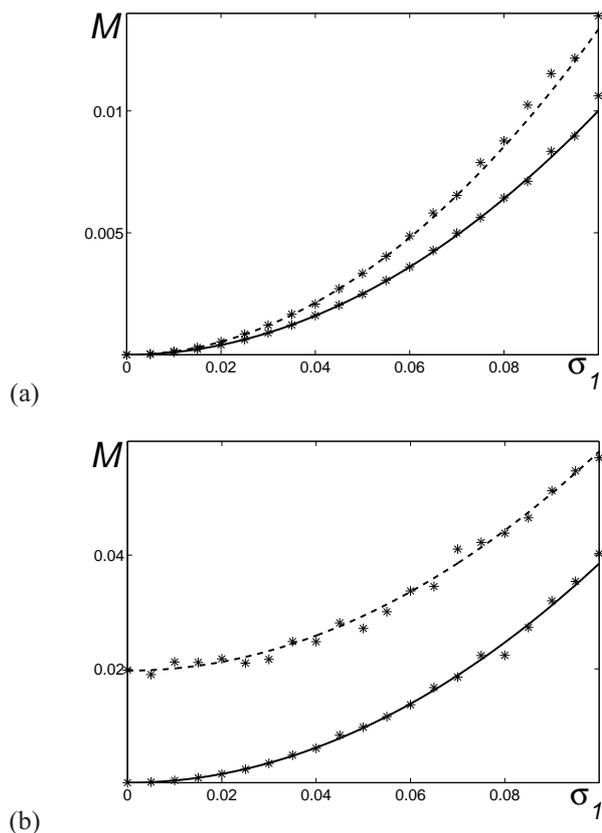


Рис. 2. Дисперсия стохастических состояний при $a = 0.2$: (а) вокруг равновесия \bar{x}_0 для $\sigma_2 = 0$ (сплошная), $\sigma_2 = 0.5$ (пунктир); (б) вокруг равновесия \bar{x}_2 для $\sigma_2 = 0$ (сплошная), $\sigma_2 = 0.005$ (пунктир). Звездочками изображены результаты прямого численного моделирования

Рассмотрим далее соответствующую стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sigma_1 \xi_t^1 + \sigma_2 x_t \xi_t^2, \tag{18}$$

где ξ_t^1, ξ_t^2 — последовательности независимых гауссовских случайных величин с параметрами $E \xi_t^i = 0$, $E(\xi_t^i)^2 = 1$, $i = 1, 2$. Здесь σ_1 — интенсивность аддитивного шума, σ_2 — интенсивность мультипликативного шума.

Под воздействием случайных возмущений стохастические решения системы (18) покидают детерминированные устойчивые равновесия \bar{x}_0 , \bar{x}_2 и формируют вокруг них некоторые вероятностные распределения. Для анализа зависимости дисперсии от интенсивности шумов, будем использовать соотношение (16).

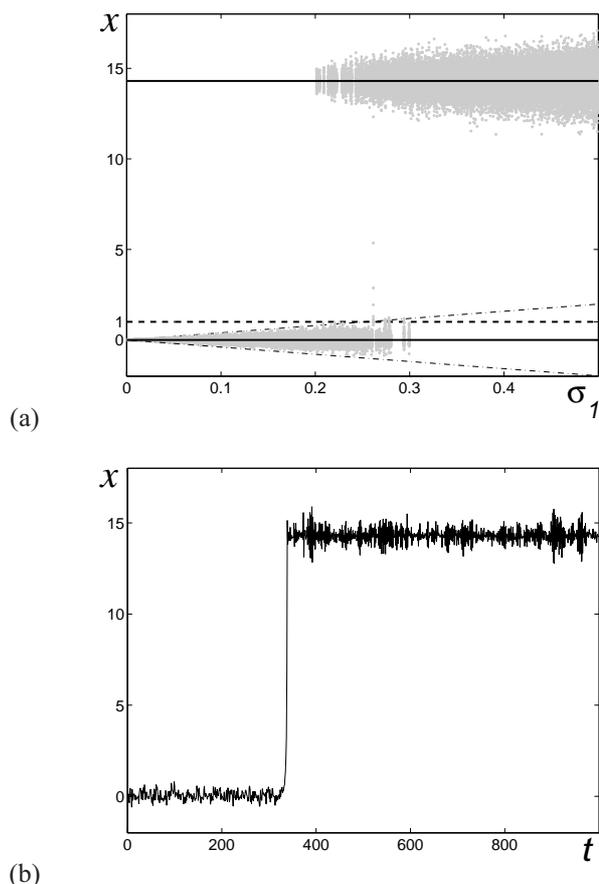


Рис. 3. Индуцированные шумами переходы в системе (18) при $a = 0.2$, $\sigma_2 = 0$, (a) стохастические аттракторы (серые точки), (b) временной ряд при $\sigma_1 = 0.25$

Дисперсия равновесия \bar{x}_0 с учетом $\bar{x}_0 = 0$, $f'(\bar{x}_0) = 0$ вычисляется по формуле:

$$M_0 = \frac{\sigma_1^2}{1 - \sigma_2^2}, \quad (19)$$

а дисперсия равновесия \bar{x}_2 — по формуле

$$M_2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \bar{x}_2^2}{1 - (f'(\bar{x}_2))^2 - \sigma_2^2}. \quad (20)$$

Зависимость дисперсий (19), (20) случайных состояний системы (18) при $a = 0.2$ вокруг равновесий $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{x}_2 = 14.302$ от параметров σ_1 , σ_2 представлена на рисунке 2. Здесь звездочками изображены результаты прямого численного моделирования. Как видим, при малых шумах аналитические зависимости (19), (20) хорошо согласуются с экспериментами.

Когда интенсивности шумов достаточно малы, случайные состояния, покидая устойчивое детерминированное равновесие, концентрируются вблизи него. При увеличении шума дисперсия состояний возрастает (см. рис. 2). При достижении некоторого критического значения интенсивности шума итерации дискретной системы с высокой вероятностью переходят через неустойчивое равновесие \bar{x}_1 и попадают в бассейн притяжения другого устойчивого равновесия, после чего могут концентрироваться уже вблизи него.

Отметим, что теоретически переходы между окрестностями этих устойчивых равновесий могут наблюдаться при любой интенсивности шума. При этом время пребывания системы вблизи заданной точки равновесия резко возрастает при уменьшении интенсивности шума. В результате за время численного эксперимента переходы не наблюдаются.

Дальнейшее увеличение шума может привести к случайным колебаниям решений между бассейнами притяжения этих двух устойчивых равновесий. Такие индуцированные шумом переходы наблюдаются в системе (18).

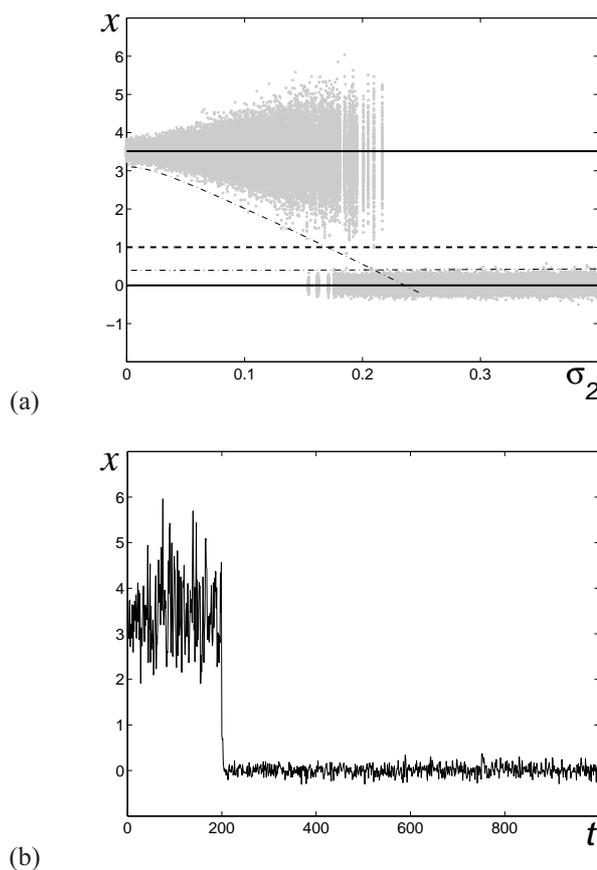


Рис. 4. Индуцированные шумами переходы в системе (18) при $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.1$, (a) стохастические аттракторы (серые точки), (b) временной ряд при $\sigma_2 = 0.2$

На рисунках 3–6 серым цветом изображены случайные состояния стохастических аттракторов системы (18), отмечены устойчивые (сплошными линиями) и неустойчивое (пунктиром) детерминированные равновесия и границы доверительных интервалов (штрихпунктиром). Кроме того, приведены характерные временные ряды.

На рисунке 3а представлены стохастические аттракторы системы (18) для $a = 0.2$, $\sigma_2 = 0$ при различных значениях σ_1 , найденные прямым численным моделированием решений, выходящих из точки $x_0 = \bar{x}_0$. При малых шумах ($\sigma_1 < 0.2$) случайные состояния концентрируются вблизи нулевого равновесия. При больших шумах ($\sigma_1 > 0.3$) после переходного процесса состояния концентрируются вблизи $\bar{x}_2 = 14.302$. Оценка критического значения интенсивности σ_1^* , отвечающего началу активных переходов, может быть получена с помощью техники доверительных интервалов.

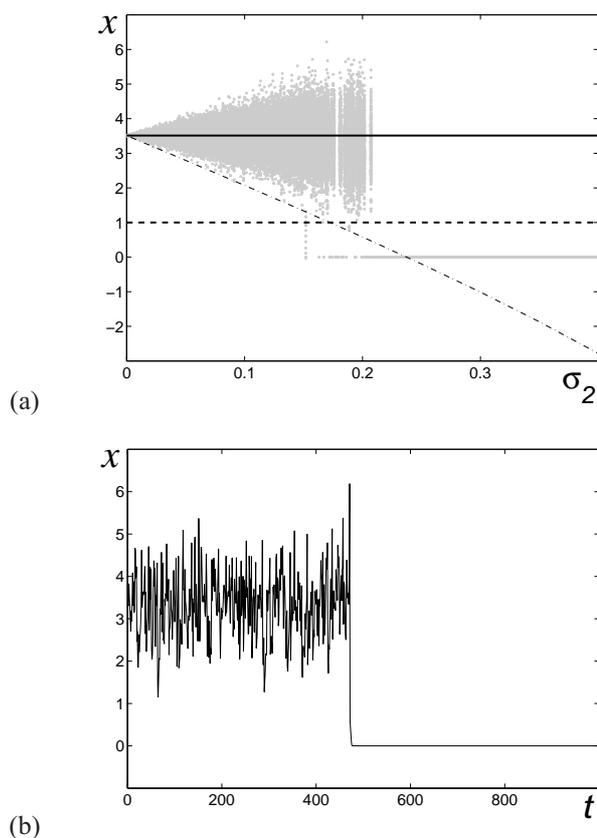


Рис. 5. Индуцированные шумами переходы в системе (18) при $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0$, (а) стохастические аттракторы (серые точки), (б) временной ряд при $\sigma_2 = 0.2$

На рис. 3а штрихпунктиром изображены границы доверительных интервалов $\bar{x}_0 \pm r(\sigma_1)$, где $r(\sigma_1) = k\sigma_1 \sqrt{2}$. Здесь и далее значение $k = 2.8$ найдено по выбранной доверительной вероятности $P = 0.9999$. Критическому значению интенсивности $\sigma_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}k} \approx 0.25$ соответствует точка пересечения верхней границы доверительного интервала и прямой $x = \bar{x}_1 = 1$, отмечающей неустойчивое равновесие. Как видим, найденная оценка хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования. На рисунке 3б представлено решение системы при $\sigma_1 = 0.25$, иллюстрирующее переход из окрестности точки \bar{x}_0 в окрестность точки \bar{x}_2 . С биологической точки зрения, этот стохастический переход можно интерпретировать как индуцированное шумами восстановление популяции.

В системе (18) возможны индуцированные шумом переходы и в противоположном направлении — из окрестности \bar{x}_2 в окрестность \bar{x}_0 . На рисунке 4а изображены случайные состояния стохастических аттракторов системы (18) при $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.1$ и различных значениях σ_2 , полученные численным моделированием решений, выходящих из точки $x_0 = \bar{x}_2 = 3.513$. При малых параметрических шумах случайные состояния концентрируются вблизи равновесия \bar{x}_2 . При больших шумах состояния системы концентрируются уже вблизи $\bar{x}_0 = 0$. Оценка критического значения интенсивности σ_2^* , отвечающего началу активных переходов, также может быть получена из анализа взаимного расположения доверительных интервалов и сепаратрисы — точки \bar{x}_1 .

На рисунке 4а штрихпунктиром изображена граница доверительных интервалов $\bar{x}_2 - r(\sigma_2)$, где $r(\sigma_2) = k \sqrt{\frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \bar{x}_2^2)}{1 - (f'(\bar{x}_2))^2 - \sigma_2^2}}$. Критическому значению интенсивности $\sigma_2^* \approx 0.17$ соответству-

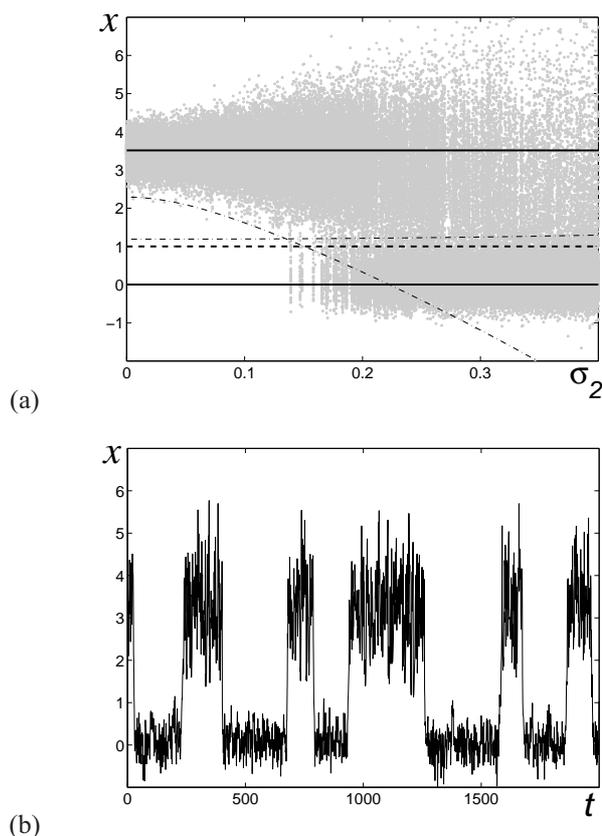


Рис. 6. Индуцированные шумами переходы в системе (18) при $a = 0.5$, $\sigma_1 = 0.3$, (а)а стохастические аттракторы (серые точки), (б) временной ряд при $\sigma_2 = 0.2$

ет точка пересечения нижней границы доверительного интервала и прямой $x = \bar{x}_1 = 1$, отмечающей неустойчивое равновесие. Как видим, найденная величина σ_2^* достаточно точно локализует качественное изменение в стохастической динамике исследуемой системы. Отметим, что разброс состояний после перехода в окрестность нулевого равновесия хорошо описывается найденным для $\bar{x}_0 = 0$ доверительным интервалом. На рисунке 4б представлено решение системы при $\sigma_2 = 0.2$, иллюстрирующее переход из окрестности точки \bar{x}_2 в окрестность точки \bar{x}_0 .

Аналогичные результаты можно получить и для случая, когда на систему (18) действуют лишь параметрические возмущения, а аддитивные отсутствуют ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$). В этом случае (см. рис. 5), решения системы (18) с высокой вероятностью пересекают сепаратрису $\bar{x}_1 = 1$ и быстро стремятся к нулю. Биологической интерпретацией такого перехода является индуцированное шумом вымирание популяции.

Если начать увеличивать аддитивный шум, то оба доверительных интервала вокруг \bar{x}_0 и \bar{x}_2 начинают перекрывать друг друга, выходя за границы бассейнов притяжения этих устойчивых равновесий (см. рис. 6а). Как следствие, в системе будут наблюдаться случайные переходы между этими бассейнами. На рисунке 6б видны два типа стохастических колебаний: осцилляции вблизи равновесий и случайные переходы между окрестностями равновесий. В данном случае популяционная система может характеризоваться как стохастический триггер.

Как видим, рассмотренная дискретная популяционная модель с эффектом Олли в присутствии случайных возмущений может различать различные типы стохастической динамики: долговременные случайные осцилляции малой дисперсии вблизи тривиального или нетривиального равнове-

сия, индуцированное шумами восстановление популяции, индуцированное шумами вымирание, стохастически генерируемый триггер.

Заключение

В работе предложен подход, направленный на конструктивное исследование индуцированных шумом переходов в мультистабильных нелинейных дискретных системах. Теоретической основой этого подхода является анализ квадратичных отклонений стохастических решений от детерминированных равновесий. В работе получен критерий существования устойчивых стационарных решений для системы вторых моментов. Разработанная техника позволяет с помощью этих вторых моментов строить доверительные области вокруг устойчивых детерминированных равновесий, а также анализировать индуцированные шумом переходы между бассейнами притяжения этих равновесий. Конструктивные возможности предложенной техники продемонстрированы на примере анализа стохастических эффектов для модели популяционной динамики Рикера с эффектом Олли.

Список литературы

- Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. — М.: Физматлит, 2007. — 328 с.
- Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — Москва–Ижевск: ИКИ, 2003.
- Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б., Цветков И. Н. Стохастические аттракторы: чувствительность, бифуркации, управление. — Саарбрюкен, Германия: LAMBERT Academic Publishing, 2012. — 149 с.
- Константинов В. М., Невельсон М. Б. Об устойчивости линейной разностной системы со случайными параметрами. // Матем. заметки. — 1970. — Т. 8(6). — С. 753–760.
- Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 255 с.
- Кузнецов А. П., Капустина Ю. В. Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2000. — Т. 8, № 6. — С. 78–87.
- Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987. — 422 с.
- Пакушин П. В. Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. — М.: Физматлит, 1994. — 304 с.
- Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 302 с.
- Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. — РХД, 2011. — 560 с.
- Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 17. — P. 501–515.
- Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J. Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. — 1981. — Vol. 46. — P. 933–935.
- Dragan V., Morozan T. Mean square exponential stability for some stochastic linear discrete time systems // Eur. J. Control. — 2006. — Vol. 12(4). — P. 373–395.

- Elaydi S., Sacker R. J.* Population models with Allee effect: a new model // *J. Biological Dynamics*. — 2010. — Vol. 4. — P. 397–408.
- Gassmann F.* Noise-induced chaos-order transitions // *Phys. Rev. E*. — 1997. — Vol. 55. — 2215 p.
- Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions. — Berlin: Springer, 1984.
- Kraut S., Feudel U.* Multistability, noise, and attractor hopping: the crucial role of chaotic saddles // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Vol. 66. — 015207 p.
- Kubrusly C.* Mean square stability conditions for discrete stochastic bilinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1985. — Vol. 30. — P. 1082–1087.
- Lai Y.-C., Tel T.* Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite Time Scales (*Applied Mathematical Sciences*). — Springer, 2011.
- Landa P. S., McClintock P. V. E.* Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise // *Physics Reports*. — 2000. — Vol. 323. — P. 1–80.
- Moss F., McClintock P. V. E.* Noise in Nonlinear Dynamical Systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007.