

УДК: 537.877

Модификация метода погружения в задаче расчета 3D фотонного кристалла типа “Woodpile”

В. Л. Кузнецов^а, А. С. Рудковский

Московский государственный технический университет гражданской авиации,
факультет прикладной математики и вычислительной техники,
Россия, 125993, г. Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

E-mail: ^а v.kuznetsov@mstuca.aero

Получено 2 апреля 2013 г.

В работе предложена модификация метода инвариантного погружения для описания взаимодействия 3D векторного электромагнитного поля с фотонным кристаллом типа «woodpile», позволяющая обойти проблему резонансного усиления эванесцентных мод на этапе интегрирования уравнений погружения для первого слоя кристалла. Построенная математическая модель фотонного кристалла дает результаты, хорошо совпадающие с результатами физического эксперимента.

Ключевые слова: метод инвариантного погружения, фотонный кристалл, эванесцентные моды, резонансы

Invariant embedding method modification for calculation of “Woodpile” photonic crystal

V. L. Kuznetsov, A. S. Rudkovskiy

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science,
MSTU CA, 20, Kronstadt Boulevard, Moscow, 125993, Russia

Abstract. — Modification of the invariant imbedding method to describe the interaction of 3D electromagnetic field with “woodpile” photonic crystal of finite thickness is considered in this paper. This modification allows solving a problem of evanescent modes resonant amplification during numerical calculations for the first layer of photonic crystal. The mathematical model created in this work gives good agreement with physical experiment results

Keywords: Invariant embedding method, Photonic crystal, Evanescent modes, Resonances

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 413–422 (Russian).

Введение

Коэффициенты отражения и прохождения фотонных кристаллов (ФК) конечной толщины являются важнейшими характеристиками, определяющими эффективность их использования при создании различных прикладных устройств, таких как волноводы, фильтры или резонаторы.

Среди существующих методов описания ФК следует выделить, как перспективный, метод инвариантного погружения. Он, следуя методологии трансфер-матриц [Barnes, Pendry, 1991], рассматривает рассеивающую среду как совокупность элементарных слоев, разделенных зазорами, но, в отличие от этого метода, сводится к уравнениям погружения непосредственно для матричных коэффициентов отражения и прохождения электромагнитных волн [Barabanenkov, Kuznetsov, Barabanenkov, 1999; Барабаненков, Барабаненков, 2003].

По существу, уравнения погружения представляют собой своеобразные «правила сложения» для коэффициентов отражения и прохождения волн некоторой совокупности из двух неоднородностей: одна из которых — ФК толщины Z , а другая — тонкий элементарный слой того же ФК толщины ΔZ . Такие правила сложения хорошо известны в теории нерегулярных волноводов [Митра, Ли 1974], где они записываются в виде бесконечной системы алгебраических уравнений. Однако, последнего шага, перехода к дифференциальным уравнениям, возникающим при предельном переходе, когда отражательные характеристики второй неоднородности стремятся к нулю, там до последнего времени сделано не было [Кузнецов, Филонов, 2011].

Интегрирование уравнений погружения (суммирование коэффициентов отражения и прозрачности при наращивании толщины ФК) позволяет при однократном расчете получить значения искомых характеристик ФК не только при заданной толщине Z , но, попутно, и при всех других толщинах $0 < Z' < Z$. Однако, это, на первый взгляд, достоинство метода инвариантного погружения привело к необходимости его модификации при анализе 3D ФК типа «woodpile». Суть проблемы заключается в том, что при определенных условиях эванесцентные волны могут резонировать, усиливаться в ФК конечной толщины. Этот эффект Пендри с соавторами [Luo et al., 2003] предложили использовать для обоснования возможной замены метаматериалов в суперлинзе на 2D ФК. Суть эффекта усиления эванесцентных волн авторы объясняют неограниченной подкачкой энергии падающей эванесцентной волной как в прошедшее через ФК, так и отраженное поля, амплитуды которых возрастают во времени неограниченно. Нас этот вопрос интересует, поскольку к аналогичным результатам приводит и метод погружения: при некоторых толщинах ФК наблюдается резонанс, и для некоторых (не всех) эванесцентных мод соответствующие элементы матричных коэффициентов отражения и прохождения для среды без потерь стремятся к бесконечности. А поскольку в стандартном методе погружения должны последовательно рассчитываться ФК всех толщин, то при первом же резонансе (сингулярности) счет останавливается, не позволяя завершить работу программы. Далее мы покажем, что такие сингулярные резонансы возникают лишь для эванесцентных мод, не связанных межмодовыми взаимодействиями с обычными, распространяющимися модами. Такие типы волн возникают при расчетах ФК типа «woodpile» и обычно не рассматриваются при анализе 2D ФК. Именно поэтому этот вопрос не анализировался в нашей предыдущей работе [Кузнецов, Рудковский, 2013].

В работе предлагается модификация метода погружения, позволяющая связать изолированные эванесцентные моды с распространяющимися, ввести канал оттока энергии из эванесцентных мод и, тем самым, избежать неприятных проблем, связанных с отмеченными выше эффектами резонансного усиления.

Механизм усиления эванесцентных мод

Рассмотрим сначала падение из вакуума монохроматической эванесцентной волны частоты $\omega = ck$ на плоский слой толщины d , заполненный средой с вещественной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > 1$ (среда без потерь). Выберем параметры задачи так, чтобы волновой век-

тор вне среды был комплексным, а внутри слоя — вещественным. Это будет иметь место, если \vec{q} — поперечная составляющая волнового вектора \vec{k} — удовлетворяет условиям $\varepsilon k_0^2 > q^2 > k_0^2$. Т. е. падающая эванесцентная волна, проникая в слой, становится распространяющейся. Границы слоя для этой распространяющейся волны являются идеальными зеркалами, поле оказывается «запертым» в резонаторе. При этом амплитуда поля внутри слоя, согласно устоявшимся представлениям [Борн, Вольф, 1973], определяется соотношением

$$E = E_0 \left\{ 1 + r^2 \exp(2ik_{\varepsilon z}d) + [r^2 \exp(2ik_{\varepsilon z}d)]^2 + \dots \right\} = E_0 / [1 - r^2 \exp(2ik_{\varepsilon z}d)]. \quad (1)$$

Здесь E_0 — комплексная амплитуда поля, проникающего в слой через его верхнюю границу (внешнее поле воздействует на слой сверху), $r = \exp(-i\delta)$, — коэффициент отражения распространяющейся волны от границы слоя (δ в нашем случае — вещественная величина). Из (1) видно, что если $(\delta + k_{\varepsilon z}d) \rightarrow \pi n$, n — целое, то амплитуда поля $E \rightarrow \infty$. Это распространяющееся поле порождает эванесцентные волны на внешних границах слоя, которые можно интерпретировать как отраженные и прошедшие поля. Их амплитуда пропорциональна амплитуде поля E и, следовательно, также стремится к бесконечности. Определяя формально коэффициент отражения как отношение амплитуд отраженного и падающего поля, приходим к выводу о том, что он должен стремиться в этом случае к бесконечности. Тот же результат следует как из соотношений, приведенных в монографии [Борн, Вольф, 1973], так и из аналитического решения уравнений погружения для слоя:

$$\frac{dR}{dz} = R \cdot \rho \cdot R + R \cdot \tau + \tau \cdot R + \rho, \quad \tau = i \cdot k_z + \frac{i \cdot (\varepsilon - 1)}{2 \cdot k_z}; \quad \rho = \frac{i \cdot (\varepsilon - 1)}{2 \cdot k_z},$$

$$R(z) = \frac{\rho \cdot \sin(z \cdot \sqrt{\rho^2 - \tau^2})}{\sqrt{\rho^2 - \tau^2} \cdot \cos(z \cdot \sqrt{\rho^2 - \tau^2}) - \tau \cdot \sin(z \cdot \sqrt{\rho^2 - \tau^2})}.$$

Вид зависимости коэффициента отражения как функции толщины слоя и модуля трансверсальной компоненты волнового вектора $|\vec{q}|$ приведен на рисунке 1.

Заметим, что поскольку эванесцентная мода в направлении, перпендикулярном граням слоя, энергию не переносит, ее поток равен нулю, то сингулярности коэффициента отражения по полю не определяют поведение коэффициента отражения R , определяемого как отношение потока энергии отраженной волны к потоку энергии падающей. Т. е. сингулярности коэффициента отражения по полю не приводят к каким-либо нарушениям закона сохранения энергии.

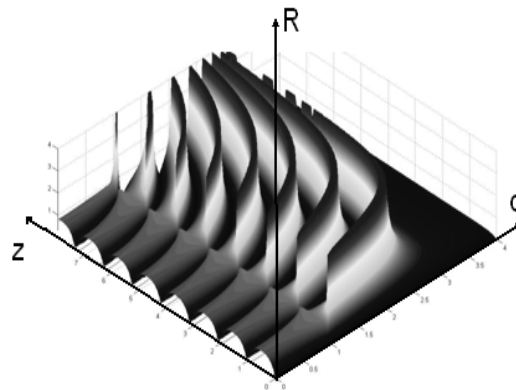


Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения от толщины однородной пластины и модуля трансверсальной компоненты волнового вектора

В работе [Luo et al., 2003] сделано одно важное допущение, согласно которому источник генерирует поле независимо и эффект потенциального влияния резонансов на него игнорируется. Покажем на примере плоского слоя парадокс, к которому приводит это приближение. Рассмотрим плоскую волну, падающую из верхнего полупространства, заполненного средой с диэлектрической проницаемостью ε , на границу с вакуумом (рис. 2а). Пусть поперечная составляющая волнового вектора \vec{q} снова удовлетворяет условию $\varepsilon k_0^2 > q^2 > k_0^2$. Тогда на границе раздела выполняются условия полного отражения и в нижней полуплоскости будет лишь эванесцентное поле с напряженностью E_1 на границе. Выделим из верхнего полупространства плоский слой толщины z_1 , примерно соответствующей резонансному случаю (рис. 2б), с очень большим коэффициентом прохождения T_1 и рассмотрим распространение падающей волны в такой системе.

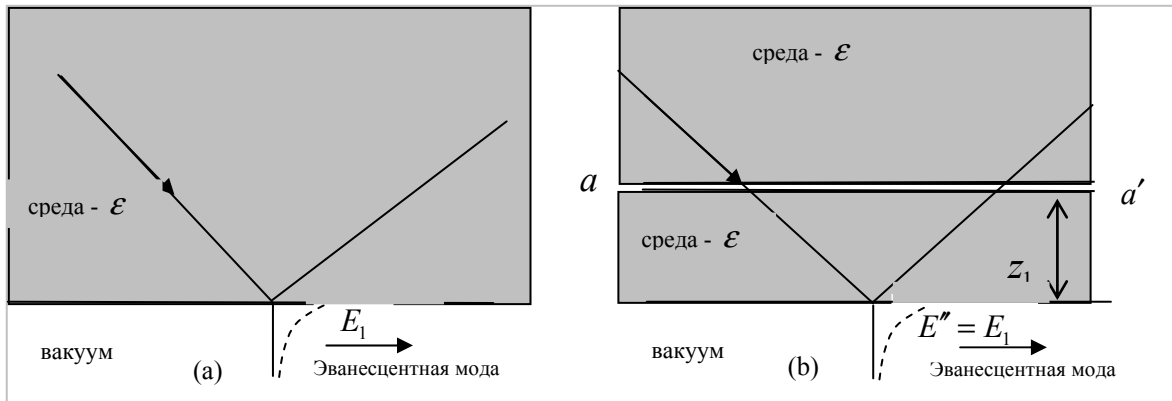


Рис. 2. Отражение плоской волны от границы диэлектрической среды: (а) стандартный случай, (б) резонансный плоский слой, добавленный к границе раздела

Если принять допущение, использованное в работе [Luo et al., 2003], то налицо противоречие – поле, рассчитанное по второй схеме, равно $E_1' = T_1 \cdot E_1 \gg E_1$. Т. е. принятое допущение не корректно. Рассмотрим поле в бесконечно узком зазоре $a - a'$, отделяющим резонансный слой и представляющим собой плоский резонатор. Поле E внутри него определяется соотношением:

$$E = \left\{ 1 + rR_1 + [rR_1]^2 + [rR_1]^3 + \dots \right\} E_1 = \Sigma \cdot E_1. \quad (2)$$

Поскольку коэффициент отражения резонансной пластины R_1 очень велик, ряд в (2) является расходящимся в смысле отсутствия предела последовательности частичных сумм, однако его величина Σ может быть легко вычислена [Харди, 1951]:

$$\Sigma = 1 + rR_1 \cdot \Sigma \Rightarrow \Sigma = 1/(1 - rR_1). \quad (3)$$

Из (3) следует, что при z_1 , стремящемся к резонансному значению, $R_1 \rightarrow \infty$ и $\Sigma \rightarrow 0$. Следовательно, стремится к нулю и поле, действующее на пластину, – гипотеза, принятая в работе [Luo et al., 2003], слишком груба.

Завершим расчет нашего примера. Поле в вакууме под пластиной E'' будет равно $E'' \cong T_1 \cdot (rR_1)^{-1} \cdot E_1$. Учитывая, что T_1 и R_1 связаны соотношением $T_1 = R_1 \exp(i k_{ez} \cdot z_1)$, а $r = \exp(-i\delta)$, то, принимая во внимание условие резонанса $(\delta + k_{ez}d) \rightarrow \pi n$, находим: $E'' = E_1$. Как и следовало ожидать, обе схемы (рис. 2) дают одинаковый результат.

Из рассмотренного примера следует вывод: при вычислении эванесцентного поля вблизи резонансных значений нельзя не учитывать эффектов взаимооблучения источника и пластины, т.е. необходимо решать самосогласованную задачу и рассматривать три объекта — источник, поле и облучаемый объект.

Перейдем теперь к обсуждению резонансных явлений в 2D ФК. Рассмотрим поперечные составляющие волновых векторов мод, взаимодействующих в 2D ФК (рис. 3). Они различаются на целое число векторов обратной решетки — \vec{k} . Поскольку обычно рассматриваются в качестве иницирующих распространяющиеся волны, то в 2D ФК порождаются моды, изображенные на рисунке 3а. Среди этих мод есть и эванесцентные, однако их резонанс сглажен, так как за счет межмодовых взаимодействий часть накапливаемой в них энергии передается распространяющимся модам, вместе с которыми энергия покидает кристалл. Таким образом, в отношении эванесцентных мод распространяющиеся волны играют роль диссипативных процессов.

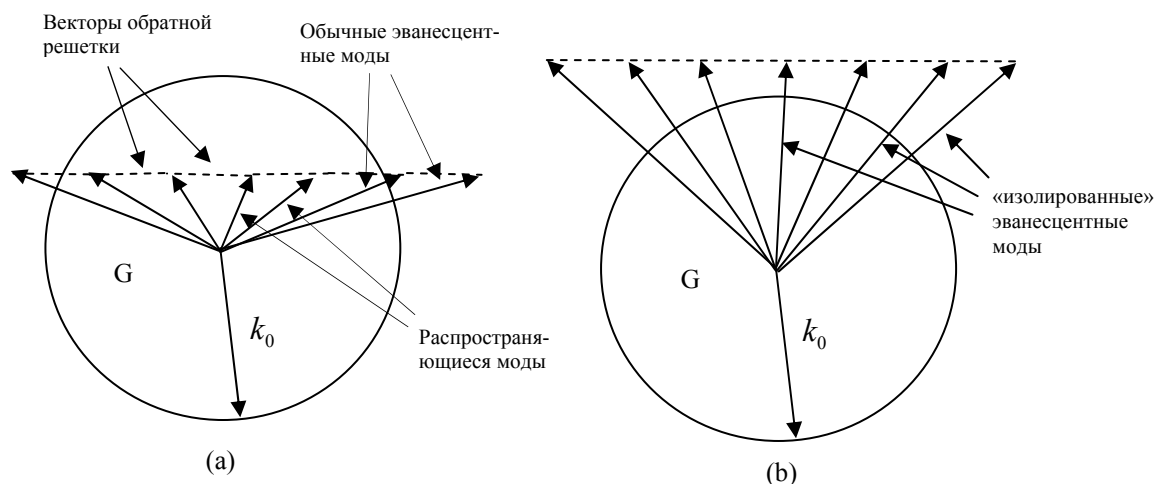


Рис. 3. Различные группы связанных мод в ФК

Ситуация меняется, когда мы переходим к рассмотрению 3D ФК типа «woodpile», изображенном на рисунке 4. На начальном этапе интегрирования уравнений погружения (нижний слой брусьев) мы, казалось бы, снова имеем дело с рассмотренным выше 2D ФК, однако теперь на него сверху падает поле, в котором присутствуют все моды обычного 3D ФК. В частности и эванесцентные моды, изображенные на рисунке 3b, для которых механизм оттока энергии, описанный выше, не работает. Перекачка энергии может осуществляться только внутри этой группы, и энергия поля этих эванесцентных мод остается «привязанной» к ФК. Возникает такой же эффект накопления, что и в плоской пластине, сингулярности резонанса становятся неизбежными.

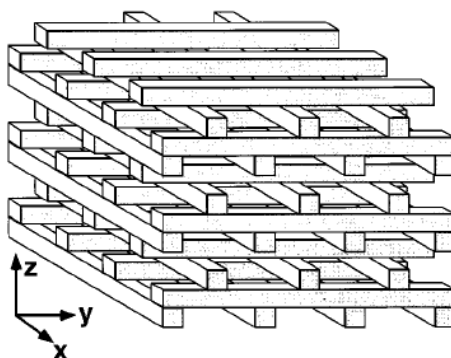


Рис. 4. Исследуемый 3D ФК типа «Woodpile»

Модификация метода погружения для 3D ФК типа «woodpile»

Согласно изложенному выше, применение метода погружения в его стандартном виде встречает сложности именно благодаря резонансным эффектам на изолированных эванесцентных модах. Преодолеть это препятствие можно, разрушив изолированность этих мод, т.е. введя соответствующий канал оттока энергии. Отметим, что сингулярности исчезают при учете диссипации в среде, характеризуемой комплексным значением диэлектрической проницаемости, однако при этом становится невозможным контроль точности расчетов с помощью теоремы Пойнтинга, что существенно снижает уровень достоверности получаемых результатов.

В этой работе мы предлагаем другой метод отвода энергии эванесцентных мод, позволяющий уже на первых шагах интегрирования уравнений погружения рассматривать ФК «woodpile» как 3D структуру, в которой нет изолированных эванесцентных мод. Это достигается тем, что наращивание кристалла элементарными слоями осуществляется как со стороны верхней, так и нижней его граней, а в качестве начального сечения выбрана граница между слоями с разной ориентацией вставок (рис. 5). При этом межмодовыми взаимодействиями оказываются связаны моды, чьи поперечные вектора \vec{q} удовлетворяют соотношению $\vec{q}' = \vec{q}'' + \vec{k}_1 \cdot n + \vec{k}_2 \cdot m$, $n, m \in Z$. Здесь \vec{k}_1 и \vec{k}_2 — взаимно ортогональные векторы, соответствующие соседним слоям с различной ориентацией диэлектрических вставок. Таким образом, все эванесцентные моды оказываются связанными с распространяющимися волнами, уносящими энергию из кристалла. В частности, возникает взаимодействие между модами, изображенными на рисунке 3а и рисунке 3б.

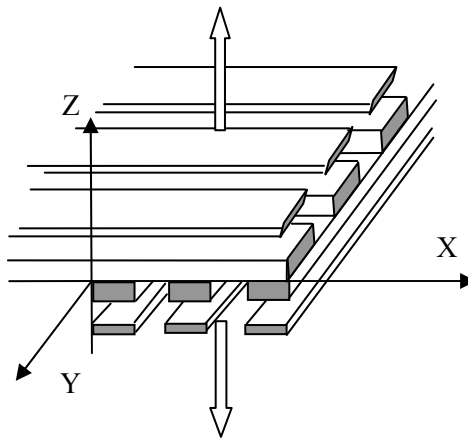


Рис. 5. Наращивание толщины ФК в двух направлениях при модификации метода инвариантного погружения

Для технической реализации предложенного метода необходимо расширить систему уравнений погружения для наращивания ФК сверху, дополнив систему уравнений для матриц T^- и R^+ , приведенную в работе [Кузнецов, Рудковский, 2013], уравнениями погружения для T^+ и R^- , фактически записав покомпонентно матричное уравнение погружения для полной матрицы рассеяния S , определяемой как

$$S = \begin{pmatrix} R^+ & T^+ \\ T^- & R^- \end{pmatrix}.$$

Общий вид уравнения погружения для S -матрицы при наращивании рассеивающей среды сверху был получен в работе [Barabanenkov, Barabanenkov, 2006]:

$$\frac{dS}{dz} = \chi^+ + \xi^+ \cdot S + S \cdot \xi^- + S \cdot \chi^- \cdot S, \quad (4)$$

где $\chi^{\pm} = \begin{pmatrix} \rho^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\xi^{\pm} = \begin{pmatrix} \tau^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ρ^{\pm} и τ^{\pm} — матричные характеристики отражения и прохождения элементарного слоя, явный вид которых определяется геометрией структуры ФК.

Можно показать, что общий вид уравнения погружения для S -матрицы при наращивании рассеивающей среды снизу аналогичен (4) и отличается лишь в деталях:

$$\frac{dS}{dz} = \tilde{\chi}^- + \tilde{\xi}^- \cdot S + S \cdot \tilde{\xi}^+ + S \cdot \tilde{\chi}^+ \cdot S. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\chi}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho^{\pm} \end{pmatrix}$ и $\tilde{\xi}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau^{\pm} \end{pmatrix}$, а матрицы ρ^{\pm} и τ^{\pm} совпадают с фигурирующими в уравнении (4). Интегрирование (5) идет в область $z < 0$.

Система матричных уравнений (4), (5) дополняется очевидными начальными условиями $S(0) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I — единичная матрица.

Алгоритм интегрирования системы (4),(5) выглядит следующим образом. Сначала на малом интервале $(0, z_1)$ интегрируется уравнение (4) с исходными начальным условием $S(0)$. Находим $S(z_1)$. Затем с начальным условием $S(z_1)$ интегрируется уравнение (5) на интервале $(0, -z_1)$. Полученный результат — $S(-z_1)$ передается в качестве начальных условий для решения (4) на интервале (z_1, z_2) и так далее.

Коэффициенты уравнений погружения для S -матрицы

Как было отмечено выше, общий вид уравнений погружения для S -матрицы универсален, и вся конкретика решаемой задачи сосредоточена в явном виде матричных коэффициентов ρ^{\pm} и τ^{\pm} . Понятно, что хотя эти коэффициенты будут различаться для разных слоев ФК «woodpile» с различной ориентацией диэлектрических вставок, но в их структуре много общего.

Рассмотрим 3D ФК с диэлектрическими вставками в виде прямоугольных параллелепипедов. Элементарный слой такого ФК представлен на рисунке 6. Нетрудно видеть, что при $d_x \rightarrow \Lambda_x$, Λ_x — период структуры вдоль оси OX , получается элементарный слой ФК с ориентацией брусьев вдоль оси OX . Другой предельный переход, $d_y \rightarrow \Lambda_y$, позволяет перейти к описанию слоя с другой ориентацией вставок.

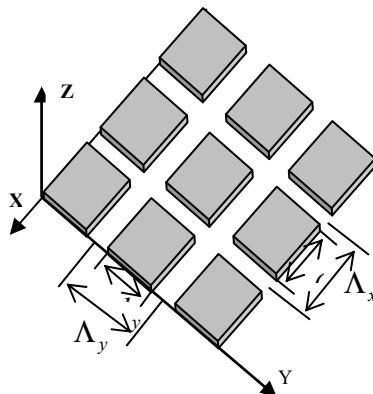


Рис. 6. Элементарный слой 3D ФК с диэлектрическими вставками в виде тонких прямоугольных параллелепипедов

Рассчитывая ρ^\pm и τ^\pm по технологии, использованной в работе [Барабаненков, Кузнецов, 1999], приходим к следующим выражениям для элементов искомых матриц:

$$\begin{aligned} {}_{\alpha\beta}\hat{\tau}_{nm}^{sp\pm} &= \hat{I}_{\alpha\beta} i k_z(n, s) \delta_{nm} \delta_{sp} + \\ &+ {}_{\alpha\beta}\hat{I}_{nm}^{sp\pm}(\vec{q}_0, \pm 0) \hat{A} \frac{(\varepsilon - 1)k_0^2}{\pi^2(n-m)(s-p)} \sin\left(\frac{\pi \cdot d_x(n-m)}{\Lambda_x}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot d_y(s-p)}{\Lambda_y}\right); \\ {}_{\alpha\beta}\hat{\rho}_{nm}^{sp\pm} &= {}_{\alpha\beta}\hat{I}_{nm}^{sp\pm}(\vec{q}_0, \pm 0) \cdot \hat{A} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)k_0^2}{\pi^2(n-m)(s-p)} \sin\left(\frac{\pi \cdot d_x(n-m)}{\Lambda_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot d_y(s-p)}{\Lambda_y}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь пара (p, m) определяет «номер» иницирующей моды, а $\beta = x, y, z$ — компоненту поля \vec{E} .

Пара (s, n) и индекс α описывают дифрагированную моду.

Из (4)–(6) видно, что ρ^\pm и τ^\pm , а вместе с ними и \mathbf{T}^\pm , и \mathbf{R}^\pm представляют собой 6-индексные матрицы, которые удобно представлять в виде блочных — ${}_{\alpha\beta} \left[(R_{nm})^{sp} \right]$, а для уменьшения размерности по α, β целесообразно перейти в поляризационный базис горизонтально и вертикально поляризованных волн [Кузнецов, Рудковский, 2013].

Результаты численного эксперимента

Для проверки работоспособности предложенной модификации метода погружения было проведено сопоставление результатов физического эксперимента [Ozbay, 1996] с результатами численного моделирования на основе уравнений (4), (5). Был рассмотрен ФК (рис. 4), состоящий из 12 слоев, образованных вставками из промышленного алюминия в виде брусьев квадратного сечения 3.1×3.1 мм, с периодом структуры 11.2 мм. В эксперименте рассматривалось нормальное падение волны на верхнюю грань ФК.

Сравнение экспериментальных частотных зависимостей коэффициента прозрачности такой структуры с результатами численного моделирования представлены на рисунке 7.



Рис. 7. Сопоставление результатов численного моделирования с физическим экспериментом

Результаты проверки энергетического баланса по теореме Пойнтинга при интегрировании уравнений по толщине кристалла для случая горизонтальной поляризации иницирующего поля представлены на рисунке 8. Аналогичные результаты имеют место и при проверке энергетического баланса и для вертикальной поляризации поля.

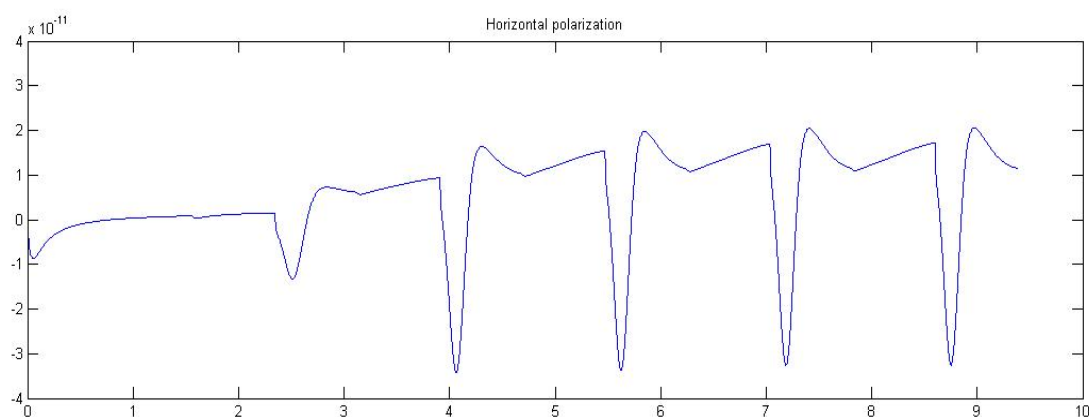


Рис. 8. Результаты проверки теоремы Пойнтинга

Дополнительно с целью проверки стабильности запрещенной зоны при вариации угла падения инициирующего поля был проведен расчет энергетического спектра ФК при наклонном падении волны. Нами был рассмотрен случай, когда волновой вектор инициирующей волны в сферической системе координат, связанной с ФК, задается одинаковыми углами: $\theta = \pi/7$ и $\phi = \pi/7$. Отдельно рассматривались случаи вертикальной и горизонтальной поляризаций падающего поля. Из проведенных расчетов видно, что запрещенная зона сохраняет стабильность в диапазоне частот 10–14 ГГц (рис. 9, 10).

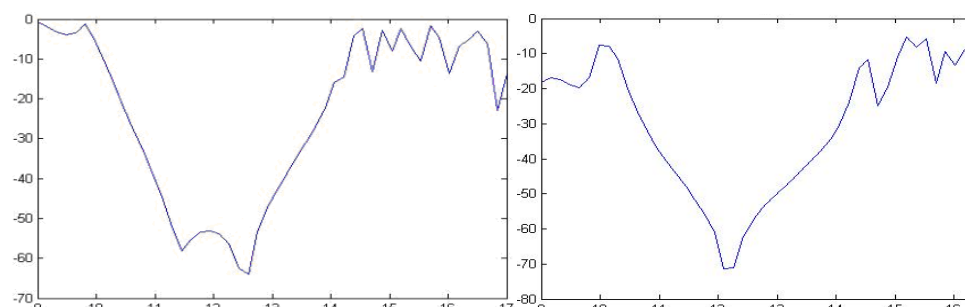


Рис. 9. Случай наклонного падения инициирующего поля (вертикальная поляризация). Левый график соответствует вертикальной поляризации прошедшего поля (${}_{vv}T_{00}^{00}$), правый — горизонтальной (${}_{hv}T_{00}^{00}$)

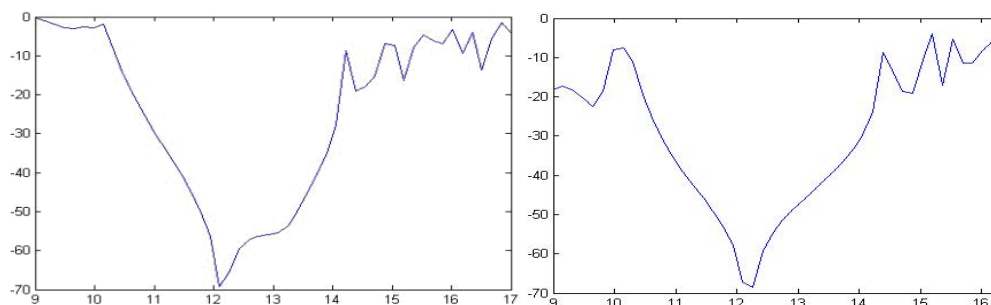


Рис. 10. Случай наклонного падения инициирующего поля (горизонтальная поляризация). Левый график соответствует горизонтальной поляризации прошедшего поля (${}_{hh}T_{00}^{00}$), правый — вертикальной (${}_{vh}T_{00}^{00}$)

Заключение

В работе предложена модификация метода инвариантного погружения, позволяющая «включить» все возможные межмодовые связи уже на начальной стадии интегрирования уравнений погружения, создав тем самым «канал оттока» энергии от эванесцентных мод, которые в стандартном методе погружения оказывались изолированными. Отметим, что наиболее простой, на первый взгляд, прием демпфирования резонансного усиления эванесцентных мод путем учета диссипации энергии электромагнитного поля — введение комплексной диэлектрической проницаемости среды, с точки зрения проверки адекватности компьютерной модели ФК оказывается неприемлемым, так как при этом невозможна проверка энергетического баланса. Проверка расчетов модифицированного метода погружения, проведенная с помощью теоремы Пойнтинга, показала, что погрешность не превышает величины $3 \cdot 10^{-11}$. После такого тестирования, в модифицированном методе погружения, как и в стандартном, уже можно вводить комплексное ε .

Существенным моментом, проиллюстрированным в работе на простом примере плоского слоя, является то, что при описании резонансного взаимодействия эванесцентных мод со средой необходимо учитывать обратное воздействие отраженного поля на источник излучения. Пренебрежение этим эффектом приводит к неадекватности модели и излишне оптимистичным оценкам эффекта резонансного усиления поля для эванесцентных мод [Luo et al., 2003].

Список литературы

- Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю. Метод соотношений переноса в теории резонансного многократного рассеяния волн с применением к дифракционным решеткам и фотонным кристаллам // ЖЭТФ. — 2003. — Т. 123, Вып. 4. — С. 763.
- Барабаненков Ю. Н., Кузнецов В. Л. Матричное уравнение Риккати для задачи рассеяния векторного поля на двухмасштабной периодической поверхности // Радиотехника и электроника. — 1999. — Т. 44, № 6.
- Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
- Кузнецов В. Л., Рудковский А. С. Модель взаимодействия векторного 3D электромагнитного поля с 2D периодическими структурами // Компьютерные исследования и моделирование, 2013, (в печати).
- Кузнецов В. Л., Филонов П. В. Уравнение погружения и малый параметр в задаче о нерегулярном волноводе // Радиотехника и электроника. — 2011. — Т. 56, № 9.
- Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.
- Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: И. Л., 1951.
- Barabanenkov Yu. N., Barabanenkov M. Yu. Energy Invariants to Composition Rules for Scattering and Transfer Matrices of Propagating and Evanescent Waves in Dielectric Structures // PIERS proceedings. Cambridge, 2006.
- Barabanenkov Yu. N., Kouznetsov V. L., Barabanenkov M. Yu. Transfer relations for electromagnetic wave scattering from periodic dielectric one-dimension interface: TE polarization // Progress in Electromagnetic Research: PIER. — 1999. — Vol. 24.
- Barnes C., Pendry J. B. Multiple Scattering of Waves in Random Media: a Transfer-Matrix Approach // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1991. — Vol. 435, No. 1893.
- Luo C., Jonson S. G., Joannopoulos J. D., Pendry J. B. Subwavelength imaging in photonic crystals // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68. — P. 045115.
- Ozby E. Layer-by-layer photonic crystals from microwave to far-infrared frequencies // J. Opt. Soc. Am. B. — 1996. — Vol. 13.