

УДК: 519.8

Исследование механизмов формирования сегментированных волн в активных средах

М. Ю. Борина, А. А. Полежаев^а

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53

E-mail: ^аapol@lpi.ru

Получено 17 мая 2013 г.,
после доработки 27 сентября 2013 г.

В данной работе предложены три возможных механизма формирования сегментированных волн и спиралей. Структуры такого рода были обнаружены в реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля OT. Первый механизм обусловлен взаимодействием двух подсистем, одна из которых возбудима, а другая неустойчива по Тьюрингу. Показано, как под воздействием поперечной неустойчивости из однородной гладкой спиральной волны формируется сегментированная спираль. В зависимости от свойств подсистем мы демонстрируем несколько различных по виду и форме сегментированных спиральных волн. В качестве второго механизма мы предлагаем «дробление» бегущей волны в окрестности бифуркационной точки коразмерности два, в которой пересекаются границы тьюринговской и волновой неустойчивостей. Наконец, мы показываем, что сегментированные волны могут возникать в некоторых простых двухкомпонентных моделях типа «реакция–диффузия», имеющих более одного стационарного состояния, в частности, в модели ФитцХью–Нагумо.

Ключевые слова: сегментированные волны и спирали, возбудимая среда, диффузионная неустойчивость

On the mechanisms for formation of segmented waves in active media

M. Yu. Borina, A. A. Polezhaev

*P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
Russia, 119991, Moscow, Leninskiy prospekt, 53*

Abstract. — We suggest three possible mechanisms for formation of segmented waves and spirals. These structures were observed in the Belousov–Zhabotinsky reaction dispersed in a water-in-oil aerosol OT microemulsion. The first mechanism is caused by interaction of two coupled subsystems, one of which is excitable, and the other one has Turing instability depending on the parameters. It is shown that, segmented spirals evolve from ordinary smooth spirals as a result of the transverse Turing instability. We demonstrate that depending on the properties of subsystems different segmented spirals emerge. For the second mechanism we suggest "splitting" of the traveling wave in the vicinity of the bifurcation point of codimension-2, where the boundaries of the Turing and wave instabilities intersect. Finally we show that the segmented waves can emerge in some simple two-component reaction-diffusion models having more than one steady state, particularly in a FitzHugh–Nagumo model.

Keywords: segmented waves and spirals, excitable media, diffusion instability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 533–542 (Russian).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 11-01-00392.

© 2013 Мария Юрьевна Борина, Андрей Александрович Полежаев

Введение

Реакционно-диффузионный подход, предложенный Аланом Тьюрингом в работе «Химическая основа морфогенеза» [Turing, 1952], широко применяется для объяснения множества явлений биологической самоорганизации [Nicolis, Prigogine, 1977; Meinhardt, 2008; Maini, Othmer, 2000].

В настоящий момент найдены несколько экспериментальных лабораторных систем, позволяющих изучать механизмы формирования неоднородных пространственно-временных структур [Lengyel, 1990; Orban, 1982; Mikhailov, Ertl, 1996]. Пожалуй, наиболее «богатой» среди них оказалась реакция Белоусова–Жаботинского, протекающая в обращенной микроэмульсии аэрозоля ОТ (так называемая БЖ-АОТ система, разработанная группой В. К. Ванага [Vanag, Epstein, 2001]). Эта система позволила наблюдать некоторые новые типы волн и структур (см. обзор [Ванаг, 2004] и ссылки в нем). В частности впервые получены волны, которые по мере распространения разбиваются на сегменты, перемещающиеся без когерентного скручивания в небольшие спирали, как это наблюдали ранее [Agladze et al., 1984; Ouyang, Flesselles, 1996; Mare, Panfilov, 1997]. Эти структуры, так называемые сегментированные или штриховые волны, были обнаружены в виде спиральных и плоских волн (см. рис. 1) в свежеприготовленной микроэмульсии и исчезали спустя 2–3 часа [Vanag, Epstein, 2003a; Vanag, Epstein, 2003b]. Впоследствии подбором параметров БЖ-АОТ системы удалось получить более долгоживущий режим [Carballido-Landeira et al., 2008].

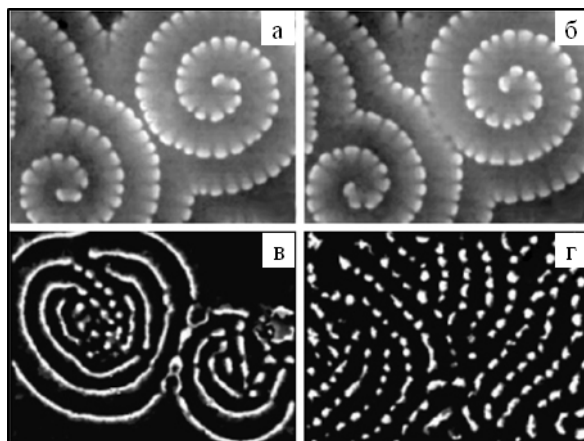


Рис. 1. (а, б) Сегментированные спирали, (в, г) сегментированные волны (штрих-волны) в БЖ-АОТ-системе. Время между снимками (а) и (б) 66 секунд; между (в) и (г) 1800 секунд. Размер снимков (а, б) 3.72×4.82 мм; (в, г) 2.54×1.88 мм (из работ [Vanag, Epstein, 2003a; Vanag, Epstein, 2003b])

Сегментированные волны были также найдены в CDMIA реакции [Yang et al., 2005] и в БЖ-СДС системе, являющейся реакционно-конвективно-диффузионной системой [Rossi, Liveri, 2009; Rossi, 2012].

Цель настоящей работы — исследовать возможные механизмы формирования сегментированных волн. Мы предлагаем три варианта:

- взаимодействие двух подсистем, одна из которых возбудима, а другая неустойчива по Тьюрингу;

- «дробление» бегущей волны в окрестности бифуркационной точки коразмерности два, в которой пересекаются границы тьюринговской и волновой неустойчивостей;

- реализуемое в простых двухкомпонентных моделях типа «реакция-диффузия» взаимодействие двух стационарных состояний: возбудимого и обладающего псевдотьюринговской (согласно [Vanag, Epstein, 2003a]) неустойчивостью.

Теоретические выкладки мы подтвердим численными экспериментами с использованием амплитудных уравнений [Kuramoto, 1984], моделей ФитцХью–Нагумо [FitzHugh, 1962] и брюсселятора [Glandsdorff, Prigogine, 1971].

Взаимодействие двух подсистем, одна из которых возбудима, а другая неустойчива по Тьюрингу

Рассмотрим случай, когда некоторая распределенная система представляет собой объединение двух подсистем, одна из которых соответствует возбудимой активной среде, а другая потенциально (при соответствующих параметрах) обладает тьюринговской неустойчивостью. Первая подсистема параметрически влияет на вторую подсистему, переводя ее в неустойчивое состояние.

В качестве первой подсистемы мы будем использовать модель ФитцХью–Нагумо вида

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - u^3/3 - v + D_F \nabla^2 u, \\ \frac{dv}{dt} = (u - \gamma v + \delta)\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где ε — мало. Нас интересует случай, когда нуль-изоклины пересекаются в одной единственной точке (например, как показано на рис. 2а), отвечающей однородному состоянию покоя, устойчивому относительно подпороговых возмущений, но генерирующему одиночный импульс при надпороговом возмущении. Как хорошо известно, в такой системе при соответствующих начальных условиях может сформироваться гладкая спиральная волна, как показано на рисунке 2б, в.

Для численных экспериментов здесь и далее использовалась собственная программа. Расчеты проводились в ограниченной области методом переменных направлений (подробная схема изложена в работе [Борина, Полежаев, 2011]). В качестве граничных использовались условия Неймана.

На рисунке 2б, в представлены результаты численного счета для модели (1), демонстрирующие формирование спиральной волны в квадратной области с нулевыми потоками на границах (условия Неймана). В качестве начальных условий использовался отрезок плоской волны со свободным концом.

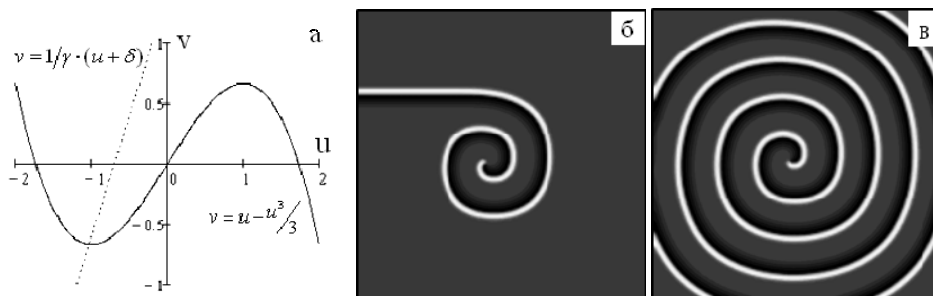


Рис. 2. (а) Нуль-изоклины и (б, в) развитие спиральной волны в модели (1) в моменты времени (б) $t = 120$, (в) $t = 300$ (показано пространственное распределение переменной u). Параметры модели: $\varepsilon = 0.09$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.7$, $D_F = 0.1$. Размер области (б), (в) 200×200 мм

В качестве второй подсистем мы будем использовать как модель ФитцХью–Нагумо, в которой параметр ε уже не является малым, а коэффициент диффузии ингибиторной переменной отличен от нуля, так и модель «брюсселятор», имеющую вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^2 y + \nabla^2 x, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y + D_B \nabla^2 y. \end{cases} \quad (2)$$

ФитцХью-Нагумо и брюсселятор

Составим объединенную систему. При этом один из параметров модели «брюсселятор», a или b (мы рассмотрели оба случая), выберем линейно зависимым от активаторной переменной u модели ФитцХью–Нагумо:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \frac{u^3}{3} - v + D_F \nabla^2 u, \\ \frac{dv}{dt} = (u - \gamma v + \delta) \varepsilon, \\ \frac{dx}{dt} = a - (b(u) + 1)x + x^2 y + \nabla^2 x, \\ \frac{dy}{dt} = b(u)x - x^2 y + D_B \nabla^2 y, \end{cases} \quad (3)$$

где $b(u) = \begin{cases} b_c + \Delta \cdot u, & u \geq 0 \\ b_c, & u < 0 \end{cases}$ b_c — значение параметра b , соответствующее бифуркации Тьюринга.

Здесь и далее мы используем один и тот же набор параметров возбудимой подсистемы, приведенный в подписи к рисунку 2. Значения параметров модели «брюсселятор» мы подбираем так, что они удовлетворяют условиям бифуркации Тьюринга [Романовский и др., 1984]. Кроме того должны быть соизмеримыми характерные размеры структур, формирующихся в подсистемах: спиральной волны и структур Тьюринга.

Гладкая спиральная волна, развивающаяся в возбудимой подсистеме (показанная на рис. 2) под действием неустойчивости, во второй подсистеме начинает дробиться. На рисунке 3 представлены результаты численного эксперимента для системы (3). В качестве начальных условий для второй подсистемы использовалось однородное распределение, возмущенное случайным шумом. Изображена одиночная сегментированная спираль, а также взаимодействие двух спиралей. На этом и последующих рисунках показано пространственное распределение активаторной переменной потенциально неустойчивой по Тьюрингу подсистемы (в данном случае модели «брюсселятор»).

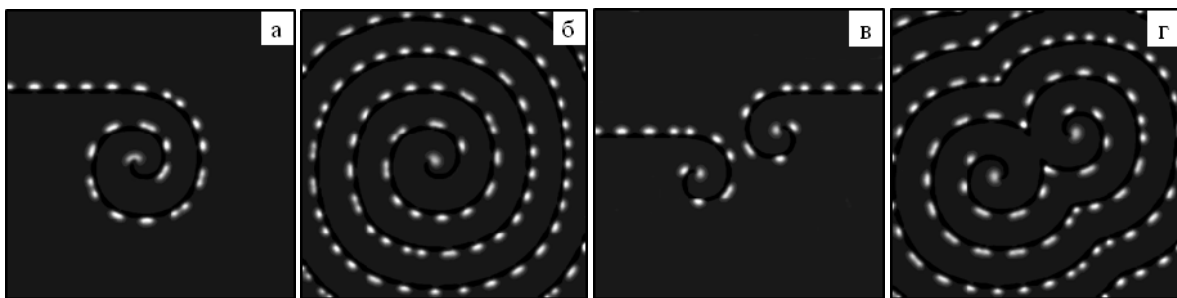


Рис. 3. (а, б) Развитие одиночной сегментированной спирали и (в, г) взаимодействие двух таких спиралей в моменты времени (а) $t = 120$, (б) $t = 300$, (в) $t = 70$, (г) $t = 275$ (переменная x). Параметры модели: $\varepsilon = 0.09$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.7$, $D_F = 0.1$, $a = 2$, $D_B = 100$, $b_c = 1.25$, $\Delta = 2$. Размер области 200×200 мм

Рассмотрим теперь случай, когда от переменной u зависит параметр a модели «брюсселятор»: $a(u) = \begin{cases} a_c + \Delta \cdot u, & u \geq 0 \\ a_c, & u < 0 \end{cases}$ где a_c — значение параметра a в точке бифуркации. Сегментированная спиральная волна, которая формируется в этом случае (рис. 4), существенно отличается от предыдущей.

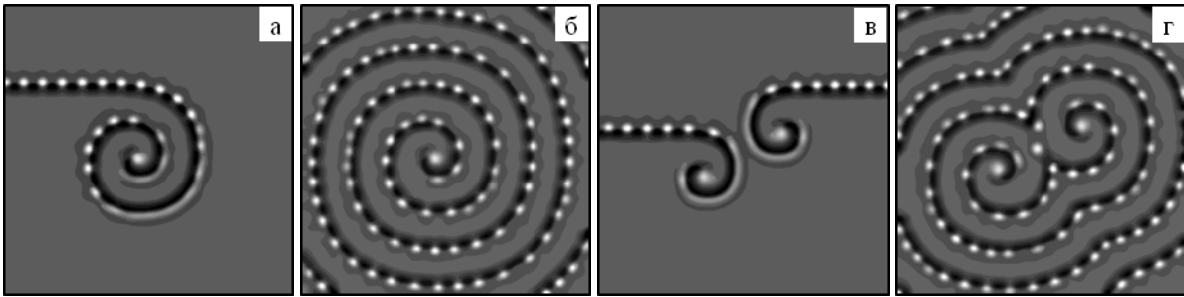


Рис. 4. (а, б) Развитие одиночной сегментированной спирали и (в, г) взаимодействие двух таких спиралей в моменты времени (а) $t = 120$, (б) $t = 300$, (в) $t = 70$, (г) $t = 280$ (переменная x). Параметры модели: $\varepsilon = 0.09, \gamma = 0.5, \delta = 0.7, D_F = 0.1, b = 2, D_B = 100, a_c = 4.2, \Delta = -1$. Размер области 200×200 мм

Две модели ФитцХью–Нагумо

Составим систему, объединяющую две модели ФитцХью–Нагумо:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \frac{u^3}{3} - v + D_1 \nabla^2 u, \\ \frac{dv}{dt} = (u - \gamma_1 v + \delta_1) \varepsilon, \\ \frac{d\tilde{u}}{dt} = (\tilde{u} - \frac{\tilde{u}^3}{3} - \tilde{v} + I(u) + D_2 \nabla^2 \tilde{u}) \alpha, \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} = (\tilde{u} - \gamma_2 \tilde{v} + \delta_2 + \nabla^2 \tilde{v}) \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

где $I(u) = \begin{cases} I_c + \Delta \cdot u, & u \geq 0 \\ I_c, & u < 0 \end{cases}$, I_c — бифуркационное значение параметра I . Формирующаяся в системе (4) сегментированная спираль, полученная в численном эксперименте, изображена на рисунке 5. Мы также демонстрируем взаимодействие двух спиралей, развивающихся, из отрезка, возмущенного в центре области.

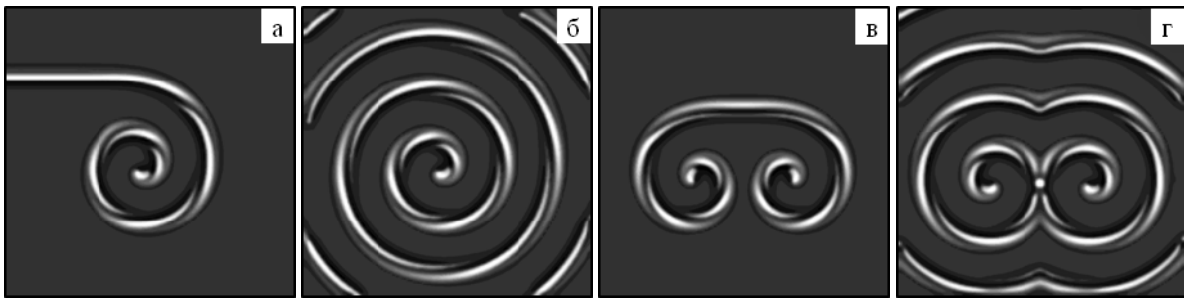


Рис. 5. (а, б) Развитие одиночной сегментированной спирали и (в, г) взаимодействие двух таких спиралей в моменты времени (а) $t = 75$, (б) $t = 200$, (в) $t = 60$, (г) $t = 225$ (переменная \tilde{u}). Параметры модели: $\varepsilon = 0.09, \gamma_1 = 0.5, \delta_1 = 0.7, D_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.5, \delta_2 = 0.5, D_2 = 0.05, \alpha = 1, I_c = 0.1, \Delta = 0.03$. Размер области 100×100 мм

Если в системе (4) изменить один из параметров, влияющих на характерный размер формирующейся тьюринговской структуры, мы получим сегментированную спиральную волну, представленную на рисунке 6.

В результате проведенных численных экспериментов мы можем заключить, что в зависимости от свойств взаимодействующих подсистем возможно формирование различных по форме и виду сегментированных волн.

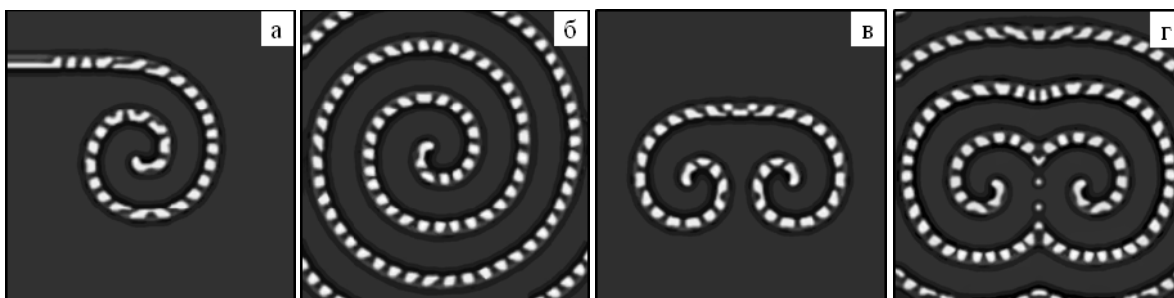


Рис. 6. (а, б) Развитие одиночной сегментированной спирали и (в, г) взаимодействие двух таких спиралей в моменты времени (а) $t = 75$, (б) $t = 200$, (в) $t = 60$, (г) $t = 233$ (переменная \tilde{u}). Параметры модели: $\varepsilon = 0.09$, $\gamma_1 = 0.5$, $\delta_1 = 0.7$, $D_1 = 0.1$, $\gamma_2 = 0.5$, $\delta_2 = 0.5$, $D_2 = 0.05$, $\alpha = 5$, $I_c = 0.1$, $\Delta = 0.03$. Размер области 100×100 мм

«Дробление» бегущей волны в окрестности бифуркационной точки коразмерности два, в которой пересекаются границы волновой и тьюринговской неустойчивостей

Допустим, что волна описывается некоторой переменной u . В окрестности точки пересечения границ тьюринговской и волновой неустойчивостей ее можно представить в виде суперпозиции соответствующих мод:

$$u(r, t) = A_T e^{ik_T r} + A_L e^{i(\omega t - k_W r)} + A_R e^{i(\omega t - k_W r)}.$$

Здесь A_T — комплексная амплитуда моды, соответствующей волновому вектору k_T , ставшей неустойчивой в результате тьюринговской бифуркации; A_R, A_L — комплексные амплитуды мод, соответствующих одинаковым по модулю, но разным по направлению волновым векторам $\pm k_W$ и частоте ω , ставших неустойчивыми в результате волновой бифуркации.

Если предположить, что бифуркации являются суперкритическими, то вблизи них динамика системы взаимодействующих мод может быть описана при помощи амплитудных уравнений типа Гинзбурга–Ландау следующего вида [Nicola, 2001]:

$$\begin{aligned} \partial_t A_T &= \eta_T A_T - |A_T|^2 A_T - h_{TW} (|A_L|^2 + |A_R|^2) A_T, \\ \partial_t A_L &= \eta_W A_L - (1 - ic_1) |A_L|^2 A_L - h_{LR} (1 - ic_2) |A_R|^2 A_L - h_{WT} (1 - ic_3) |A_T|^2 A_L, \\ \partial_t A_R &= \eta_W A_R - (1 - ic_1) |A_R|^2 A_R - h_{LR} (1 - ic_2) |A_L|^2 A_R - h_{WT} (1 - ic_3) |A_T|^2 A_R. \end{aligned} \quad (5)$$

Параметры η_T, η_W определяют отклонение от тьюринговской и волновой бифуркаций соответственно; параметры h_{TW}, h_{WT}, h_{LR} характеризуют силу конкуренции между модами; c_1, c_2 и c_3 определяют отношение мнимых и действительных частей коэффициентов перед соответствующими кубическими членами.

В работе [Nicola, 2001] проведено исследование существования и устойчивости стационарных решений системы (5). Некоторые полученные результаты представлены в таблице 1.

Используя соотношения, приведенные в таблице 1, мы провели численный эксперимент для системы амплитудных уравнений (5), при этом использовалась программа *MathCad*. На рисунке 7 представлены пространственно-временные графики функции $u(r, t)$.

Для нас представляет интерес смешанный режим, образованный наложением бегущих волн и структур Тьюринга. Возникающие при этом пространственно-временные структуры, представляющие собой «дробленные» бегущие волны, показаны на рисунке 8а. Мы вырезали одну из таких волн, чтобы продемонстрировать ее движение (рис. 8б, в).

Таблица 1

Стационарные режимы	Условия существования	Условия устойчивости
Режим структуры Тьюринга $ A_T \neq 0, A_L = 0, A_R = 0$	$\eta_T > 0$	$\eta_W < h_{WT}\eta_T$
Режим бегущие волны $ A_T = 0,$ $ A_L = 0, A_R \neq 0$ или $ A_L \neq 0, A_R = 0$	$\eta_W > 0$	$h_{RL} > 1, \eta_W > \frac{\eta_T}{h_{TW}}$
Смешанный режим «бегущие волны – структуры Тьюринга» $ A_T \neq 0,$ $ A_L \neq 0, A_R = 0$ или $ A_L = 0, A_R \neq 0$	$1 - h_{WT}h_{TW} > 0$	$\eta_W > h_{WT}\eta_T, \eta_W < \frac{\eta_T}{h_{TW}}$

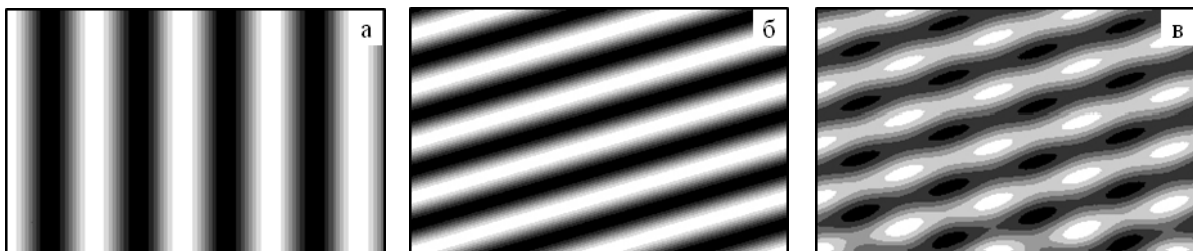


Рис. 7. Пространственно-временные графики $u(r, t)$ (250 пр. ед. \times 80 врем. ед.) некоторых возможных режимов, возникающих в окрестности бифуркационной точки коразмерности два, в которой пересекаются границы волновой и тьюринговской неустойчивостей: (а) структур Тьюринга, (б) бегущих волн, (в) смешанного режима «бегущие волны — структуры Тьюринга»

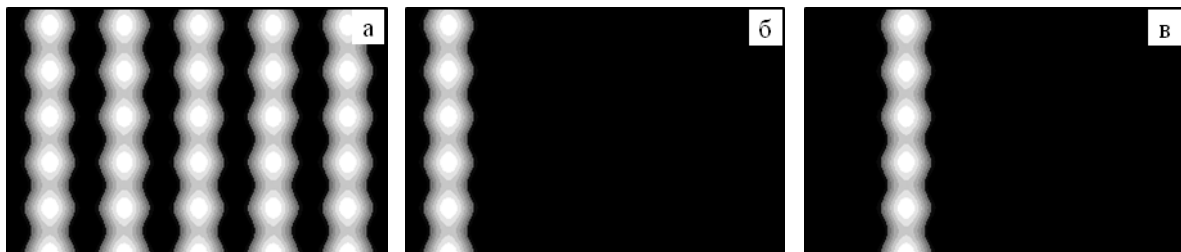


Рис. 8. (а) «Дробленые» бегущие волны $u(x, y, t)$ в момент времени $t = 5$, (б, в) движение одиночной волны: (б) $t = 5$, (в) $t = 11$. Размер области 250×80 мм

Сегментированные волны в простых двухкомпонентных моделях типа «реакция–диффузия», содержащих более одного стационарного состояния

Данный механизм был предложен в работе [Vanag, Epstein, 2003a]. Авторы объясняют сегментирование взаимодействием возбудимого состояния и состояния, вообще говоря, неустойчивого по Тьюрингу, но с тем отличим, что нулевая мода также неустойчива (действительная часть собственного значения характеристического уравнения нулевой моды положительна). Авторы называют такую неустойчивость псевдотьюринговской. В численном эксперименте воспроизводят сегментированные волны в моделях Грея–Скотта и Oregonator.

Мы предлагаем получить сегментированную волну в модели ФитцХью-Нагумо, в которой имеется три особые точки:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \frac{u^3}{3} - v + \nabla^2 u, \\ \frac{dv}{dt} = (\rho u - v + \delta)\varepsilon + D\nabla^2 v. \end{cases} \quad (6)$$

Анализ данной модели показал, что в системе с постоянными значениями параметров невозможно одновременное выполнение условий возбудимости среды (малое ε) и псевдотьюринговской неустойчивости. Однако это становится возможным, если один из параметров, например, параметр ρ , выбрать в виде кусочно-линейной функции $\rho(u) = \begin{cases} \rho_1, & u \geq 0 \\ \rho_2, & u < 0 \end{cases}$. При этом допустимый диапазон параметров, таких что выполнены условия, необходимые для формирования сегментированной волны, очень узок. Дело в том, что одна из особых точек, ответственная за возбудимое состояние, должна располагаться около экстремума кривой изоклины $du/dt = 0$, а обе другие особые точки должны находиться вблизи другого экстремума, что налагает жесткие ограничения на параметры.

На рисунке 9 показаны нуль-изоклины и дисперсионные кривые системы (6). Поясним, что λ_1 и λ_2 являются критическими собственными значениями характеристических уравнений модели (6), линеаризованной соответственно около левой и правой особых точек. Дисперсионные кривые представляют собой зависимость действительной части каждого из λ_1 и λ_2 от величины волнового числа k .

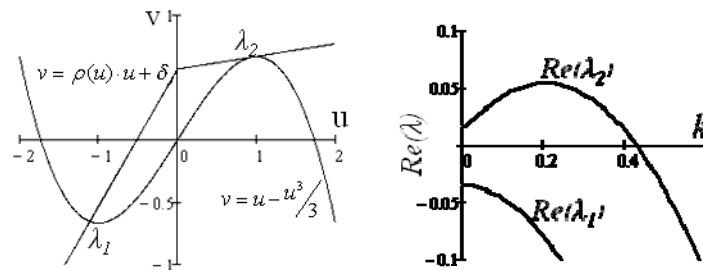


Рис. 9. Нуль-изоклины и дисперсионные кривые модели ФитцХью–Нагумо. Параметры модели: $\varepsilon = 0.09$, $\delta = 0.568$, $\rho_1 = 1.1$, $\rho_2 = 0.1016$, $D = 1.2$

Возникающая в системе (6) сегментированная волна изображена на рисунке 10. Отметим, что полученный режим не является долгоживущим и со временем волна, распадаясь на сегменты, исчезает.

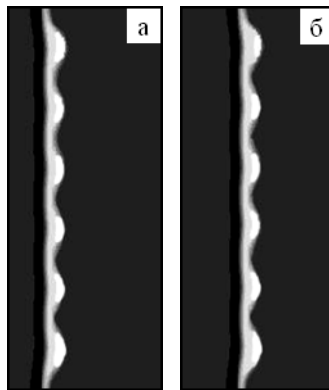


Рис. 10. Сегментированная волна в модели ФитцХью–Нагумо в моменты времени (а) $t = 50$, (б) $t = 60$. Параметры модели: $\varepsilon = 0.09$, $\delta = 0.568$, $\rho_1 = 1.1$, $\rho_2 = 0.1016$, $D = 1.2$. Размер области 65×200 мм

Обсуждение

В данной работе предложены три возможных механизма формирования сегментированных волн и спиралей. Структуры такого рода были обнаружены в пространственно-распределенной реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля ОТ.

Первый механизм обусловлен взаимодействием двух подсистем, одна из которых возбуждаема, а другая неустойчива по Тьюрингу. Показано, как под воздействием поперечной неустойчивости из однородной спиральной волны формируется сегментированная спираль. В зависимости от свойств подсистем мы демонстрируем несколько различных по виду и форме сегментированных спиральных волн, как таких, которые уже наблюдались в экспериментах, так и пока полученных.

В качестве второго механизма мы предложили «дробление» бегущей волны в окрестности бифуркационной точки коразмерности два, в которой пересекаются границы тьюринговской и волновой неустойчивостей. Проведен анализ соответствующих амплитудных уравнений. Результат подтвержден численными экспериментами.

Наконец, мы показали, что сегментированные волны могут возникать в некоторых простых двухкомпонентных моделях типа «реакция–диффузия», имеющих более одного стационарного состояния, в частности, в модели ФитцХью–Нагумо.

На наш взгляд наиболее вероятным кандидатом для объяснения наблюдаемых структур является первый механизм. Прежде всего, это единственный механизм, который реализуется в широком диапазоне параметров. При этом система может находиться как около бифуркации (как это происходит в случае «дробления» бегущей волны), так и вдали от нее. Кроме того, структуры, которые возникают по этому сценарию, являются долгоживущими в отличие от сегментированных волн, возникающих по третьему механизму. Наконец, этот механизм демонстрирует большое количество различных по виду и форме сегментированных волн и спиралей. Варьируя значения соответствующих параметров, определяющих характерный размер формирующихся в подсистемах структур, нетрудно получить желаемый размер сегментов или волны в целом.

Список литературы

- Борина М. Ю., Полежаев А. А. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция–диффузия» // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 135–146.
- Ванаг В. К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова–Жаботинского в обращенной микроэмульсии // УФН. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 991–1010.
- Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984. — 304 с.
- Agladze K. I., Krinsky V. I., Pertsov A. M. Chaos in the non-stirred Belousov–Zhabotinsky reaction is induced by interaction of waves and stationary dissipative structures // Nature. — 1984. — Vol. 308. — P. 834–835.
- Carballido-Landeira J., Berenstein I., Taboada P., Mosquera V., Vanag V. K., Epstein I. R., Perez-Villar V., Munuzuri A. P. Long-lasting dashed waves in a reactive microemulsion // Phys. Chem. Chem. Phys. — 2008. — Vol. 10. — P. 1094–1096.
- FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical J. — 1961. — Vol. 1. — P. 445–466.
- Glandsdorff P., Prigogine I. Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. — New York: Wiley, 1971.

- Koch A., Meinhardt H.* Biological pattern-formation — from basic mechanisms to complex structures // *Rev. Mod. Phys.* — 1994. — Vol. 66 (4). — P. 1481–1507.
- Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* — Springer-Verlag, Berlin, 1984. — 198 p.
- Lengyel I., Rabai G., Epstein I. R.* Experimental and modeling study of oscillations in the chlorine dioxide–iodine–malonic acid reaction // *J. Am. Chem. Soc.* — 1990. — Vol. 112. — P. 9104–9110.
- Maini P. K., Baker R. E., Chuong C.* Developmental biology: the Turing model comes of molecular age // *Science.* — 2006. — Vol. 314 (5804). — P. 1397–1398.
- Maini P. K., Othmer H. G.* *Mathematical Models for Biological Pattern Formation*, in *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 121, Springer (2000)
- Mare A. F. M., Panfilov A. V.* Spiral Breakup in Excitable Tissue due to Lateral Instability // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 1819–1822.
- Meinhardt H.* Models of biological pattern formation: from elementary steps to the organization of embryonic axes // *Curr. Top. Dev. Biol.* — 2008. — Vol. 81. — P. 1–63.
- Mikhailov A. S., Ertl G.* Nonequilibrium Structures in Condensed Systems // *Science.* — 1996. — Vol. 272. — 1596 p.
- Nicola E. M.* *Interfaces between Competing Patterns in Reaction-diffusion Systems with Nonlocal Coupling.* Dissertation. — Dresden, 2001.
- Nicolis G., Prigogine I.* *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems.* — New York: Wiley, 1977. — 491 p.
- Orban M., De Kepper P., Epstein I. R.* An iodine-free chlorite-based oscillator: The chlorite-thiosulfate reaction in a C.S.T.R. // *J. Phys. Chem.* — 1982. — Vol. 86. — P. 431–432.
- Ouyang Q., Flesselles J.-M.* Transition from spirals to defect turbulence driven by a convective instability // *Nature.* — 1996. — V. 379. — P. 143–145.
- Rossi F., Budroni M. A., Marchettini N., Carballido-Landeira J.* Segmented waves in a reaction-diffusion-convection system // *Chaos.* — 2012. — Vol. 22. — P. 037109 [11 pages].
- Rossi F., Liveri M. L. T.* Chemical self-organization in self-assembling biomimetic systems // *Ecological Modelling.* — 2009. — Vol. 220. — P. 1857–1864.
- Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* — 1952. — Vol. 237. — P. 37–72.
- Vanag V. K., Epstein I. R.* Pattern Formation in a Tunable Medium: The Belousov–Zhabotinsky Reaction in an Aerosol OT Microemulsion // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87. — P. 228301 [4 pages].
- Vanag V. K., Epstein I. R.* Dash waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* — 2003a. — Vol. 90. — P. 098301 [4 pages].
- Vanag V. K., Epstein I. R.* Segmented spiral waves in a reaction-diffusion system // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 2003b. — Vol. 100. — 14635 p.
- Yang L., Berenstein I., Epstein I. R.* Segmented waves from a spatiotemporal transverse wave instability // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — 038303 p.
- Yuan Guo-Yong, Yang Shi-Ping, Wang Guang-Rui, Chen Shi-Gang.* Segmented Spiral Waves and Anti-phase Synchronization in a Model System with Two Identical Time-Delayed Coupled Layers // *Commun. Theor. Phys.* — 2008. — Vol. 49. — P. 174–180.