

УДК: 519.8

## Асимптотические решения нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова на больших временах

Е. А. Левченко<sup>1,a</sup>, А. Ю. Трифонов<sup>1,2,b</sup>, А. В. Шаповалов<sup>1,2,c</sup>

<sup>1</sup>Лаборатория математической физики Физико-технического института  
Национального исследовательского Томского политехнического университета,  
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30

<sup>2</sup>Физический факультет  
Национального исследовательского Томского государственного университета,  
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

E-mail: <sup>a</sup> Levchenkoea@tpu.ru, <sup>b</sup> atrifonov@tpu.ru, <sup>c</sup> shpv@phys.tsu.ru

Получено 30 мая 2013 г.,  
после доработки 3 июля 2013 г.

Для одномерного нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова построены асимптотические решения, позволяющие описывать квазистационарные структуры. Построены асимптотические решения динамической системы Эйнштейна–Эренфеста для двумерного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова. Эти решения описывают свойства двумерных структур, локализованных на одномерных многообразиях.

Ключевые слова: нелокальное уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, асимптотическое решение, образование структур, система Эйнштейна–Эренфеста

### Large-time asymptotic solutions of the nonlocal Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation

E. A. Levchenko<sup>1</sup>, A. Yu. Trifonov<sup>1,2</sup>, A. V. Shapovalov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Laboratory of Mathematical Physics of Mathematical Physics Department, Tomsk Polytechnic University, 30 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia

<sup>2</sup>Theoretical Physics Department, Tomsk State University, 36 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia

**Abstract.** — Asymptotic solutions are constructed for the 1D nonlocal Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation. Such solutions allow to describe the quasi-steady-state patterns. Similar asymptotic solutions of the dynamical Einstein–Ehrenfest system for the 2D Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation are found. The solutions describe properties of 2D patterns localized on 1D manifolds.

Keywords: nonlocal Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation, asymptotic solution, pattern formation, Einstein–Ehrenfest system

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 543–558 (Russian).

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Кадр» (контракт 16.740.11.0469), и программы «Наука» № 1.604.2011.

## Введение

Эволюция популяций микроорганизмов одного вида с эффектами дальнего действия моделируется нелокальными обобщениями классического уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (ФКПП) [Fisher, 1937; Колмогоров и др., 1937], которое для плотности распределения популяции  $u(x, t)$  в одномерном случае имеет вид

$$u_t(x, t) = D\Delta u(x, t) + au(x, t) - bu^2(x, t). \quad (1)$$

Здесь  $D$  — постоянный коэффициент диффузии, процесс производства популяции происходит с постоянным темпом роста  $a$  и квадратичными по плотности конкурентными потерями с коэффициентом  $b$ .

В обобщенном уравнении ФКПП локальные квадратичные потери  $bu^2(x, t)$  заменяются интегральным выражением

$$u(x, t) \int b_\gamma(x, y)u(y, t)dy, \quad (2)$$

учитывающим нелокальные взаимодействия в популяции посредством функции влияния  $b_\gamma(x, y)$  (см., например, [Fuentes et al., 2003; Fuentes et al., 2004]). Параметр  $\gamma$  характеризует эффективную область взаимодействия между особями популяции так, что при  $\gamma \rightarrow 0$  справедливо  $b_\gamma(x, y) \rightarrow b\delta(x - y)$ , а нелокальные потери (2) переходят в локальные  $bu^2(x, t)$ . Будем рассматривать распределение  $u(x, t)$  на отрезке  $x \in [-l, l]$ . Внешние воздействия могут вызвать конвективные процессы, вносящие свой вклад в популяционную динамику. Тогда одномерное уравнение ФКПП с учетом конвекции со средней скоростью  $w$  и квадратичными нелокальными потерями (2) на отрезке  $[-l, l]$  запишем в виде

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - wu_x(x, t) + au(x, t) - \chi u(x, t) \int_{-l}^l b_\gamma(x, y)u(y, t)dy. \quad (3)$$

Пространственно-временные структуры (паттерны) не образуются в ходе эволюции, описываемой классическим уравнением ФКПП (1). Процесс образования структур, возникающих за счет нелокальных конкурентных потерь и диффузии [Fuentes et al., 2003; Fuentes et al., 2004; Kenkre, 2004], конвекции [da Cunha et al., 2009] и нелокального роста [da Cunha et al., 2011], позволяет описать нелокальное уравнение ФКПП при соответствующем выборе параметров.

Отметим, что основным методом исследования формирования структур в перечисленных выше работах является численное моделирование. В данной работе основное внимание уделено аналитическим методам. Одномерная модель (3) выбирается из соображений математической простоты.

Более приближенной к экспериментальным условиям роста культуры бактерий является многомерная модель, причем особый интерес представляет двумерная модель. Многомерное динамическое уравнение получается непосредственным обобщением (3) и в отсутствие конвекции записывается в виде

$$u_t(\vec{x}, t) = D\Delta u(\vec{x}, t) + au(\vec{x}, t) - \chi u(\vec{x}, t) \int_{\mathbb{G}} b_\gamma(\vec{x}, \vec{y})u(\vec{y}, t)d\vec{y}, \quad (4)$$

где  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ .

В данной работе рассматриваются также структуры, описываемые уравнением (4) и сосредоточенные на (неполномерных) многообразиях, размерность которых  $k$  меньше числа независимых переменных в уравнении  $n$ ,  $k < n$ . Исследование таких структур можно проводить

с помощью динамической системы интегродифференциальных уравнений, описывающей эволюцию неполномерного многообразия локализации структуры. Примером таких структур являются кольцевые распределения, локализованные в окрестности окружности [Будрене и др., 1986; Matsushita et al., 2004; Цыганов и др., 2001].

Как показано в работе, анализ структур, описываемых уравнением (3), и двумерных структур, локализованных на одномерных многообразиях, описываемых уравнением (4), проводится с помощью общего математического подхода.

Работа организована следующим образом. В первом разделе рассмотрено одномерное нелокальное уравнение ФКПП на отрезке и найдено его асимптотическое решение. В следующем разделе описан класс функций, квазиклассически сосредоточенных на неполномерных многообразиях. В третьем разделе получена система, описывающая динамику многообразия локализации решения многомерного нелокального уравнения ФКПП, и метод, разработанный в первом разделе для одномерного нелокального уравнения ФКПП, применен для изучения структур, сосредоточенных на неполномерных многообразиях. В заключении обсуждены основные результаты и намечены направления будущих исследований.

## Одномерное нелокальное уравнение ФКПП на отрезке

Рассмотрим уравнение (3) с функцией влияния  $b_\gamma(x, y) = b_\gamma(x - y)$ ,

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - wu_x(x, t) + au(x, t) - \kappa u(x, t) \int_{-l}^l b_\gamma(x - y)u(y, t)dy, \quad (5)$$

где  $b_\gamma(x)$  предполагается четной:  $b_\gamma(x) = b_\gamma(-x)$ , и периодической с периодом  $2l$ :  $b_\gamma(x+2l) = b_\gamma(x)$ .  
Зададим начальное условие для уравнения (5) в виде

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (6)$$

и периодическое граничное условие

$$u(x + 2l, t) = u(x, t). \quad (7)$$

Для решения уравнения (5) с начальным и граничным условиями (6), (7) рассмотрим вспомогательную линейную задачу [Владимиров, 1981] нахождения собственных функций и собственных значений уравнения Фредгольма с ядром  $b_\gamma(x - y)$ :

$$\int_{-l}^l b_\gamma(x - y)v_j(y)dy = \lambda_j v_j(x), \quad j = \overline{-\infty, \infty}. \quad (8)$$

Собственные функции  $v_j(x)$  и собственные значения  $\lambda_j$  задачи (8) имеют вид (см., например, [Бейтман, Эрдейи, 1966])

$$v_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\pi jx/l}, \quad \lambda_j = \int_{-l}^l b_\gamma(z) e^{-i\pi jz/l} dz, \quad j = \overline{-\infty, \infty}, \quad (9)$$

причем система функций  $v_j(x)$  ортонормирована:

$$\int_{-l}^l v_j^*(x)v_k(x)dx = \delta_{jk}. \quad (10)$$

Здесь функция  $v_j^*(x)$  комплексно сопряжена с  $v_j(x)$ . Тогда ядро  $b_\gamma(x-y)$  можно представить в виде [Владимиров, 1981]

$$b_\gamma(x-y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j v_j(x) v_j^*(y). \quad (11)$$

Решение уравнения (5) представим в виде разложения Фурье по собственным функциям  $v_j(x)$  ядра  $b_\gamma(x-y)$ :

$$u(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j(t) v_j(x). \quad (12)$$

Аналогично

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_{0j} v_j(x), \quad (13)$$

где  $v_0$  определено в (9).

Коэффициенты Фурье  $\beta_j(t)$  и  $\beta_{0j}$  с помощью соотношения ортогональности (10) вычисляются по формуле

$$\beta_j(t) = \int_{-l}^l v_j^*(x) u(x, t) dx, \quad \beta_{0j} = \int_{-l}^l v_j^*(x) \varphi(x) dx. \quad (14)$$

Из условия (6) и разложений (12), (13) получим

$$\beta_j(t)|_{t=0} = \beta_{0j}. \quad (15)$$

Приняв во внимание (11) и (12), запишем уравнение (5) как

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - wu_x(x, t) + au(x, t) - \kappa u(x, t) \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \beta_p(t) v_p(x) \right\}. \quad (16)$$

Заметим, что из явного вида функций (9) непосредственно следует соотношение

$$v_j^*(x) v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} v_{-j+p}(x). \quad (17)$$

Подставим  $u(x, t)$  из (12) в уравнение (16). Домножим полученное выражение на  $v_j^*(x)$  и проинтегрируем в пределах  $[-l, l]$ . В результате с учетом (10) и (17) получим бесконечную систему уравнений (см. также [Комаров, 2001; Комаров, Шишмарёв, 2002]) для определения функций  $\beta_j(t)$

$$\dot{\beta}_j = \left( -D \frac{j^2 \pi^2}{l^2} - iw \frac{j\pi}{l} + a \right) \beta_j - \frac{\kappa}{\sqrt{2l}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \beta_{j-p} \beta_p, \quad j = \overline{-\infty, \infty}, \quad (18)$$

с начальным условием (15).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если функция  $\beta_0(t)$  удовлетворяет логистическому уравнению

$$\dot{\beta}_0 = a\beta_0 - \frac{\kappa}{\sqrt{2l}} \lambda_0 \beta_0^2, \quad \beta_0(t)|_{t=0} = \beta_{00}, \quad (19)$$

где  $\beta_{00}$  — заданная постоянная, то функции

$$\beta_j(t) = \beta_0(t)\delta_{j0} \quad (20)$$

являются решениями системы (18) с начальными условиями

$$\beta_j(t)|_{t=0} = \beta_{00}\delta_{j0}. \quad (21)$$

Начальным условиям (21) в силу (13) соответствует пространственно однородное начальное условие (6) для функции  $u(x, t)$

$$\varphi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_{00}\delta_{j0}v_j(x) = \beta_{00}v_0.$$

Решение задачи Коши (19) есть

$$\beta_0(t) = \frac{\beta_{00}e^{at}}{1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^{at} - 1)}. \quad (22)$$

Тогда точное решение уравнения (5) с начальным условием (13) имеет вид

$$u(x, t) = v_0\beta_0(t) = v_0 \frac{\beta_{00}e^{at}}{1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^{at} - 1)}. \quad (23)$$

Решение (23) однородно по  $x$  и монотонно на всем временном интервале. Производная функции  $u_t(x, t)$ , определяемая выражением (23), больше нуля при  $a > \kappa\lambda_0v_0\beta_{00}$  и меньше нуля при  $a < \kappa\lambda_0v_0\beta_{00}$ . При  $t \rightarrow \infty$  функция (23) асимптотически стремится к стационарному значению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_{\text{lim}} = \frac{a}{\kappa\lambda_0}. \quad (24)$$

Заметим, что  $u_{\text{lim}}$  из (24) не является решением нелокального уравнения ФКПП вида (5). Решение  $u(x, t)$  вида (23) можно характеризовать временем  $T_c$ , таким что при  $t > T_c$  функция  $u(x, t)$  эволюционирует монотонно к стационарному состоянию  $u_{\text{lim}}$  вида (24), а  $u_t(x, t)$  монотонно стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Оценим  $T_c$  из условия

$$|u(x, t) - u_{\text{lim}}| < \varepsilon, \quad t > T_c, \quad (25)$$

где  $\varepsilon$  — заданное малое отклонение решения  $u(x, t)$  вида (23) от стационарного состояния  $u_{\text{lim}}$  вида (24). Рассмотрим условие (25) на границе его выполнения, когда справедливо равенство. Выберем параметр  $\varepsilon$  в виде

$$\varepsilon = u_{\text{lim}}|\alpha - 1|. \quad (26)$$

Тогда предельному переходу  $\varepsilon \rightarrow 0$  соответствует  $\alpha \rightarrow 1$ , а  $T_c = T_c(\alpha)$  определяется соотношением

$$u(x, T_c(\alpha)) = \alpha u_{\text{lim}}. \quad (27)$$

Таким образом, время  $T_c(\alpha)$  соответствует пересечению графиков функций  $u(x, t)$  вида (23) и  $\alpha u_{\text{lim}}$  (см. рис. 1 и 3). С учетом явного вида (23) функции  $u(x, t)$  и стационарного состояния  $u_{\text{lim}}$  (24) найдем

$$T_c(\alpha) = \frac{1}{a} \ln \left\{ \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \frac{u_{\text{lim}}\sqrt{2l}}{\beta_{00}} - 1 \right) \right\}. \quad (28)$$

На рис. 1 и 3 для  $b_\gamma = \exp(-(x-y)^2/2)$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $l = 3$ ,  $\varphi(x) = 1/\sqrt{2l}$  приведены графики функций  $u(x, t)$  вида (23) (сплошная линия),  $u_{\text{lim}}$  вида (24) (штриховая линия) и  $\alpha u_{\text{lim}}$  (штрихпунктирная линия) при  $\alpha = 0.95$  и  $\alpha = 1.05$ , соответственно. На рис. 2 и 4, соответственно, приведены графики производных  $u_t(x, t)$  и  $|u_t(x, t)|$  при  $\alpha = 0.95$  и  $\alpha = 1.05$  для тех же значений параметров уравнения. Видно, что при  $t > T_c(\alpha)$  функция  $u(x, t)$  вида (23) монотонно стремится к  $u_{\text{lim}}$  вида (24), а функция  $|u_t(x, t)|$  монотонно стремится к нулю. Параметры уравнения принимаются безразмерными в соответствии с работами [da Cunha et al., 2009; Fuentes et al., 2003].

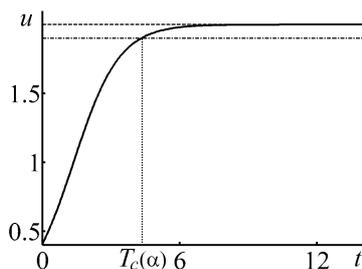


Рис. 1. График функции  $u(x, t)$ :  $a = 1$ ,  $a > \kappa \lambda_0 v_0 \beta_{00}$ ,  $\alpha = 0.95$

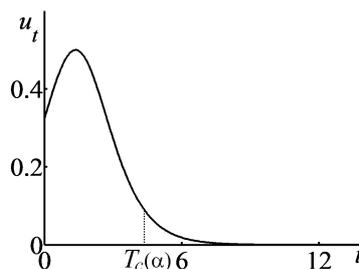


Рис. 2. График функции  $u_t(x, t)$ :  $a = 1$ ,  $a > \kappa \lambda_0 v_0 \beta_{00}$ ,  $\alpha = 0.95$

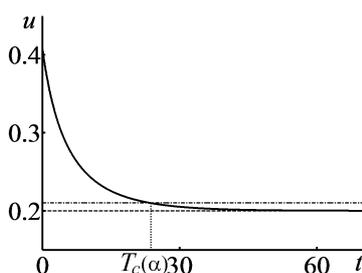


Рис. 3. График функции  $u(x, t)$ :  $a = 0.1$ ;  $a < \kappa \lambda_0 v_0 \beta_{00}$ ,  $\alpha = 1.05$

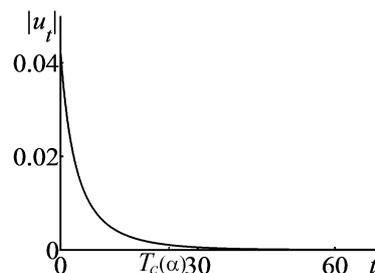


Рис. 4. График функции  $|u_t(x, t)|$ :  $a = 0.1$ ,  $a < \kappa \lambda_0 v_0 \beta_{00}$ ,  $\alpha = 1.05$

Решения уравнения (5) на больших временах сходятся к стационарному состоянию (см., например, [Комаров, 2001; Комаров, Шишмарёв, 2002]), поэтому будем искать решения уравнения (5) в классе функций, близких к решению (23).

Обозначим через  $T$  ( $T > T_c(\alpha)$ ) большой параметр, характеризующий время эволюции системы. Введем параметр  $\tau \in [0, 1]$  условием  $t = T\tau$ . Обозначим  $\mathcal{K}_T^t = \mathcal{K}_T^t(\phi)$  класс функций вида

$$\mathcal{K}_T^t = \left\{ \beta(t) \mid \beta(t) = \beta(\theta, \tau, T) = \beta^{(0)}(\theta, \tau) + \frac{1}{T} \beta^{(1)}(\theta, \tau) + \dots, \quad \theta = T\phi(\tau) \right\} \quad (29)$$

Здесь функция  $\phi(\tau)$  — функциональный параметр класса  $\mathcal{K}_T^t$ . Переменную  $\theta$  будем называть быстрой переменной, а переменную  $\tau$  — медленной.

Будем искать решение системы (18) в классе функций  $\mathcal{K}_T^t$ ,  $\beta_k(t) \in \mathcal{K}_T^t$ . В этом случае разложение (29) с учетом (12) порождает асимптотическое по  $T \rightarrow \infty$  разложение решения уравнения (5)

$$u(x, \theta, \tau) = u^{(0)}(x, \theta, \tau) + \frac{1}{T} u^{(1)}(x, \theta, \tau) + \dots \quad (30)$$

Решения уравнения (5) вида (30) будем называть квазистационарными. Важным свойством квазистационарного решения является то, что на больших временах  $T \rightarrow \infty$  структура решения определяется главным членом асимптотики  $u^{(0)}(x, \theta, \tau)$ .

Выберем для функции  $u(x, t)$  начальное условие в виде

$$\varphi(x) = \beta_{00}v_0 + \frac{1}{T}\tilde{\varphi}(x). \quad (31)$$

Для функции  $\beta_j \in \mathcal{K}_T^t$  справедливо

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{\partial\beta}{\partial\tau} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial\beta}{\partial\theta},$$

в результате система (18) примет вид

$$\begin{aligned} & \left[ \phi_\tau \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial\tau} \right] \left( \beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots \right) = \\ & = \tilde{a}_j \left( \beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots \right) - \frac{\kappa}{\sqrt{2l}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \left( \beta_{j-p}^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_{j-p}^{(1)} + \dots \right) \left( \beta_p^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_p^{(1)} + \dots \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\tilde{a}_j = -D \frac{j^2 \pi^2}{l^2} - iw \frac{j\pi}{l} + a. \quad (33)$$

Приравняв слагаемые при одинаковых степенях  $1/T$ , получим

$$\phi_\tau \frac{\partial}{\partial\theta} \beta_0^{(0)} = a \beta_0^{(0)} - \frac{\kappa}{\sqrt{2l}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \beta_{-p}^{(0)} \beta_p^{(0)}, \quad (34)$$

$$\phi_\tau \frac{\partial}{\partial\theta} \beta_j^{(0)} = \tilde{a}_j \beta_j^{(0)} - \frac{\kappa}{\sqrt{2l}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \beta_{j-p}^{(0)} \beta_p^{(0)}, \quad (35)$$

$$\phi_\tau \frac{\partial}{\partial\theta} \beta_j^{(1)} = \tilde{a}_j \beta_j^{(1)} - \frac{\kappa}{\sqrt{2l}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p (\beta_{j-p}^{(1)} \beta_p^{(0)} + \beta_{j-p}^{(0)} \beta_p^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial\tau} \beta_j^{(0)}, \dots \quad (36)$$

С учетом начальных условий (21) решение уравнений (34) и (35) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_0^{(0)}(\theta, \tau) &= \frac{\beta_{00} e^{a\theta/\phi_\tau}}{1 + \frac{\kappa \lambda_0 \beta_{00}}{a \sqrt{2l}} (e^{a\theta/\phi_\tau} - 1)}, \\ \beta_j^{(0)}(\theta, \tau) &= 0, \quad j \neq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Не уменьшая общности, положим

$$\phi(\tau) = a\tau. \quad (38)$$

Тогда соотношение (37) примет вид

$$\beta_0^{(0)}(\theta, \tau) = \frac{\beta_{00} e^\theta}{1 + \frac{\kappa \lambda_0 \beta_{00}}{a \sqrt{2l}} (e^\theta - 1)}. \quad (39)$$

С учетом (39) для  $u^{(0)}(x, t)$  получим

$$u^{(0)}(x, t) = v_0 \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\kappa \lambda_0 \beta_{00}}{a \sqrt{2l}} (e^{at} - 1)}. \quad (40)$$

Решения  $u(x, t)$  уравнения (5) обладают следующим свойством:

$$u(x, t) = u^{(0)}(x, t) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{T}\right) \right], \quad T \rightarrow \infty,$$

где  $u^{(0)}(x, t)$  — однородное нестационарное решение (23), (40) уравнения (5).

Таким образом, по аналогии с работами [da Cunha et al., 2009; da Cunha et al., 2011], в которых для одномерного случая структура рассматривается как возмущение точного стационарного решения уравнения ФКПП (1), мы описываем эволюцию структуры как возмущение найденного точного нестационарного решения (23) уравнения (5).

Из (37) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \beta_j^{(0)} = 0.$$

Запишем уравнение (36) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_0^{(1)} &= \beta_0^{(1)} - \frac{2\kappa\lambda_0}{a\sqrt{2l}} \beta_0^{(0)} \beta_0^{(1)}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(1)} &= \frac{\tilde{a}_j}{a} \beta_j^{(1)} - \frac{\kappa}{a\sqrt{2l}} \beta_0^{(0)} (\lambda_0 \beta_j^{(1)} + \lambda_j \beta_j^{(1)}), \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_{-j}^{(1)} &= \frac{\tilde{a}_j}{a} \beta_{-j}^{(1)} - \frac{\kappa}{a\sqrt{2l}} \beta_0^{(0)} (\lambda_0 \beta_{-j}^{(1)} + \lambda_{-j} \beta_{-j}^{(1)}). \end{aligned} \quad (41)$$

Если начальное условие  $\varphi(x)$  (31) симметрично и  $\lambda_{-j} = \lambda_j$ , то уравнение на  $\beta_j^{(1)}$  и  $\beta_{-j}^{(1)}$  совпадают и принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(1)} = \frac{\tilde{a}_j}{a} \beta_j^{(1)} - \frac{\kappa(\lambda_j + \lambda_0)}{a\sqrt{2l}} \beta_0^{(0)} \beta_j^{(1)}. \quad (42)$$

Из (41), (42) имеем

$$\begin{aligned} \beta_0^{(1)} &= \frac{\beta_{10} e^\theta}{\left(1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^\theta - 1)\right)^2} = \frac{\beta_{10} e^{at}}{\left(1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^{at} - 1)\right)^2}, \\ \beta_j^{(1)} &= \frac{\beta_{1j} e^{\tilde{a}_j\theta/a}}{\left(1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^\theta - 1)\right)^{(\lambda_j + \lambda_0)/\lambda_0}} = \frac{\beta_{1j} e^{\tilde{a}_j t}}{\left(1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^{at} - 1)\right)^{(\lambda_j + \lambda_0)/\lambda_0}}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\beta_{1j} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^l \tilde{\varphi}(x) e^{-ij\pi x/l} dx.$$

и  $\tilde{a}_j$  определено соотношением (33), а  $\tilde{\varphi}(x)$  — (31).

Тогда для случая симметричного начального распределения (31) с точностью до  $O(1/T^2)$  получим

$$u(x, t) = u^{(0)}(x, t) + \frac{1}{T} u^{(1)}(x, t), \quad (44)$$

где

$$u^{(1)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_{1j} e^{\tilde{a}_j t} e^{ij\pi x/l}}{\left(1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2l}}(e^{at} - 1)\right)^{(\lambda_j + \lambda_0)/\lambda_0}}, \quad (45)$$

а  $u^{(0)}(x, t)$  определяется соотношением (40).

В качестве  $b_\gamma(x - y)$  в уравнении (5) выберем

$$b_\gamma(x - y) = b_0 \exp(-(x - y)^2/2\gamma^2).$$

В этом случае при  $\gamma \rightarrow 0$  функция  $b_\gamma(x - y)$  является  $\delta$ -образной последовательностью и стремится к  $\delta$ -функции, а уравнение (5) становится локальным и структуры не образуются. Если  $\gamma \gg 1$ , функция  $b_\gamma(x - y)$  асимптотически стремится к  $b_\gamma(x - y) \approx b_0$ . В этом случае уравнение (5) преобразуется к уравнению

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) - wu_x(x, t) + au(x, t) - \sqrt{2lx}b_0u(x, t)\beta_0(t)$$

и не наблюдается образования структур. Здесь  $\beta_0(t)$  определена в (14). Таким образом, образование структур наблюдается лишь при определенных значениях параметров уравнения.

На рисунке 5 изображена эволюция плотности  $u(x, t)$  при  $a = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $D = 0.001$ ,  $w = 0.1$ ,  $l = 5$ ,  $T = 10$ ,  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2l}} + \frac{1}{T} \exp(-x^2/0.6)$ .

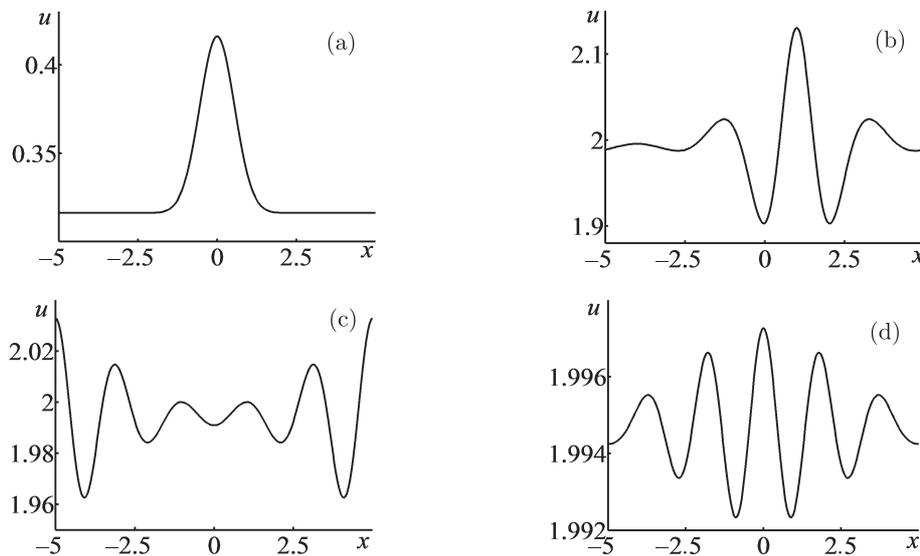


Рис. 5. График функции  $u(x, t)$  в моменты времени  $t = 0$  (a), 10 (b), 50 (c), 200 (d).

Образование пространственно неоднородной структуры происходит благодаря диффузии и нелокальному взаимодействию. В начале эволюции происходит образование дополнительных пиков (рис. 5b и 5c), затем образовавшаяся структура монотонно эволюционирует без качественного ее изменения (рис. 5d), то есть становится квазистационарной.

Применим рассмотренный метод для описания квазистационарных структур, локализованных на неполномерных многообразиях.

## Многообразие локализации

Геометрические свойства популяционных структур [Murru, 2001] характеризуются распределением плотности на некоторых геометрических объектах — многообразиях. Примерами могут служить популяции микроорганизмов, плотность которых локализована в окрестности некоторой точки максимума (нульмерного многообразия), кольцевые распределения [Будрене

и др., 1986; Matsushita et al., 2004; Цыганов и др., 2001], локализованные в окрестности окружности (одномерное многообразие) и так далее. Ограничим наше рассмотрение простейшим случаем односвязного многообразия  $\Lambda_t^k$  локализации решения  $u(x, t)$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  в момент времени  $t$  зададим  $k$ -мерное многообразие  $\Lambda_t^k$ ,  $k < n$  условием

$$\Lambda_t^k = \left( \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{X}(t, s), s \in \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^k \right). \quad (46)$$

Здесь заданный вектор  $\vec{X}(t, s)$  гладко зависит от времени  $t \in \mathbb{R}^1$  и вещественных параметров  $s \in \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{G}$  — область изменения переменных  $s$ . Переменные  $s$  являются локальными координатами точек многообразия  $\Lambda_t^k$ .

Отметим, что параметр  $D$  входит в уравнение (3) в виде множителя при производных. Для таких уравнений метод ВКБ–Маслова [Маслов, 1973; Маслов, 1977; Белов, Доброхотов, 1992] позволяет строить приближенные решения в виде квазиклассических асимптотик с асимптотическим параметром  $D$ ,  $D \rightarrow 0$ , локализованных в окрестности некоторого многообразия. Выберем в качестве такого многообразия  $\Lambda_t^k$  и определим класс  $J_D(\Lambda_t^k)$  функций  $u(\vec{x}, t, D) \in J_D(\Lambda_t^k)$ , зависящих от параметра  $D$ .

Будем предполагать, что функции  $u(\vec{x}, t, D)$  при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  убывают быстрее любой степени  $|\vec{x}|$ , так что существуют моменты любого конечного порядка для этих функций.

Для произвольной гладкой функции  $A(\vec{x}, t)$  и функции  $u(\vec{x}, t, D) \in J_D(\Lambda_t^k)$  положим

$$A_u(t, D) = \frac{1}{m_u(t, D)} \int_{\mathbb{R}^n} A(\vec{x}, t) u(\vec{x}, t, D) d\vec{x}, \quad (47)$$

где  $m_u(t, D)$  — нулевой момент функции  $u(\vec{x}, t, D)$ , то есть

$$m_u(t, D) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x}, t, D) d\vec{x}. \quad (48)$$

Будем предполагать, что существует предел

$$\lim_{D \rightarrow 0} m_u(t, D) = \lim_{D \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x}, t, D) d\vec{x} = \int_{\mathbb{G}} \rho(t, s) ds. \quad (49)$$

Обозначим

$$m_\rho(t) = \int_{\mathbb{G}} \rho(t, s) ds. \quad (50)$$

Поскольку  $u(\vec{x}, t, D)$  имеет смысл популяционной плотности и неотрицательна, функция  $\rho(t, s)$  также неотрицательна. Соотношение (49) позволяет интерпретировать  $\rho(t, s)$  как квазиклассически сосредоточенную плотность (КСП) на многообразии  $\Lambda_t^k$  распределения, заданного функцией  $u(\vec{x}, t, D)$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Будем говорить, что функция  $u(\vec{x}, t, D)$  принадлежит классу  $J_D(\Lambda_t^k)$ , если

$$\lim_{D \rightarrow 0} A_u(t, D) = \frac{1}{m_\rho(t)} \int_{\mathbb{G}} A(\vec{X}(t, s), t) \rho(t, s) ds. \quad (51)$$

Следуя [Bagrov et al., 1996], назовем  $J_D(\Lambda_t^k)$  классом функций, квазиклассически сосредоточенных на многообразии  $\Lambda_t^k$ . Решения уравнения (3), построенные в этом классе функций, моделируют описанные выше структуры, то есть структуры, локализованные в окрестности  $\Lambda_t^k$ .

Соотношения (51) и (47) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{u(\vec{x}, t, D)}{m_u(t, D)} = \int_{\mathbb{G}} \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, s)) \rho(t, s) ds. \quad (52)$$

Укажем связь функций  $\rho(t, s)$  и  $u(\vec{x}, t, D)$  явным образом. Для этого введем в пространстве  $\mathbb{R}^n$  систему координат  $(s, \xi)$ , где переменные  $\xi \in \mathbb{W} \subset \mathbb{R}^{n-k}$  дополняют переменные  $s$  до системы координат в  $\mathbb{R}^n$ , то есть  $\vec{x} = \vec{x}(s, \xi)$ ,  $s = s(\vec{x})$ ,  $\xi = \xi(\vec{x})$  и якобиан  $J\left(\frac{\vec{x}(s, \xi)}{s, \xi}\right) \neq 0$ . Переменные  $\xi$  построим так, чтобы их координатные линии были ортогональными к многообразию  $\Lambda_t^k$  относительно евклидова скалярного произведения в касательном пространстве. Тогда

$$\rho(t, s) = \lim_{D \rightarrow 0} \int_{\mathbb{W}} u(\vec{x}(s, \xi), t, D) J\left(\frac{\vec{x}(s, \xi)}{s, \xi}\right) d\xi. \quad (53)$$

С математической точки зрения структура описывается решением  $u(x, t)$  уравнения (3), поэтому необходимо описать область локализации этого решения и найти КСП.

### Эволюция многообразия локализации

Рассмотрим уравнение (4) и получим динамическую систему, описывающую эволюцию функции  $\rho(s, t)$  и вектора  $\vec{X}(s, t)$  для решения  $u(\vec{x}, t, D)$  уравнения (3) в классе  $J_D(\vec{X}(t, s))$ .

Согласно (47),

$$\vec{x}_u(t, D) = \frac{1}{m_u(t, D)} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{x}u(\vec{x}, t, D) d\vec{x} \quad (54)$$

есть вектор, составленный из первых нормированных моментов функции  $u(\vec{x}, t, D)$ .

В пределе  $D \rightarrow 0$  в соответствии с (51) из (54) получим

$$\lim_{D \rightarrow 0} \vec{x}_u(t, D) = \vec{x}_\rho(t) = \frac{1}{m_\rho(t)} \int_{\mathbb{G}} \vec{X}(t, s) \rho(t, s) ds. \quad (55)$$

Из соотношений (49) и (55) следует

$$\dot{m}_\rho = \int_{\mathbb{G}} \dot{\rho}(t, s) ds, \quad (56)$$

$$\dot{\vec{x}}_\rho = -\frac{\dot{m}_\rho}{m_\rho} \vec{x}_\rho(t, D) + \frac{1}{m_\rho} \int_{\mathbb{G}} (\dot{\vec{X}}(t, s) \rho(t, s) + \vec{X}(t, s) \dot{\rho}(t, s)) ds. \quad (57)$$

С другой стороны, с учетом уравнения (4) из (48) и (54) имеем

$$\dot{m}_u = \int_{\mathbb{R}^n} u_t d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ a - \kappa \int_{\mathbb{R}^n} b_\gamma(\vec{x}, \vec{y}) u(\vec{y}, t, D) d\vec{y} \right] u(\vec{x}, t, D) d\vec{x}, \quad (58)$$

$$\dot{\vec{x}}_u = \frac{1}{m_u} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{x} \left[ a - \kappa \int_{\mathbb{R}^n} b_\gamma(\vec{x}, \vec{y}) u(\vec{y}, t, D) d\vec{y} \right] u(\vec{x}, t, D) d\vec{x} - \frac{\dot{m}_u}{m_u} \vec{x}_u. \quad (59)$$

Уравнения, описывающие эволюцию плотности  $\rho(t, s)$  и вектора  $\vec{X}(t, s)$ , получаются предельным переходом  $D \rightarrow 0$  в уравнениях (58) и (59) соответственно и имеют вид

$$\dot{\rho}(t, s) = \rho(t, s) \left[ a - \kappa \int_{\mathbb{R}^n} b_\gamma(\vec{X}(t, s), \vec{X}(t, s')) \rho(t, s') ds' \right], \quad (60)$$

$$\dot{\vec{X}}(t, s) = 0. \quad (61)$$

Система уравнений (60), (61) замкнута и описывает эволюцию  $k$ -параметрического семейства векторов  $\vec{X}(t, s)$ , задающих эволюцию многообразия  $\Lambda_t^k$  и плотности  $\rho(t, s)$  на этом многообразии. Систему (60), (61) назовем системой Эйнштейна–Эренфеста (ЭЭ) класса  $(k, M)$  при  $M = 1$ . Здесь  $M$  – наибольший порядок учитываемых моментов [Лямкин и др., 2009]. Каждому решению  $u(\vec{x}, t, D)$  уравнения (3) с начальным условием

$$u(\vec{x}, t, D)|_{t=0} = \varphi(\vec{x}, D) \quad (62)$$

соответствует решение системы (60), (61) с начальными условиями

$$\rho(t, s)|_{t=0} = \rho_\varphi(s), \quad \vec{X}(t, s)|_{t=0} = \vec{X}_\varphi(s), \quad (63)$$

где  $\rho_\varphi(s)$  и  $\vec{X}_\varphi(s)$  связаны с  $\varphi(\vec{x}, D)$  соотношениями (49) и (55) соответственно:

$$\lim_{D \rightarrow 0} m_\varphi(D) = m_{\rho_\varphi} = \int_{\mathbb{G}} \rho_\varphi(s) ds, \quad (64)$$

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{m_\varphi(D)} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{x} \varphi(\vec{x}, D) d\vec{x} = \frac{1}{m_{\rho_\varphi}} \int_{\mathbb{G}} \vec{X}_\varphi(s) \rho_\varphi(s) ds. \quad (65)$$

Здесь

$$m_\varphi(D) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{x}, D) d\vec{x}. \quad (66)$$

Таким образом, исследование структур, описываемых уравнением (3), в терминах проекций на многообразии  $\Lambda_t^k$  сводится к решению системы ЭЭ (60), (61) с начальными условиями (63).

Рассмотрим систему (60), (61) при

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b_0 \exp \left\{ - \frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2\gamma^2} \right\}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (67)$$

а начальные условия положим

$$\rho_\varphi(s) = \rho_\varphi, \quad \vec{X}_\varphi(s) = (R \cos s, R \sin s), \quad s \in [-\pi, \pi]. \quad (68)$$

В этом случае  $\vec{X}(t, s) = \vec{X}_\varphi(s) = (R \cos s, R \sin s)$ . В данном примере многообразие локализации есть одномерное компактное многообразие  $\Lambda_t^1$ , а уравнение (60) примет вид

$$\dot{\rho}(t, s) = a\rho(t, s) - \kappa\rho(t, s) \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{b}_\gamma(s, s') \rho(t, s') ds', \quad (69)$$

где

$$\tilde{b}_\gamma(s, s') = b_0 \exp \left\{ - \frac{(\vec{X}_\varphi(s) - \vec{X}_\varphi(s'))^2}{2\gamma^2} \right\} = b_0 \exp \left( - \frac{R^2}{\gamma^2} [1 - \cos(s - s')] \right). \quad (70)$$

Уравнение (69) является частным случаем уравнения (5) при  $D = 0$  и  $w = 0$ , поэтому для нахождения его решения дословно повторим рассуждения первого раздела.

Будем искать решение  $\rho(t, s)$  в виде

$$\rho(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(t) v_j(s). \quad (71)$$

Собственные функции и собственные значения уравнения Фредгольма (8) с ядром  $\tilde{b}_\gamma(s, s')$ , заданным выражением (70), имеют вид [Владимиров, 1981]

$$v_j(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ijs}, \quad \lambda_j = 2\pi b_0 e^{-\mu} I_j(\mu), \quad j = \overline{-\infty, \infty}, \quad (72)$$

где  $\mu = R^2/\gamma^2$ , а  $I_j(\mu)$  — модифицированные функции Бесселя первого рода [Бейтман, Эрдейи, 1966]. Ядро  $\tilde{b}_\gamma(s, s')$  из (70) можно представить в виде [Владимиров, 1981]

$$\tilde{b}_\gamma(s, s') = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2\pi b_0 e^{-\mu} I_j(\mu) v_j(s) v_{-j}(s'). \quad (73)$$

С учетом (73) перепишем уравнение (69) следующим образом:

$$\dot{\rho}(t, s) = a\rho(t, s) - \kappa\rho(t, s) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j \beta_j(t) v_j(s) \right\}. \quad (74)$$

Система (18) запишется в виде

$$\dot{\beta}_j = a\beta_j - \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_p \beta_{j-p} \beta_p, \quad (75)$$

$$\beta_j|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ijs) \rho_\varphi(s) ds, \quad j = \overline{-\infty, \infty}. \quad (76)$$

Аналогично функции

$$\beta_j(t) = \beta_0(t) \delta_{j0}, \quad \beta_0(t) = \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\kappa \lambda_0 \beta_{00}}{a \sqrt{2\pi}} (e^{at} - 1)} \quad (77)$$

являются решениями системы (75) с начальными условиями

$$\beta_j|_{t=0} = \beta_{00} \delta_{j0},$$

отвечающими начальному условию (68)

$$\rho(t, s)|_{t=0} = \rho_\varphi(s) = \beta_{00} v_0.$$

Тогда из (71) для решения уравнения (69) получим

$$\rho(t, s) = v_0 \beta_0(t) = v_0 \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\kappa \lambda_0 \beta_{00}}{a \sqrt{2\pi}} (e^{at} - 1)}. \quad (78)$$

Если начальное условие для функции  $\rho(t, s)$  выберем в виде

$$\rho_\varphi(s) = \beta_{00}v_0 + \frac{1}{T}\tilde{\rho}_\varphi(s), \quad (79)$$

то для симметричного ( $\rho_\varphi(-s) = \rho_\varphi(s)$ ) начального распределения (79) аналогично получим

$$\rho(t, s) = v_0 \frac{\beta_{00}e^{at}}{1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2\pi}}(e^{at} - 1)} + \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_{1j}e^{at}e^{ijs}}{\left(1 + \frac{\kappa\lambda_0\beta_{00}}{a\sqrt{2\pi}}(e^{at} - 1)\right)^{1+I_j(\mu)/I_0(\mu)}} + \dots, \quad (80)$$

где

$$\beta_{1j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\rho}_\varphi(s)e^{-ijs} ds,$$

а  $\tilde{\rho}_\varphi$  определено соотношением (79).

Для верификации полученных асимптотических формул было проведено численное моделирование уравнения (69) с помощью стандартной явной разностной схемы. На рисунке 6 изображена эволюция плотности  $\rho(t, s)$ , полученная с помощью соотношения (80) (штриховая линия) и с помощью численного моделирования (сплошная линия) уравнения (69) при  $a = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $\kappa = 0.2$ ,  $R = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $T = 10$ ,  $\rho_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{T} \exp(-s^2/0.6)$ .

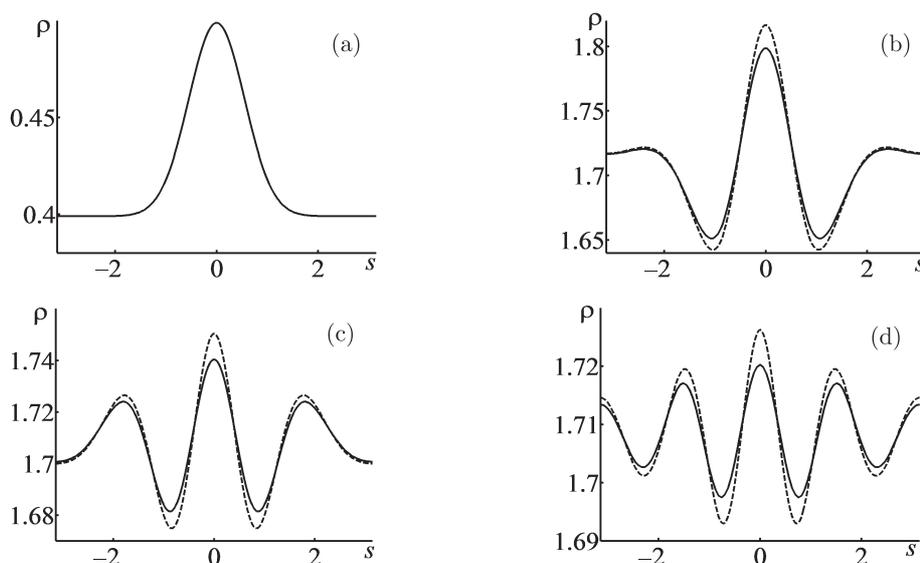


Рис. 6. График функции  $\rho(t, s)$  в моменты времени  $t = 0$  (a), 10 (b), 50 (c), 200 (d). Сплошной линией изображена плотность  $\rho(t, s)$ , полученная путем численного моделирования, штриховой — аналитическое решение, определяемое соотношением (80)

Как видно из рисунка 6, численный и аналитический подходы хорошо согласуются. Уравнение для КСП вида (69), описывающее структуры, локализованные на окружности, не содержит слагаемых, учитывающих диффузию и конвекцию, поэтому не происходит перемещения структуры в пространстве и образование новых пиков происходит медленнее. Эволюция структуры (см. рис. 6) происходит аналогично эволюции одномерных структур, описанной в первом разделе.

Заметим, что все рисунки 6а–6д являются одномерной разверткой усеченных двумерных распределений.

## Заключение

В данной работе для нелокального одномерного уравнения ФКПП с диффузией и конвекцией разработан метод нахождения асимптотических решений при  $T \rightarrow \infty$ , где  $T$  — время эволюции. Функции класса, в котором построены асимптотические решения, обладают следующим свойством: при  $T \rightarrow \infty$  они с точностью  $O(1/T)$  стремятся к полученному точному однородному решению. В результате мы описываем эволюцию квазистационарных структур, представляющих собой возмущение точного нестационарного однородного решения. Для двумерного нелокального уравнения ФКПП получена система интегродифференциальных уравнений, описывающая динамику многообразия локализации решения в классе квазиклассически сосредоточенных функций. Получены асимптотические решения на больших временах, описывающие проекцию квазистационарной структуры на многообразие локализации. Общие положения проиллюстрированы примером, для которого аналитическое и численное решения хорошо согласуются.

Представляет интерес задача о восстановлении решения  $u(\vec{x}, t)$  нелокального уравнения ФКПП по плотности  $\rho(t, s)$  и многообразию  $\Lambda_t^k$ . Метод ВКБ–Маслова дает принципиальную возможность найти асимптотическое решение этой задачи. Также представляет интерес непосредственное исследование системы ЭЭ, в том числе и для  $k > 1$ .

Предлагаемый подход допускает обобщения на случай многообразий локализации более общей топологической структуры, например, неодносвязные многообразия [Маслов, 1973]. Это позволит проводить асимптотический анализ соответствующих структур.

## Список литературы

- Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. — М.: Наука, 1966. — 296 с.
- Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. матем. физика. — 1992. — Т. 92, № 2. С. 215–254.
- Будрене Е. О., Полежаев А. А., Птицын М. О. Модель образования пространственно упорядоченных структур в колониях подвижных бактерий // Биофизика. — 1986. — Т. 31. — С. 886–870.
- Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
- Колмогоров А. Н., Петровский Н. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–16.
- Комаров М. В. Периодическая задача для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 66–72.
- Комаров М. В., Шишмарёв И. А. Периодическая задача для уравнения Ландау–Гинзбурга // Матем. заметки. — 2002. — Т. 72, Вып. 2. — С. 227–235.
- Лямкин В. А., Резаев Р. О., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Система Эйнштейна–Эренфеста типа  $(k, 1)$  для нелинейного уравнения Фоккера–Планка // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. — 2009. — № 2. — С. 26–37.
- Маслов В. П. Операторные методы. — М.: Наука, 1973. — 544 с.
- Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.
- Цыганов М. А., Асланиди Г. В., Шахбазян В. Ю., Бекташев В. И., Иваницкий Г. Р. Нестационарная динамика бактериальных популяционных волн // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380. — С. 828–833.

- Bagrov V. G., Belov V. V., Trifonov A. Yu.* Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrödinger type // *Ann. of Phys. (NY)*. — 1996. — Vol. 246, No. 2. — P. 231–80.
- Da Cunha J. A. R., Penna A. L. A., Vainstein M. H., Morgado R., Oliveira F. A.* Self-organization analysis for a nonlocal convective Fisher equation // *Phys. Lett. A*. — 2009. — Vol. 373. — P. 661–667.
- Da Cunha J. A. R., Penna A. L. A., Oliveira F. A.* Pattern formation and coexistence domains for a nonlocal population dynamics // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 83. — P. 015201(R).
- Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // *Annual Eugenics*. — 1937. — Vol. 7. — P. 355–369.
- Fuentes M. A., Kuperman M. N., Kenkre V. M.* Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 158104.
- Fuentes M. A., Kuperman M. N., Kenkre V. M.* Analytical considerations in the study of spatial patterns arising from nonlocal interaction effects // *J. Phys. Chem. B*. — 2004. — Vol. 108. — P. 10505–10508.
- Kenkre V. M.* Results from variants of the Fisher equation in the study of epidemics and bacteria // *Physica A*. — 2004. — Vol. 342. — P. 242–248.
- Matsushita M., Hiramatsu F., Kobayashi N., Ozawa N., Yamazaki Y., Matsuyama T.* Colony formation in bacteria: experiments and modeling // *Biofilms*. — 2004. — Vol. 1. — P. 305–317.
- Murray J. D.* *Mathematical Biology. I. An Introduction*. Third edition. — N. Y., Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.