

УДК 517.972; 519.6; 539.3

## Теоремы о предельной нагрузке для жесткопластических сплошных сред с внутренними степенями свободы и их приложение к континуальным сетчатым оболочкам

В. А. Грачев, Ю. С. Найштут<sup>а</sup>

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,  
Россия, 443001, г. Самара, Молодогвардейская ул., д. 194

E-mail: <sup>а</sup>neustadt99@mail.ru

Получено 16 марта 2013 г.

Изучается геометрия сплошных сред с внутренними степенями свободы методом подвижного репера Картана. Выводятся условия неразрывности деформаций в форме уравнений структуры для многообразий. Предлагаются определяющие соотношения для жесткопластических сред с внутренними степенями свободы. Доказываются аналоги теорем о предельных нагрузках. Показано применение этих теорем для анализа поведения жесткопластических континуальных оболочек из материалов, обладающих памятью формы. Приведено вычисление предельных нагрузок для оболочек вращения при воздействии внешних сил и при восстановлении формы от нагрева.

Ключевые слова: жесткопластическая среда, репер Картана, определяющие уравнения, предельная нагрузка, память формы, оболочки вращения

## Ultimate load theorems for rigid plastic solids with internal degrees of freedom and their application in continual lattice shells

V. A. Grachev, Yu. S. Nayshtut

*Samara State Architectural and Building University, 194 Molodogvardeyskaya st., Samara, 443096, Russia*

**Abstract.** — This paper studies solids with internal degrees of freedom using the method of Cartan moving hedron. Strain compatibility conditions are derived in the form of structure equations for manifolds. Constitutive relations are reviewed and ultimate load theorems are proved for rigid plastic solids with internal degrees of freedom. It is demonstrated how the above theorems can be applied in behavior analysis of rigid plastic continual shells of shape memory materials. The ultimate loads are estimated for rotating shells under external forces and in case of shape recovery from heating.

Keywords: rigid plastic solids, Cartan hedron, constitutive equations, ultimate load, shape memory, rotating shells

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol.5, no. 3, pp. 423–432 (Russian).

Статья состоит из двух частей. Вначале излагаются теоремы о предельной нагрузке [Койтер, 1961; Качанов, 1969] применительно к сплошным средам с внутренними степенями свободы. Затем эти теоремы распространяются на деформируемые тела, в которых внутренние степени свободы реализованы в виде пластических шарниров из материалов с памятью формы.

Во второй части статьи общие соображения применяются к анализу поведения осесимметричных континуальных оболочек, составленных из тонких пластинок, соединенных жесткопластическими шарнирами.

## Общая теория

Рассмотрим трехмерное пространство (многообразие), точки которого будем характеризовать в фиксированной системе отсчета вектором  $\vec{r}$ . С каждой точкой  $P$  свяжем ортогональный трехгранник, а буквы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  означают единичные векторы его осей. Пусть пространство заполнено сплошной средой, так что близкие к  $\vec{r}$  точки ( $\vec{r} + d\vec{r}$ ) характеризуются новым трехгранником с единичными векторами осей, отличающимися от введенных ранее на  $d\vec{e}_1, d\vec{e}_2, d\vec{e}_3$ . Разложения дифференциалов векторов по осям первоначального трехгранника имеет вид [Картан, 1962]

$$d\vec{r} = \omega^j \vec{e}_j, \quad d\vec{e}_i = \omega_{ij} \vec{e}_j. \quad (1)$$

Здесь  $\omega^j, \omega_{ij}$  — дифференциальные формы, линейные относительно дифференциалов исходных переменных  $\alpha_i$ . Область изменения параметров назовем  $D = (A_1 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < A_2)$ .

Формы  $\omega^j, \omega_{ij}$  не являются независимыми в силу соотношений

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1)^2 = (\vec{e}_2)^2 = (\vec{e}_3)^2 &= 1, \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Шесть форм  $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{13}$  удовлетворяют уравнениям структуры

$$d\omega^j = [\omega_k^j \cdot \omega^k], \quad d\omega_{ij} = [\omega_{ik} \cdot \omega_{kj}], \quad \omega_k^j = -\omega_{ik}. \quad (2)$$

В формулах (2) квадратные скобки означают внешнее произведение форм, а  $d\omega_{ij}$  — внешний дифференциал формы. Соотношения структуры (2) — это уравнения сплошности (неразрывности) деформируемой среды, точкам которой можно приписать перемещения  $\vec{u} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ , где  $\vec{r}_1$  — положение точки  $P$  после деформирования в фиксированной системе отсчета.

Действительно, если существует решение системы (2), то найдется семейство прямоугольных трехгранников, что формы  $\omega^j, \omega_{ij}$  порождают непрерывное многообразие, характеризуемое векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_1$ . Следовательно, для того, чтобы уравнения (2) описывали непрерывные движения сплошных сред, они должны содержать не менее шести функций (параметров). Но в систему (1) входят девять функций (компоненты производных вектора  $\vec{u}$ ), и она допускает различные решения в зависимости от свойств сплошной среды. В рамках механики деформируемых тел дополнительные зависимости получают на основе уравнений движения (равновесия) и определяющих уравнений между напряжениями и перемещениями. Другими словами, вводится симметричный тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  (шесть независимых компонент), который связывают определяющими уравнениями с вектором  $\vec{u}$ . Принимая затем во внимание условия равновесия (движения), получают разрешимую систему из девяти уравнений.

Но использование в качестве переменных производных вектора  $\vec{u}$  не является единственным. Имея в виду приложение к жесткопластическим телам, примем, что формы  $\omega^j, \omega_{ij}$  за-

висят от  $n$  внутренних параметров  $\varphi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), между которыми существует  $m$  зависимостей типа

$$\Phi_l(\varphi_i, \varphi_{i,t}) = 0, \quad l=1,2,\dots,m, \quad \varphi_{i,t}(\alpha_i) \in L_1(D), \quad \varphi_i = \int_0^t \varphi_{i,t}(\alpha_i, s) ds. \quad (3)$$

Нижний индекс  $t$  после запятой обозначает производную по времени абстрактной функции в нормированном пространстве  $L_1(D)$ . Таким образом, количество независимых функций  $\varphi_i$  равно  $p = n - m$ . Получается, что если  $p \geq 6$ , то система уравнений (2) определяет движение сплошной среды. Если  $p < 6$ , то сплошная среда может перемещаться только как абсолютно твердое тело.

Рассмотрим наиболее важный случай  $p = 6$ , тогда континуум образует механизм, геометрия которого определяется формой границы  $\partial D$  области  $D$ , а движение такого механизма происходит без приложения объемных сил. Будем изучать медленные движения, происходящие при постоянной температуре. Говоря иначе, заменим вектор перемещений  $\vec{u}$  на вектор скоростей  $\vec{v} = \vec{u}_{,t}$ , а для единичных векторов в многообразии скоростей сохраним обозначения  $\vec{e}_i$ .

Дополним (2) уравнениями, вытекающими из принципа виртуальных мощностей [Жермен, 1983], который примем в следующей форме: для любых функций  $\varphi_i(\alpha_j)$ , удовлетворяющих (3) и называемых возможными, существуют функции  $M_i(\alpha_j)$ , что выполняются тождества (4)

$$\int_D M_i \varphi_{i,t} dV = \int_D F_i v_i dV + \int_{\partial D} P_i v_i dS. \quad (4)$$

Буквой  $D$  обозначается область, занятая сплошной средой,  $\partial D$  — ограничивающая ее поверхность. Выражение  $dV$  — дифференциал объема в точке  $P$ , а  $dS$  — дифференциал площади граничной поверхности, на которой задан вектор напряжений  $P_i$ . Величины  $M_i$  — внутренние напряжения, отвечающие возможным скоростям  $\varphi_{i,t}$ . Буквы  $F_i, P_i$  — это векторы объемных и поверхностных сил. Так как параметры  $\varphi_i(\alpha_j)$  не являются независимыми, то тождеству (4) отвечают  $(n - m)$  уравнений равновесия. Если для сплошной среды известна связь между действительными значениями  $M_i$  и  $\varphi_i$ , то совместное решение (3) и (4) позволяет определить напряженно-деформированное состояние. В последующем изложении рассматривается жесткопластическая среда, для которой соотношения между  $M_i$  и  $\varphi_i$  имеют вид:

$$\varphi_{i,t} = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_i}, \quad (5)$$

если  $f = k$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , то  $\lambda > 0$ ; если  $f < k$ , или  $f = k$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t} < 0$ , то  $\lambda = 0$ .

В качестве  $f(M_i)$  может быть принята функция  $n$  переменных, которая при условии  $f(M_i) = k$  (здесь  $k$  — постоянная) выделяет в  $n$ -мерном пространстве выпуклую область  $D^T$  с границей  $\hat{S}^T$  (рис. 1). В идеальной жесткопластической задаче функция  $f(M_i)$  является однородной первой степени, то есть, для любого числа  $c$  выполняется равенство

$$f(cM_i) = cf(M_i). \quad (6)$$

Для определенности возьмем

$$f = \left(\frac{1}{2} a_i^2 M_i^2\right)^{1/2}. \quad (7)$$

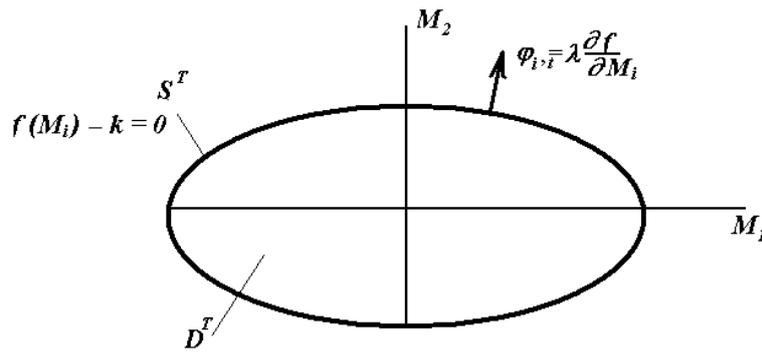


Рис. 1. Поверхность нагружения жесткопластической модели

В работах [Мосолов, Мясников, 1981] показано, что задача (1)–(5) равносильна проблеме минимума функционала

$$L(\varphi_{i,t}) = \int_D \Pi(\varphi_{i,t}) dV + \int_D F_i v_i dV + \int_{\partial D} P_i v_i dS. \quad (8)$$

Здесь диссипативный потенциал  $\Pi(\varphi_{i,t})$  — это преобразование Юнга функции

$$f^*(M_i) = 0, \text{ если } f \leq k \quad \text{и} \quad f^*(M_i) = \infty, \text{ если } f > k.$$

Таким образом,

$$\Pi(\varphi_{i,t}) = \sup_{M_i} (\varphi_{i,t} M_i - f^*(M_i)). \quad (9)$$

Переменные  $M_i$  выбираются из множества непрерывных ограниченных функций, а  $\varphi_{i,t}$  — пространство мер в объеме  $V$ . Повторяя рассуждения цитированной книги, получим такие результаты о движении изучаемых сред (теоремы о предельной нагрузке):

Пусть  $P_i = 0$ , а нагрузка  $F_i$  изменяется пропорционально параметру  $p$

$$F_i = p(t)F_{i0}. \quad (10)$$

В этих условиях найдется число  $p = p^*$ , что одновременно существует минимум функционала  $L(\varphi_{i,t})$  и такое решение системы (4), при котором выполняется условие (5).

Функция  $\lambda(\alpha_i)$  определяется с точностью до константы. В механических терминах последнее означает, что при  $p = p^*$  возникает неограниченное течение среды.

Напряжения в точках, в которых наблюдается пластическое течение, располагаются на поверхности  $f = (\frac{1}{2}a_i^2 M_i^2)^{1/2} = k$ , и имеет место равенство

$$W = \int_D \Pi(\varphi_{i,t}) dV = - \int_D F_i v_i dV = -A. \quad (11)$$

Здесь  $W$  — скорость изменения внутренней энергии,  $A$  — мощность внешних сил.

Изложенные результаты допускают перенесение на материалы, обладающие памятью формы [Бертрам, 1982; Найштут, 2008]. Для таких материалов пластическое течение имеет следующую особенность. Если при «комнатной» температуре  $T_0$  наблюдается одна поверхность нагружения

$$f = (\frac{1}{2}a_i^2 M_i^2)^{1/2} = k, \quad (12)$$

то при повышении температуры  $T_0 < T_1 < \dots < T_i$  появляется новая (внутренняя) поверхность (рис. 2), подобная внешней с коэффициентом подобия  $\varepsilon_i$ , так что  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i$ . Область, ограниченную поверхностями нагружения  $S^{T_i}$  и  $S_{\varepsilon}^{T_i}$ , назовем  $D_{\varepsilon}^{T_i}$ . Существует температура, когда поверхность  $S_{\varepsilon}^{T_i}$  стягивается в точку. Эту температуру  $T_{\varepsilon}$  называют температурой восстановления формы.

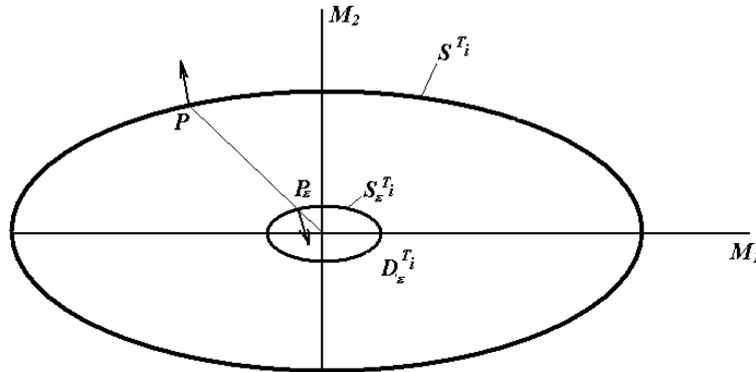


Рис. 2. Поверхности нагружения жесткопластической модели с памятью формы

Убедимся, что если сплошная среда была деформирована при «комнатной» температуре до значения  $\phi_i^0$  за счет внешней нагрузки, то при температуре  $T_{\varepsilon}$  среда вернется в исходное состояние, если затратить тепло в соответствии с первым законом термодинамики

$$\int_D \dot{q} dV = W + A = \int_D \Pi_{\varepsilon}(\phi_{i>i}) dV + \int_D F_i v_i dV. \tag{13}$$

Второй закон термодинамики в форме Клаузиуса принимает вид

$$\int_D \dot{q} dV \leq T_{\varepsilon} \dot{H} = \int_D \Pi_{\varepsilon}(\phi_{i>i}) dV. \tag{14}$$

Здесь  $\dot{H}$  — скорость изменения энтропии тела, а  $\dot{q}$  — скорость подвода тепла к единице объема при температуре  $T_{\varepsilon}$ . В (13), (14) диссипация  $\Pi_{\varepsilon}(\phi_{i>i})$  подсчитывается на поверхности  $S^{T_i}$ , то есть, когда  $\varepsilon_i = 0$ , то  $k_i = \bar{k}$ . Говоря иначе, предполагается, что скорости изменения внутренней энергии и энтропии при нагружении силами и «обратной» деформации одинаковы.

Если нагрузка  $F_i$  такова, что найдутся переменные  $M_i^0$ , удовлетворяющие тождественно уравнениям

$$\int_D M_i^0 \phi_{i>i} dV = \int_D F_i v_i dV \tag{15}$$

и располагающиеся между поверхностями  $S^{T_i}$  и  $S_{\varepsilon}^{T_i}$ , то для нагрузки  $p_{\varepsilon}(t)F_i$  можно определить понятия статического и кинематического коэффициентов  $p_{\varepsilon s}^*$ ,  $p_{\varepsilon k}^*$ .

Статический коэффициент равен  $p_{\varepsilon s}^* = \inf p_{\varepsilon}(t)$ . Нижняя грань разыскивается среди таких чисел, что равенство

$$p_{\varepsilon} \int_D M_i^0 \phi_{i>i} dV = \int_D M_i \phi_{i>i} dV \tag{16}$$

выполняется с допустимыми функциями  $\phi_{i>i}$  и  $M_i \in D_{\varepsilon}$ .

Кинематический коэффициент найдем по формуле  $p_{\varepsilon k}^* = \sup p_{\varepsilon}(t)$ , где верхняя грань выбирается среди величин

$$\varepsilon \int_D \Pi_{\varepsilon}(\varphi_{i>t}) dV \geq p_{\varepsilon} \int_D M_i^0 \varphi_{i>t} dV. \quad (17)$$

Рассуждая как [Мосолов, Мясников, 1981], докажем теорему о предельной нагрузке:

$$p_{\varepsilon k}^* = p_{\varepsilon s}^* = p^*. \quad (18)$$

Кроме того, существуют скорости  $\dot{\varphi}_{i>t}$ , что на поверхности  $S_{\varepsilon}^{T_i}$  выполняются соотношения (5) с  $\lambda > 0$ .

Так как величина  $\lambda$  находится с точностью до константы, то последнюю можно определить из первого закона термодинамики. Второе начало термодинамики (14) следует теперь из первого, если принять во внимание (17).

Полученная теорема допускает иное толкование, широко используемое в современной технике. Допустим, что система деформировалась силами (чему отвечает точка  $P$  на рис. 1). При этом скорость изменения функции диссипации  $\Pi(\varphi_{i>t}) = \lambda_0$ . Если снять нагрузку, то остаточное изменение диссипации за время  $t$  составит

$$\varepsilon_0 = \int_0^t \lambda_0 ds.$$

Нагреем конструкцию без нагрузки до температуры  $T_{\varepsilon}$  и будем подводить тепло со скоростью  $\dot{q}_{\varepsilon}$ . Тело деформируется, напряжения во внутренних его точках лежат на поверхности  $S_{\varepsilon}^{T_i}$  (положение  $P_{\varepsilon}$  на рисунке 2). Таким образом направление тензора пластической деформации будет с точностью до знака тем же, что при первоначальном нагружении.

Если  $F_i = 0$ , то (13) приводит к равенству

$$\int_D \dot{q} dV = \int_D \Pi_{\varepsilon}(\varphi_{i>t}) dV = \frac{\bar{k}}{k} \int_D \lambda_0 dV. \quad (19)$$

Следовательно, «обратная» деформация осуществима, если

$$\dot{q} = \bar{k} \lambda_0 / k. \quad (20)$$

Условие (20) достаточно для «памяти формы», но оно не является необходимым. Для «обратной» деформации сплошной среды необходимо лишь интегральное равенство (19).

## Приложение к континуальным сетчатым оболочкам

В качестве примера рассмотрим применение доказанных теорем к анализу движения континуальной оболочки вращения. Оболочка образована путем соединения полос, собранных из одинаковых трапеций по схеме рисунка 3 (или склеенных шарнирных шестизвенников).

В работе [Грачев, Найштут, 2012] показано, что если мала толщина пластинок (допускается их закручивание), то пакет может быть развернут в замкнутую фрактальную систему без приложения внешних нагрузок (рис. 4).

Если невелики размеры трапеций  $a$  и  $b$  по сравнению с длиной всей полосы, то средние линии трапеций фрактальной системы аппроксимируют поверхность вращения, метрика и кривизна которой являются функциями угла  $\psi$ . Естественная параметризация и гомогенизация поверхности достигаются, если принять лагранжевы координаты вдоль линий  $\alpha_2 = \text{const}$ , равными геометрической длине средней линии полосы, а вдоль линий  $\alpha_1 = \text{const}$  назначить расстояние между полосами, равным  $a$  (рис. 5).

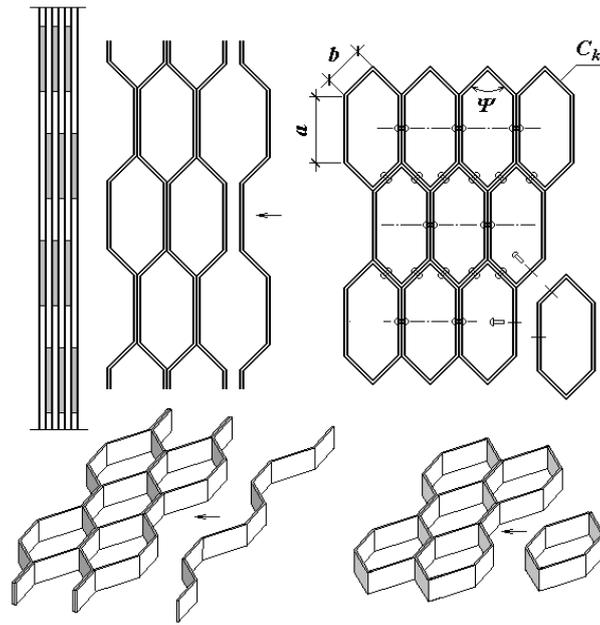


Рис. 3. Континуальная оболочка из полос или шестизвенников

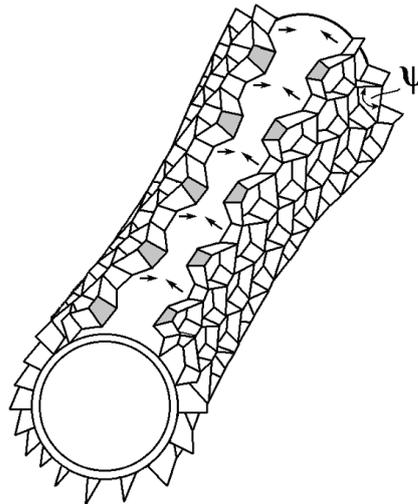


Рис. 4. Общий вид континуальной оболочки вращения

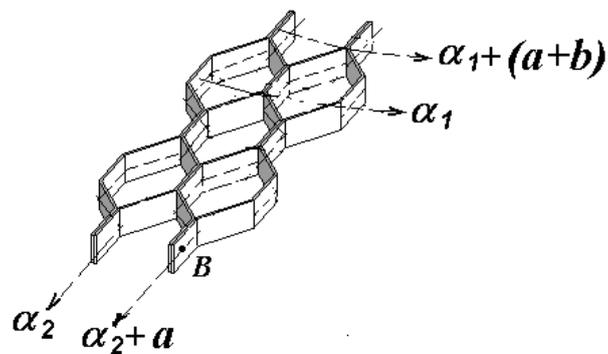


Рис. 5. Лагранжевы координаты на оболочке вращения

Первая и вторая квадратичные формы поверхности принимают вид

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2, \\
 A_1 &= \Theta_1(\Psi), \quad A_2 = \Theta_2(\Psi), \\
 B(d\alpha_1, d\alpha_2) &= \frac{A_1^2 d\alpha_1^2}{\rho_1} + \frac{A_2^2 d\alpha_2^2}{\rho_2}, \\
 \rho_1 &= \frac{s_1}{\lambda_1 - \phi_{11}}, \quad \rho_2 = \frac{s_2}{\lambda_2 - \phi_{22}}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

В формулах (21)  $s_1, s_2, \Theta_1, \Theta_2, \lambda_1, \lambda_2$  — функции, определяемые формой ячейки. Они зависят от длины  $a$ , отношения  $a/b$ , острого угла у основания трапеции и угла  $\psi$ . Функции  $\phi_{11}, \phi_{22}$  подбираются из соотношений структуры. Для двумерной поверхности — это соотношения Гаусса – Кодаци

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial A_1}{A_2 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial A_2}{A_1 \partial \alpha_1} \right) &= -\frac{A_1 A_2}{\rho_1 \rho_2}, \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial A_1}{\rho_1} \right) &= \frac{\partial A_1}{\rho_2 \partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{\rho_2} \right) = \frac{\partial A_2}{\rho_1 \partial \alpha_1}.
 \end{aligned}$$

Если поверхность образует оболочку вращения, то пропадают производные по переменной  $\alpha_2$ , и система из двух уравнений сравнительно просто интегрируется. Уравнения Гаусса – Кодаци позволяют найти три функции  $\phi_{11}, \phi_{22}, \psi$ , если известны координаты границы поверхности  $\partial D$ . Следовательно, оболочка представляет собой континуальный механизм (для изменения его формы не надо прилагать внешние силы), если пластины тонкие, а шарниры идеальные. Если же шарниры не являются идеальными, то геометрически неизменяемая оболочка будет двигаться лишь под действием нагрузки.

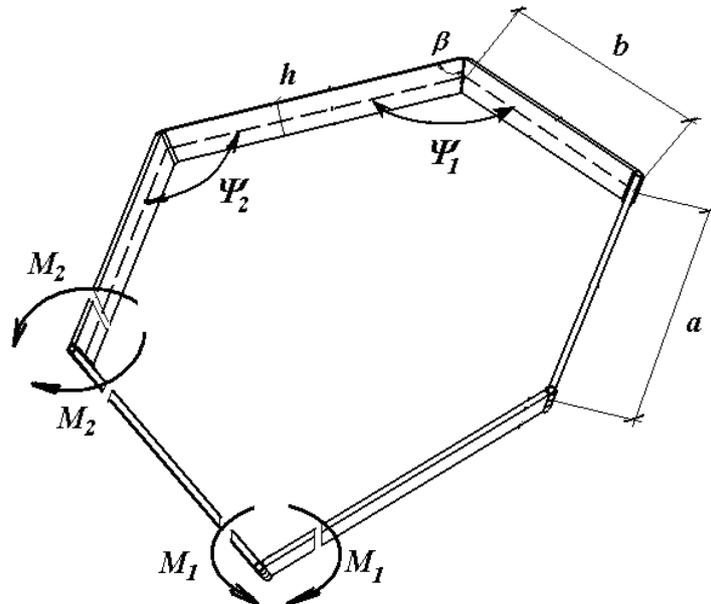


Рис. 6. Внутренние усилия в жесткопластических шарнирах

Изучим поведение описанной оболочки, если цилиндрические шарниры, соединяющие трапеции, являются жесткопластическими (рис. 6). Примем, что при изменении углов  $\psi_1, \psi_2$  в шарнирах появляются внутренние изгибающие моменты  $M_1, M_2$ . Определим плотности внутренних моментов  $m_1 = M_1 / abh$ ,  $m_2 = M_2 / abh$  и допустим, что до тех пор, пока

$$a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 \leq 2m_y^2, \quad (22)$$

ячейка не изменяет своей формы. В формуле (22)  $m_y$  — константа материала, а  $a_1, a_2$  — безразмерные постоянные. Когда же

$$f^2(m_i) = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 = 2m_y^2, \quad (23)$$

возможно появление скоростей изменения углов  $\psi_1, \psi_2$  так, что имеют место равенства (24) с постоянной  $\lambda > 0$

$$\psi_{1,i} = \dot{\psi}_1 = \lambda m_1, \quad \psi_{2,i} = \dot{\psi}_2 = \lambda m_2. \quad (24)$$

Выражение  $a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 = 2m_y^2$  — это аналог условия Мизеса, которому по (9) соответствует диссипативный потенциал

$$\Pi(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = m_y \sqrt{2 \left( \frac{\dot{\psi}_1^2}{a_1^2} + \frac{\dot{\psi}_2^2}{a_2^2} \right)}. \quad (25)$$

Пусть все ячейки сетчатой оболочки находятся под одинаковым избыточным внутренним давлением газа, равным  $p$ . Углы  $\psi_1, \psi_2$  связаны ограничением типа (3) —  $\Gamma(\psi_1, \psi_2) = 0$  [Грачев, Найштут, 2012], которое зависит от  $c = a/b$  и угла  $\beta$  у основания трапеции (рис. 6).

При  $\beta \rightarrow \pi/2$  будет  $2\psi_1 + 4\psi_2 = 4\pi$ . Поэтому

$$|\dot{\psi}_1| = |2\dot{\psi}_2|. \quad (26)$$

Скорость изменения объема составит  $\dot{V} / abh = \left( c \cos \psi_1 + \cos \frac{\psi_1}{2} \right) \dot{\psi}_1$ .

Задаче о жесткопластическом движении оболочки отвечает проблема минимума функционала

$$L(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) = \int_D \Pi(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2) d\alpha_1 d\alpha_2 - \int_D p \left( c \cos \psi_1 + \cos \frac{\psi_1}{2} \right) \dot{\psi}_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (27)$$

и принцип виртуальных мощностей

$$\int_D (m_1 \delta \dot{\psi}_1 + m_2 \delta \dot{\psi}_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_D p \delta \dot{V} d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Теорема о предельной нагрузке приводит к такой оценке кинематического коэффициента

$$p_k \leq \frac{m_y}{p \left( c \cos \psi_1 + \cos \frac{\psi_1}{2} \right)} \sqrt{2 \left( \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2} \right)} = \bar{p}. \quad (28)$$

Равенство имеет место, если все ячейки в оболочке «раскрываются одинаково». Это условие выполняется с высокой точностью при малом угле  $\beta$ , в этом случае предельное давление по (28) составит  $\bar{p}p = p^*$ .

Существенно, что деформация оболочки может происходить и тогда, когда не во всех ячейках поддерживается одинаковое давление. Достаточно поддерживать давление в части ячеек, обеспечив в предельном случае равенство (27).

Пусть под влиянием внутреннего давления  $p^*$  угол в ячейке изменился от нуля до значения  $\psi_1 = \psi$ . Определим количество тепла, которое надо подвести ко всем ячейкам, чтобы при температуре  $T_e$  восстановить исходную поверхность (материал шарниров обладает памятью формы). Приняв во внимание формулы (19), (20) и учтя обозначения  $k = m_y$ ,  $\bar{k} = \bar{m}$  (здесь  $\bar{m}$  — константа в равенстве (23) при температуре  $T_e$ ), получим

$$Q = \int_D \dot{q} d\alpha_1 d\alpha_2 dt = \frac{\bar{m}\psi_1(a+b)ah}{\sqrt{2\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2}\right)}} n_1 n_2. \quad (29)$$

В формуле (29)  $n_1$ ,  $n_2$  — количество ячеек оболочки в меридиональном и окружном направлениях. Аналогично предыдущему, восстановление формы произойдет, если подводить тепло к части ячеек, обеспечив осевую симметрию и интегральное равенство в первом начале термодинамики.

В заключении отметим, что анализ поведения сетчатой континуальной оболочки оказался сравнительно простым в силу особенностей задачи. Осесимметричная оболочка не только одномерна, но и при малом угле  $\beta$  «почти одноточечна». Отсутствие симметрии порождает вычислительные сложности, так как минимум функционала (27) достигается, как правило, на негладких функциях. В настоящее время вычислительные проблемы преодолены лишь частично [Han, Reddy, 1999; Panagiotopoulos, 1985]. Существенно, что успех, в основном, достигается при использовании специфики постановки конкретной задачи [Glowinsky, 2008].

## Список литературы

- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Сетчатые развертывающиеся оболочки из полос, образованных трапециевидными пластинами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, №1. — С. 63–73.
- Жермен П. Курс механики сплошных сред. — М.: Высш. шк., 1983. — 399 с.
- Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. — М.: Изд-во Московского Ун-та, 1962. — 237 с.
- Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
- Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М. Изд-во иност. лит., 1961. — 79 с.
- Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. — М., Наука. 1981. — 208 с.
- Найштут Ю. С. Вариационный принцип для сплошных сред, обладающих памятью формы // Вестник Южно-Уральского Университета. Серия «Математика, физика, химия». 2008. — №22 (122). — С. 4–11.
- Bertram A. Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys // Nuclear engineering and design. — 1982. — 74. — P. 174–182.
- Glowinsky R. Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems. Springer, 2008. — 493 p.
- Han W., Reddy B. D. Plasticity: mathematical theory and numerical analysis. Springer, 1999. — 371 p.
- Panagiotopoulos P. D. Inequality problems in mechanics and applications. Birkhauser, 1985. — 492 p.