

УДК 519.65

## Критерии и сходимость фокусной аппроксимации

Т. А. Ракчеева

Институт машиноведения РАН,  
Россия, 117334, г.Москва, ул.Бардина, д.4

E-mail: rta\_ra@list.ru

Получено 11 марта 2013 г.,  
после доработки 10 мая 2013 г.

Исследуются методы решения задачи фокусной аппроксимации — приближения по точечно заданной гладкой замкнутой эмпирической кривой многофокусными лемнискатами. Анализируются критерии и сходимость разработанных методов приближения, как в вещественной, так и в комплексной интерпретации. Доказывается топологическая эквивалентность используемых критериев.

Ключевые слова: кривые, аппроксимация, лемнискаты, фокусы, критерий близости кривых, базис, форма, инвариант, алгоритм, степени свободы.

### Criteria and convergence of the focal approximation

T. A. Rakcheeva

*Mechanical Engineering Research Institute, RAS, 4 Bardina st., Moscow, 117334, Russia*

**Abstract.** — Methods of the solution of a problem of focal approximation - approach on point-by-point given smooth closed empirical curve by multifocal lemniscates are investigated. Criteria and convergence of the developed approached methods with use of the description, both in real, and in complex variables are analyzed. Topological equivalence of the used criteria is proved.

Keywords: curves, approximation, lemniscates, foci, criterion of curves nearness, basic, shape, invariant, algorithm, freedom degrees.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 379–394 (Russian).

## Введение

На плоскости или в пространстве форма воспринимается как замкнутая площадь или объем, ограниченные краевой линией или поверхностью. Описание эмпирической формы — описание границы, задаваемой, как правило, измерениями отдельных ее точек, — сводится к классической задаче приближенного описания аналитическими средствами замкнутой граничной кривой.

Аппроксимация эмпирической кривой  $C$ , заданной конечным набором своих отсчетов, выполняется с использованием того или иного функционального базиса, определяемого целевым назначением прикладной задачи. Широкий круг задач решается хорошо разработанными методами аппроксимации тригонометрическими или алгебраическими полиномами. Предлагаемый в данной работе метод фокусной аппроксимации решает эту задачу для гладких замкнутых кривых в классе функций, называемых многофокусными лемнискатами. Степенями свободы фокусной аппроксимации являются точки фокусов внутри лемнискаты. Отличительной особенностью фокусного метода является единое пространство представления для аппроксимируемой эмпирической кривой  $C$  и для ее фокусных степеней свободы, что адекватно описанию формы и допускает естественную интерпретацию управления как процессом аппроксимации, так и самой формой. На задание аппроксимируемой кривой  $C$  при этом не накладываются требования параметризации и упорядоченности — точки могут быть заданы в произвольном порядке. Результат приближения также свободен от параметризации и определяется только формой кривой.

Ряд подходов к решению задачи фокусной аппроксимации и ее алгоритмической реализации, позволяющие определить фокусную систему аппроксимирующих лемнискат, обеспечивающих необходимую точность приближения, обсуждался в опубликованных ранее работах [Ракчеева, 2007, 2010а, 2010b, 2011а]. Поскольку всякий метод приближения представляет собой композицию функционального базиса с некоторым функционалом, минимизация которого и составляет алгоритмическую реализацию метода, то при условии общего базиса многофокусных лемнискат различие в методах фокусной аппроксимации определяется различием используемых ими функционалов (критериев точности приближения). В настоящей работе рассматривается преемственная модификация методов решения задачи фокусной аппроксимации в ракурсе минимизируемых ими функционалов.

## 1. Задача фокусной аппроксимации

**Функциональный базис многофокусных лемнискат.** Многофокусная лемниската  $L$  однозначно представляется совокупностью конечного числа точек — фокусов внутри кривой и радиусом [Hilbert, 1935; Маркушевич, 1967; Ракчеева, 2007]. Определяющим инвариантом и уравнением лемнискаты является, как известно, постоянство вдоль кривой произведения расстояний до всех фокусов:

$$\prod_{j=1}^m r_j = R^m, \quad (1)$$

где  $m$  — число фокусов и порядок лемнискаты,  $r_j$  — евклидово расстояние от произвольной точки лемнискаты  $L$  до  $j$ -го фокуса ( $j = 1, \dots, m$ ),  $R$  — радиус лемнискаты.

В целом, многофокусные лемнискаты характеризуются тем, что это гладкие замкнутые кривые без самопересечений, не обязательно односвязные, содержащие внутри себя конечное число фокусов. Для фиксированного набора фокусов лемнискаты с разными радиусами образуют семейство вложенных кривых: кривые с большим радиусом охватывают кривые с меньшим радиусом, нигде с ними не пересекаясь. Для малых значений радиуса лемниската приближенно представляет собой  $m$  окружностей вокруг  $m$  фокусов. С ростом  $R$  она трансформируется в односвязную кривую сложной формы. С дальнейшим ростом  $R$  лемниската увеличивается

в размере, теряя сложность, и в пределе превращается в одну окружность. Такова эволюция формы многофокусной лемнискаты в зависимости от значений радиуса на всем диапазоне от 0 до  $\infty$ .

Семейство многофокусных лемнискат  $L$  образует класс аппроксимирующих функций для представления гладких замкнутых кривых, заданных конечным числом своих отсчетов. Аппроксимационные возможности многофокусных лемнискат исследовались Д. Гильбертом [Hilbert, 1935]. Им доказано, что для кривой, представляющей границу  $S$  произвольной односвязной области  $G$  комплексной плоскости, существует лемниската  $L$ , сколь угодно близкая к заданной кривой. Т. е., подобрав необходимое количество фокусов и их расположение, можно получить аппроксимирующую лемнискату, однако, вопрос о том, каким образом для конкретной эмпирической кривой, заданной координатами своих точек, определить радиус и соответствующую систему фокусов, остался открытым.

**Постановка задачи на вещественной плоскости.** Задачу фокусного приближения в общем виде можно сформулировать следующим образом:

*Пусть на плоскости имеется гладкая замкнутая кривая  $S$  без самопересечений, не обязательно односвязная, заданная координатным описанием конечного набора  $n$  принадлежащих ей точек  $z_j, j = 1, \dots, n$ . Требуется найти такую систему фокусов  $z_k, k = 1, \dots, m$ , что при определенном значении радиуса  $R$  соответствующая им лемниската будет близка с необходимой точностью к заданной кривой  $S$  в смысле выбранного критерия.*

Система многофокусных лемнискат не составляет ортогонального базиса, подобно тригонометрическим функциям, поэтому задачу построения приближенного фокусного описания кривой пока не удастся решить аналитически. Ее решение возможно в разных аналитико-алгоритмических вещественных или комплексных вариантах.

## 2. Критерии близости кривых. $L$ -критерий

Одним из основных вопросов аппроксимационных методов является определение понятия близости эмпирической кривой и ее аналитического приближения. Для фокусного метода трудность решения этого вопроса обусловлена неопределенностью установления соответствия между точками кривых. При параметрическом задании такое соответствие определяется параметром (в этом случае, однако, расстояние получается зависящим от параметризации).

Достижимость требуемого приближения кривой лемнискатами обеспечивается, как указывалось выше, доказанным Гильбертом утверждением о том, что при сформулированных в постановке задачи условиях существует лемниската, проходящая через  $\varepsilon$ -окрестность каждой точки кривой. В связи с этим, соответствие между точками двух кривых можно установить следующим образом: каждой точке  $c$  одной кривой поставить в соответствие ближайшую к ней точку  $l$  другой кривой, расстояние между которыми  $d(c, l)$  можно использовать для определения близости между кривыми (рис. 2а). Критерий близости кривых можно задать как некоторый функционал от этого расстояния, например:

$$\max_c \min_l d(c, l), \quad \text{или} \quad (2a)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \min_l r(c_j, l), \quad (2b)$$

где  $d(c, l)$  — расстояние между двумя точками в смысле обычной евклидовой метрики.

Следует подчеркнуть, что введенный критерий близости кривых при определении расстояния между аппроксимируемой эмпирической кривой  $S$  и аппроксимирующей лемнискатой  $L$  использует несимметричное определение, поскольку минимум расстояния вычисляется только по точкам лемнискаты  $L$ . Несимметричность критерия обусловлена тем фактом, что число отсчетов исходной кривой в общем случае не зависит от нас — с одной стороны,

и не может быть сколь угодно большим — с другой (иначе не потребовалось бы аппроксимировать кривую). Лемнискату, напротив, мы можем представить с произвольной плотностью точек, так как при известных параметрах, ее определяющих:  $k, \{f_i\}, R$ , лемниската в любой своей точке определяется однозначно. При компьютерной реализации алгоритма построения лемнискаты его параметры могут быть настроены так, чтобы точек на лемнискате  $L$  было значительно больше, чем на исходной кривой  $C$ , настолько, чтобы по сравнению с ней лемнискату можно было считать практически непрерывной линией. В таких условиях расстояние  $d(c, l)$  от произвольной известной точки исходной кривой до лемнискаты, вычисляемое указанным выше способом, определяется достаточно точно. Кривая «истинной» формы, непрерывной аппроксимации которой посвящена в целом данная работа, в общем случае не известна, а задана, как указывалось выше, дискретным множеством  $C$  своих точек на этой кривой. Заданное множество должно удовлетворять требованию репрезентативности «истинной» формы, что обеспечивается априорной информацией каждой конкретной прикладной задачи. С точки зрения гладкой аппроксимации репрезентативность таких данных предполагает возможность их кусочно-линейной интерполяции без потери существенной информации о форме. Обсуждение и решение этих вопросов составляют отдельную задачу, которая выходит за рамки данной работы, поэтому требование репрезентативности предполагается выполненным.

В дальнейшем такой критерий (односторонний аналог близости в метрике Хаусдорфа) будет использоваться для оценки близости кривой  $C$  и аппроксимирующей ее лемнискаты  $L$ . Назовем его  $L$ -критерием. Заметим, что  $L$ -критерий универсальный, он не привязан к определенной системе аппроксимирующих функций, требуя лишь гладкости кривых.

### 3. Фокусная аппроксимация в вещественной интерпретации

**Градиентно-поисковый алгоритм.** В работах [Ракчеева, 2007, 2010а, 2010b] описан итерационный алгоритм определения фокусной системы в вещественной интерпретации. Он использует специфику многофокусных лемнискат, универсальные методы оптимизации и имеет естественную геометрическую интерпретацию (рис. 1).

Принципиальной особенностью алгоритма является пошаговое движение фокусов: перемещения фокусов выполняются по одному при фиксированных положениях остальных (в начальный момент все фокусы сосредоточены в центре аппроксимируемой кривой). Это явным образом реализует геометрическую интерпретируемость процесса приближения. Каждая итерация содержит компоненты, связанные с выбором перемещаемого фокуса, направлением и величиной его перемещения. Выбор регулируется заданным критерием качества приближения, в данном случае это может быть  $L$ -критерий. Последовательность таких итераций обеспечивает целенаправленное движение фокусов приближающей лемнискаты при заданном их числе. В качестве иллюстрации на рисунке 1 приведены фазы траекторий движения фокусов в процессе приближения. В общем случае число фокусов, необходимое для достижения требуемой точности приближения, не известно. Для решения этой проблемы алгоритм выполняет процедуру размножения фокусов, содержащую дополнительные компоненты, связанные с определением момента добавления и местоположением нового фокуса, регулируемые алгоритмом также в соответствии с  $L$ -критерием.

Реализация  $L$ -критерия допускает разные варианты, в частности, определенные выше (2): минимаксная форма (2а) и усредненная форма (2b), что порождает также разные варианты самого алгоритма приближения. Первый вариант, назовем его  $S$ -вариант (рис. 1, вверху), анализирует качество приближения во всех точках исходной кривой и передвигает тот фокус и в том направлении, чтобы максимально улучшить ситуацию в худшем, в смысле качества приближения, месте кривой. Другой вариант, назовем его  $F$ -вариант (рис. 1, внизу), задает априорную очередность движения фокусов и перемещает их в направлении, соответствующем некоторому общему улучшению ситуации (2b).

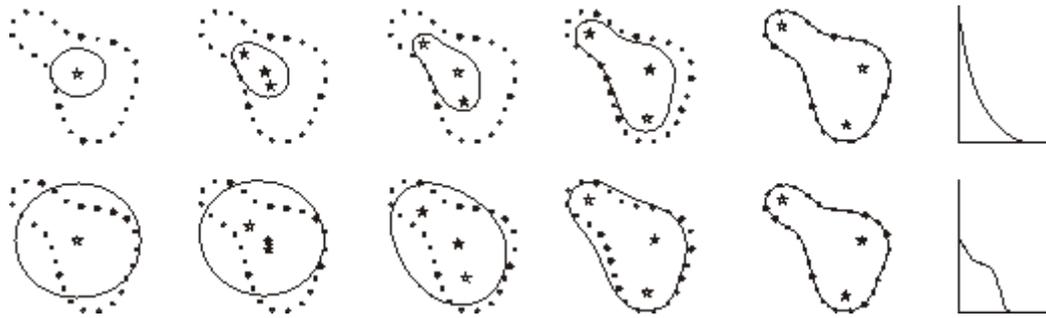


Рис. 1. Фазы приближения и графики сходимости двух вариантов вещественного градиентно-поискового алгоритма:  $C$  — вариант (вверху) и  $F$  — вариант (внизу)

Следует отметить важную особенность разработанных алгоритмов — они могут работать с любыми фокусными замкнутыми кривыми, не обязательно с лемнискатами. Это является следствием универсальности, как градиентного метода оптимизации, так и используемого критерия близости аппроксимируемой эмпирической кривой и аппроксимирующей лемнискаты.  $L$ -критерий близости кривых универсален и эффективен, но представляет определенные трудности, как в плане теоретического анализа, так и в вычислительном плане —  $L$ -критерий ресурсоемкий. В связи с этим, в качестве рабочего предложен другой критерий, обусловленный инвариантным свойством лемнискат.

#### 4. $R$ -критерий точности приближения

Заметим, что при точном совпадении аппроксимирующей лемнискаты с аппроксимируемой кривой последняя также будет удовлетворять уравнению (1), и поэтому вдоль нее текущий радиус будет сохранять постоянным свое значение, равное радиусу. Есть основания полагать, что лемниската тем ближе к кривой, чем меньше отклонение текущего радиуса  $r_i$  вдоль точек аппроксимируемой кривой от константы  $R^m$  (1). Учитывая эту инвариантную характеристику лемнискат, критерий близости между лемнискатой  $L$  и аппроксимируемой кривой  $C$  можно задать на основе меры разброса значения радиуса лемнискаты  $R$  вдоль кривой (2б), например:

$$\max_j \left| \prod_{k=1}^m r_{k,j} - R^m \right|, \quad \text{или} \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \prod_{k=1}^m r_{k,j} - R^m \right|, \quad (3)$$

где символ  $j$  индексирует точки аппроксимируемой кривой  $C$ , а  $r_{kj}$  есть произведение расстояний до  $m$  фокусов от  $j$ -ой точки кривой  $C$ .

Определенный таким образом критерий будем называть в дальнейшем  $R$ -критерием. Он использовался в работе градиентных алгоритмов, наряду с  $L$ -критерием, в качестве промежуточного критерия для оценки эффективности каждого отдельного шага. Значение  $L$ -критерия при этом определяло момент достижения заданного качества приближения и момент остановки алгоритма. Использование двух критериев в одной процедуре обосновано их топологической эквивалентностью.

**Взаимосвязь  $L$ - и  $R$ -критериев.** Можно показать, что при стремлении к нулю расстояния между кривой и лемнискатой в смысле  $L$ -критерия стремятся к нулю и колебания значений радиуса на кривой относительно среднего, что означает стремление к нулю и расстояния в смысле  $R$ -критерия, и наоборот. Рассмотрим  $L$ -критерий в виде:

$$Crt_L(L, C) = \max_{y \in C} \min_{x \in L} d(x, y)$$

и  $R$ -критерий, соответственно, в виде:

$$Crt_R(L, C) = \max_{y \in C} |r(f, y) - \overline{r(f, y)}|, \quad r(f, y) = \prod_{j=1}^m d(f_j, y),$$

где  $d(f_j, y)$  — расстояние от точки  $y$  кривой до  $j$ -го фокуса  $f_j$ ,  $r(f, y)$  — произведение расстояний от точки  $y$  кривой до  $f$  — полной системы всех  $m$  фокусов, а  $\overline{r(f, y)}$  — среднее значение этой функции по точкам  $y$  вдоль кривой  $C$ .

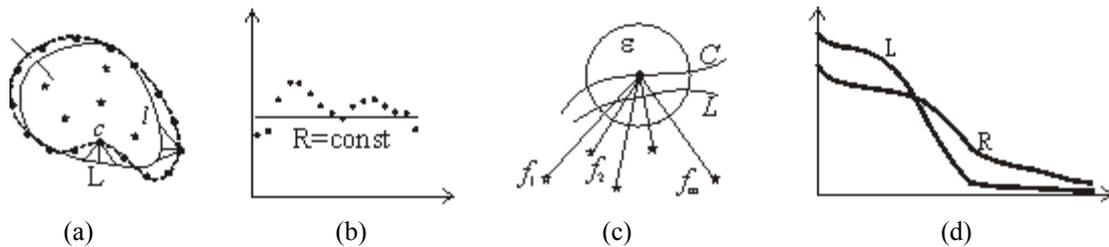


Рис. 2. Критерии близости кривых:  $L$ -критерий (а),  $R$ -критерий (б), и их взаимосвязь (с, d)

**Теорема.** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если

$$Crt_R(L, C) < \delta, \quad \text{то} \quad Crt_L(L, C) < \varepsilon.$$

**Доказательство.** 1. Фиксируем сначала некоторую точку  $y$  на кривой  $C$  и некоторое расположение системы фокусов  $f = \{f_1, \dots, f_m\}$  (рис. 2с). Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y$ . При фиксированном положении фокусов функция  $r(f, p)$  точки  $p$  непрерывна на границе  $\varepsilon$ -окрестности точки  $y$  и достигает на ней максимума и минимума:

$$R_{\varepsilon \max} = \max_{|p-y|=\varepsilon} r(f, p) \quad \text{и} \quad R_{\varepsilon \min} = \min_{|p-y|=\varepsilon} r(f, p).$$

Выберем  $\delta(f, y)$  равным минимуму из  $(R_{\varepsilon \max} - r(f, y))$  и  $(r(f, y) - R_{\varepsilon \min})$ . Тогда, если  $|r(f, y) - R_L| < \delta(f, y)$ , то  $R_L$  лежит в интервале  $(R_{\varepsilon \max}, R_{\varepsilon \min})$ , поэтому лемниската  $L$  пересекает  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y$  и, значит,  $\min_{x \in L} d(x, y) < \varepsilon$ .

2. Откажемся теперь от фиксированного положения фокусов. Известно, что непрерывная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, достигает на нем своего минимума. Функция  $\delta(f, y)$  является непрерывной функцией от  $f$ , а поскольку все фокусы  $f_1, \dots, f_m$  лежат внутри кривой  $C$ , то область определения функции  $\delta(f, y)$  ограничена. Следовательно, она достигает при некотором положении фокусов минимума. Обозначим его через  $\delta(y)$ . Очевидно, что значение  $\delta(y)$  отлично от нуля. Теперь, если  $|r(f, y) - R_L| < \delta(y)$ , то  $|r(f, y) - R_L| < \delta(f, y)$  для всех расположений фокусов  $f$  и, следовательно, согласно предыдущему,  $\min_{x \in L} d(x, y) < \varepsilon$ .

3. Поскольку  $\delta(y)$  непрерывно зависит от точки  $y$ , то можно, выбрав  $\delta$  равным минимуму  $\delta = \min_{y \in C} \delta(y)$ , обеспечить справедливость сформулированного утверждения для всей кривой  $C$ .

Обратное утверждение, состоящее в том, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если

$$Crt_L(L, C) < \delta, \quad \text{то} \quad Crt_R(L, C) < \varepsilon,$$

доказывается аналогично.

Иллюстрацией взаимосвязи введенных критериев могут служить графики их поведения (рис. 2d) в итерационной процедуре приближения лемнискатой некоторой эмпирической кривой в зависимости от номера итерации.

Таким образом, мы ввели второй критерий близости кривой и аппроксимирующей ее лемнискаты —  $R$ -критерий, топологически эквивалентный  $L$ -критерию. В модельных случаях, когда аппроксимируемая кривая является лемнискатой, оба критерия при соответствующем выборе фокусной системы приходят к нулевым значениям. В реальных же задачах аппроксимируемая эмпирическая кривая не является лемнискатой, поэтому в момент остановки оба критерия принимают минимальные остаточные значения (значение  $L$ -критерия при этом не превосходит заданного порогового значения).

Как отмечалось выше,  $L$ -критерий универсальный, он отвечает нашему интуитивному представлению о близости кривых, но он ресурсоемкий, так как требует построения лемнискаты на каждом шаге итерации.  $R$ -критерий, напротив, специальный, привязанный к лемнискатам, он менее нагляден, но более простой в вычислениях, так как не требует построения лемнискаты, и, кроме того, аналитическая форма его задания позволяет надеяться на более успешное использование его и для получения теоретических выводов.  $R$ -критерий можно использовать не только в комплексе с универсальным  $L$ -критерием, но и в качестве самостоятельного критерия соответствующих методов.

Описанный выше эвристический метод фокусной аппроксимации носит чисто алгоритмический характер. Разработанные алгоритмы, имея геометрически наглядные реализации, успешно решают задачу фокусной аппроксимации на вещественной плоскости. Вместе с тем, лемнискаты имеют естественное представление на комплексной плоскости, позволяющее получить ряд аналитических результатов и решений.

## 5. Фокусная аппроксимация в комплексной интерпретации

**Лемнискаты на комплексной плоскости.** Рассматривая точки плоскости как комплексные числа, можно записать лемнискату (1) в виде:

$$\prod_{k=1}^m |z - \zeta_k| = R^m, \quad (4)$$

здесь  $z = x + iy$  — точки лемнискаты,  $\zeta_k$  — координаты фокусов ( $k = 1, \dots, m$ ).

Поскольку произведение модулей есть модуль произведений, лемнискатический инвариант (2) можно записать и как постоянство на лемнискате модуля комплексного полинома, имеющего своими корнями  $m$  фокусов лемнискаты  $z_1, \dots, z_m$ :

$$|F(z)| = R^m, \quad (5)$$

где  $F(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_{m-1}z^{m-1} + z^m$  — полином с комплексными коэффициентами  $c_k = a_k + ib_k$ .

Важно отметить, что старший коэффициент полинома  $F(z)$  равен единице:  $c_m = 1$ . В связи с этим, дискриминант уравнения  $F(z) = 0$  есть непосредственно определитель Вандермонда. Коэффициенты  $c_k$  представляют собой, с точностью до знака, элементарные симметрические функции  $S_k$  координат фокусов:  $c_k = (-1)^k S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Квадрат модуля полинома  $|F(z)|^2$  является комплексной записью вещественного полинома  $P(x, y)$  с целочисленными показателями степеней. Аппликата этого полинома дает рельеф однозначной неотрицательной функции, обращающейся в нуль лишь в точках фокусов — корней полинома  $F(z)$ . Эта функция всюду гладкая, кроме точек фокусов, ограниченная внутри любой компактной области, содержащей фокусы, и неограниченно возрастающая по мере удаления от нее. Таким образом, алгебраически, лемниската — это решение уравнения равенства определенному значению  $R$  модуля комплексного полинома с корнями в фокусах.

Геометрически — это сечение рельефа аппликаты горизонтальной плоскостью на уровне, равном радиусу  $R^m$ , а семейство лемнискат — множество сечений на разных уровнях. Исходя из формы поверхности рельефа, легко проследить описанную выше эволюцию формы лемнискаты при изменении радиуса от 0 до  $\infty$ .

**Постановка задачи на комплексной плоскости.** Ввиду отмеченных особенностей геометрии поверхности модуля комплексного полинома  $|F(z)|$ , поиск корней полинома  $F(z)$  с известными коэффициентами является хорошо изученной задачей и не представляет принципиальных сложностей. Трудности связаны с поиском самого аппроксимирующего полинома  $F(z)$  — его комплексных коэффициентов  $c_k = a_k + ib_k$ . Вместе с тем, поиск непосредственно системы фокусов также представляет значительные трудности. Метод наименьших квадратов для координат фокусов приводит к следующей *системе нелинейных уравнений, степень которых растет с ростом числа фокусов*:

$$R^m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^m r_{kj},$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{(a_l - x_j)}{r_{lj}} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m r_{kj} - R^m \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m r_{kj} = 0, \quad \sum_{j=1}^n \frac{(b_l - y_j)}{r_{lj}} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m r_{kj} - R^m \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m r_{kj} = 0, \quad l = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Как следует из (6), за радиус приближающей лемнискаты принимается среднее значение радиусов по всем точкам кривой, а координаты каждого из фокусов должны удовлетворять условию равенства нулю суммы взвешенных единичных векторов, направленных из фокуса на все точки кривой. Следует заметить, что есть возможность понизить порядок уравнений, но все равно система остается нелинейной.

Уравнения для определения коэффициентов многочлена  $F(z)$  оказываются проще. Это объясняется тем, что коэффициенты  $c_k$  входят в  $F(z)$  линейно (а в  $|F(z)|^2$  — квадратично).

В связи с изложенными аргументами, предпочтительнее оказался подход к решению поставленной задачи в два этапа: сначала найти коэффициенты  $c_k$  полинома  $F(z)$ , а затем его корни-фокусы  $z_k$ .

Задача фокусной аппроксимации на комплексной плоскости может быть теперь поставлена в следующем виде.

*Требуется найти полином с комплексными коэффициентами  $c_k = a_k + ib_k$  и вещественным радиусом  $R$  степени  $m$ :*

$$F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m, \quad (7)$$

*такой, что лемниската, определяемая уравнением (5), приближала бы, в смысле выбранного критерия, кривую, заданную точками  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). По найденному полиному  $F(z)$  требуется определить его корни  $z_k$ , являющиеся фокусами аппроксимирующей лемнискаты.*

В рамках данной постановки возможны разные подходы к решению первой части задачи — поиску коэффициентов комплексного полинома.

**Поиск коэффициентов комплексного полинома.** Непосредственный поиск коэффициентов комплексного полинома (7) сводится к задаче:

$$\sum_{j=1}^n \left( |F(z_j)|^2 - R^2 \right)^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

здесь для удобства проведения вычислений обе части инвариантного соотношения (5) возведены в квадрат и  $R^m$  заменено на  $R$ .

Следует подчеркнуть, что минимизируемый в (8) функционал эквивалентен  $R$ -критерию (3b), так как лемниската, определяемая произведением расстояний до фокусной системы, есть модуль комплексного полинома (различие состоит в возведении в квадрат положительных величин радиуса и модуля полинома).



Рис. 3. Отображение лемнискаты (a) на фазовую окружность (b)

В точке минимума для искоемых параметров  $c_k = a_k + ib_k$  и  $R$  имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial R} \sum_{j=1}^n (|F(z_j)|^2 - R^2)^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{j=1}^n (|F(z_j)|^2 - R^2)^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b_k} \sum_{j=1}^n (|F(z_j)|^2 - R^2)^2 = 0.$$

Из первого уравнения этой системы находим значение радиуса аппроксимирующей лемнискаты  $R$ :

$$R^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |F(z_j)|^2. \quad (9)$$

Комплексная сумма производных для функционала (8) дает окончательно систему уравнений для неизвестных коэффициентов полинома:

$$\left( \frac{\partial}{\partial a_k} + i \frac{\partial}{\partial b_k} \right) \sum_{j=1}^n (|F(z_j)|^2 - R^2)^2 = 4 \sum_{j=1}^n (|F(z_j)|^2 - R^2) \cdot F(z_j) \cdot \bar{z}_j^k = 0, \quad k = 0, \dots, m. \quad (10)$$

Как видно, полученная система (10) не является линейной относительно неизвестных компонент комплексных коэффициентов аппроксимирующего полинома  $F(z)$  — составляющие эту систему уравнения имеют степень 3, независимо от числа фокусов, однако она является более простой, чем приведенная выше система для координат фокусов, степень которой растет с ростом числа фокусов (6). Это дает больше оснований рассчитывать на успех решения полученной системы нормальных уравнений классическими методами приближенного решения.

Этот и некоторые другие подходы [Ракчеева, 2007, 2010] к решению задачи фокусной аппроксимации в постановке (7) с минимизацией функционала (8) также приводят к *нелинейной системе уравнений*.

## 6. Метод фазовой окружности (МФО)

**Отображение на окружность.** Предпочтительнее представляется другой подход, приводящий к линейной системе уравнений на неизвестные коэффициенты комплексного полинома, и несколько другой критерий.

Рассмотрим лемнискату  $L$ , заданную уравнением (5) и состоящую из одной связной компоненты. Пусть точка  $z$  совершает полный обход этой лемнискаты (рис. 3a). Точка  $F(z)$  описывает при этом кривую на другой комплексной плоскости. Из (5) следует, что этой кривой является окружность с центром в точке 0 и радиусом  $R$ . Поскольку полином  $F(z)$  имеет в области, окруженной лемнискатой,  $m$  корней, то из принципа аргумента [Шабат, 1976] следует, что при обходе точкой  $z$  лемнискаты  $L$  точка  $F(z)$  обходит эту окружность  $m$  раз (рис. 3b).

Такие соображения приводят к новому подходу в задаче нахождения полинома  $F(z)$ . Если полином  $F(z)$  таков, что в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  задания аппроксимируемой кривой его модуль остается примерно постоянным:  $|F(z_j)| \approx R$ , то точки  $F(z_j)$  можно приближенно считать лежащими на окружности радиуса  $R$  с центром в  $0$  (рис. 3b), причем аргумент последней из этих точек отличается от аргумента первой на  $2\pi m$ . Для приближенного нахождения полинома можно выбрать  $n$  точек  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , принадлежащих единичной окружности с центром в  $0$ , т.е. положить  $w_j = e^{i\theta_j}$ , где  $\theta_j$  распределены на интервале  $[0, 2\pi m]$ , причем  $\theta_j \leq \theta_{j+1}$ , и поставить задачу о нахождении полинома  $F(z)$ , такого, чтобы его значения в точках  $z_1, z_2, \dots, z_n$  были бы возможно ближе к  $Rw_1, Rw_2, \dots, Rw_n$ .

Если, как и прежде, использовать в качестве критерия близости среднеквадратичный критерий, то задача сводится к нахождению комплексного полинома  $F(z)$ , минимизирующего функционал:

$$\sum_{j=1}^n |F(z_j) - Rw_j|^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Назовем это *W-критерием*.

Необходимые условия минимума многопараметрического выражения (11) получим, как и прежде, по методу наименьших квадратов, приравняв нулю производные по неизвестным параметрам  $a_k, b_k$  и радиусу  $R$ .

Уравнение для оптимизации выбора радиуса будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^n (F(z_j) - Rw_j) \bar{w}_j = 0,$$

откуда для комплексного радиуса  $R$  получим:

$$R = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(z_j) \bar{w}_j = 0. \quad (12)$$

Радиус  $R$  в данном случае также имеет комплексное выражение  $R = p + iq$ , причем  $|R|$  — собственно вещественный радиус, а главное значение аргумента  $\arg R$  является фазой отображения точек кривой на круг, т.е. определяет выбор начала обхода кривой при отображении.

Комплексная сумма производных по  $a_k, b_k$ , с учетом формулы для комплексного оператора дифференцирования квадрата модуля полинома по компонентам комплексного коэффициента  $c_k$ , даст следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \bar{z}_j^k (F(z_j) - Rw_j) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Подставляя сюда выражение для радиуса (12), а также выражение для полинома (6) и преобразуя к стандартному виду, получаем для оптимизации коэффициентов полинома  $c_0, \dots, c_{m-1}$  линейную систему из  $m$  уравнений по  $m$  параметрам:

$$\sum_{l=1}^m c_l \sum_{j=1}^n \bar{z}_j^k \left( z_j^l - \frac{w_j}{n} \sum_{s=1}^n z_s^l \bar{w}_s \right) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (13)$$

Можно считать  $R = 1$ , но отказаться от условия  $c_m = 1$ . Тогда, найдя полином  $F(z)$ , минимизирующий (10), следует перейти к полиному  $(1/c_m)F(z)$  со старшим коэффициентом, равным 1, который будет аппроксимировать точки:  $w_1/c_m, w_2/c_m, \dots, w_n/c_m$ , лежащие на окружности радиуса  $R = 1/|c_m|$ . Система уравнений относительно коэффициентов полинома будет иметь вид:

$$\sum_{l=0}^m \left( \sum_{j=1}^n z_j^l \bar{z}_j^k \right) c_l = \sum_{j=1}^n w_j \bar{z}_j^k, \quad k = 0, \dots, m. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили *систему линейных уравнений* относительно искомым коэффициентов  $c_1$  аппроксимирующего полинома  $F(z)$ .

**Итерационная структура МФО.** В полученной линейной системе (14), кроме неизвестных коэффициентов  $c_1$  и известных параметров, вычисляемых по координатам точек аппроксимируемой кривой  $z_j$ , есть неизвестные параметры  $w_j$  — точки на фазовой окружности. Поэтому непосредственно однократное классическое решение этой системы невыполнимо — требуется итерационная процедура последовательного уточнения фазы окружности  $w_j$ , а значит, и приближения в целом. Дальнейшие действия с полученной системой удобно выполнять в матричном виде.

Для случая  $R = 1$  линейная система уравнений (14) может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$Mc = Z^T w, \quad (15)$$

где  $M$  — квадратная метрическая матрица размером  $m \times m$ :

$$M = \left( \sum_{j=1}^n z_j^l \bar{z}_j^k \right),$$

$c$  — вектор-столбец коэффициентов полинома,  $w$  — вектор-строка точек фазовой окружности,  $Z$  и  $Z^T$  — матрицы степеней точек кривой размерами  $n \times m$  и  $m \times n$ .

Из решения системы (15) вектор коэффициентов полинома  $c$  равен:

$$c = M^{-1} Z^T w,$$

а значения искомого полинома в точках аппроксимируемой кривой:

$$F(z_j) = Aw,$$

где  $A$  — матрица:

$$A = ZM^{-1}Z^T.$$

Нормированные значения полинома лежат на фазовой окружности и представляют собой уточненные значения точек  $w_j$  на фазовой окружности:

$$w_{t+1} = NZM^{-1}Z^T w_t, \quad (16)$$

где  $N$  — нормировочная матрица, структура которой имеет вид диагональной матрицы размера  $n \times n$ , где на главной диагонали расположены подматрицы  $2 \times 2$  [Ракчеева, 2011а].

Выражение (16) представляет собой рекуррентное соотношение итерационного процесса уточнения аппроксимирующей лемнискаты, полином которой определяется из (15). Требуется доказать сходимость этой процедуры приближения.

## 7. Критерий и сходимость МФО

**Сходимость алгоритма.** Чтобы доказать сходимость алгоритма определения аппроксимационного полинома, нужно доказать, что:

$$\sum_{j=1}^n |F^t(z_j) - w_j^t|^2 > \sum_{j=1}^n |F^{t+1}(z_j) - w_j^{t+1}|^2.$$

Введем в неравенство промежуточный член:

$$\sum_{j=1}^n |F^t(z_j) - w_j^t|^2 > \sum_{j=1}^n |F^t(z_j) - w_j^{t+1}|^2 > \sum_{j=1}^n |F^{t+1}(z_j) - w_j^{t+1}|^2$$

и докажем каждое из двух утверждений для каждой точки в отдельности (возведение модулей в степень можно опустить).

Второе утверждение следует из минимизации функционала (11), составляющей основной этап алгоритма, — значения найденного на  $(k + 1)$ -й итерации полинома  $F^{k+1}$  в точках задания кривой  $z_j$  являются ближайшими к точкам фазовой окружности  $w^{k+1}$ :

$$|F^{j+1} - w^{j+1}| = \min_F |F - w^{j+1}|.$$

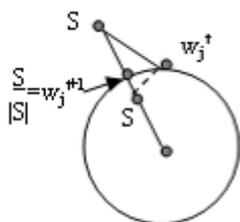


Рис. 4. Сходимость

Первое утверждение следует из геометрических соображений, — поскольку для каждого  $z_j$  точка  $w^{j+1}$  лежит на радиальной прямой, проведенной из центра фазовой окружности в точку  $F^j$  (рис. 4, точка  $S$ ), то расстояние между ними меньше, чем от  $F^j$  до любой другой точки этой окружности, в частности, до  $w^j$ :

$$|F^j(z_j) - w_j^j| > |F^j(z_j) - w_j^{j+1}| = \left| F^j(z_j) - \frac{F^j(z_j)}{|F^j(z_j)|} \right|.$$

Равенство достигается в условиях локального минимума.

**Эквивалентность  $R$ -критерия и  $W$ -критерия.** В пространстве фазовой окружности значение найденного полинома в произвольной заданной эмпирической точке  $F(z_j)$  на любой из итераций в общем случае располагается вне или внутри фазовой окружности радиуса  $R$  (рис. 4, точки с обозначением  $S$ ). Без ограничения общности можно считать ее, расположенную вне окружности. Соединим точку  $S$  с центром окружности. Фрагмент радиальной прямой вне окружности представляет собой невязку на этой итерации значения полинома в рассматриваемой  $j$ -точке модуля минимизируемого МФО  $W$ -критерия, который, в свою очередь, представляет собой невязку  $R$ -критерия для данной точки. Полное значение невязки  $W$ -критерия в  $j$ -точке представляет отрезок  $Sw^j$ . Этот отрезок является внешним фрагментом наклонной секущей к окружности, который, очевидно, всегда больше аналогичного фрагмента радиальной секущей. Итерационная составляющая алгоритма как раз и состоит в переносе для каждой  $j$ -той точки кривой  $C$  текущего фазового значения  $w_j^j$  в точку пересечения окружности с радиальной секущей  $w_j^{j+1}$ , при котором значения  $R$ -критерия и  $W$ -критерия уравниваются (рис. 4).

Отсюда следует, что  $W$ -критерий мажорирует  $R$ -критерий. Значит, сходимость в смысле  $W$ -критерия влечет за собой сходимость и в смысле  $R$ -критерия. А в силу доказанной выше (раздел 4, п. 2) топологической эквивалентности  $R$ -критерия и  $L$ -критерия можно сделать вывод и о топологической эквивалентности  $W$ -критерия и  $L$ -критерия, и, далее, об эквивалентности всех трех критериев.

Таким образом, решая задачу фокусной аппроксимации методом фазовой окружности, удовлетворяющим специальному  $W$ -критерию, мы тем самым решаем задачу с удовлетворением универсального  $L$ -критерия, тем более, что решение о достижении требуемой точности аппроксимации в МФО-алгоритме принимается также в соответствии с  $L$ -критерием (см. ниже, п. 2 алгоритма).

## 8. Алгоритмическая реализация МФО

**Итерационная структура алгоритма.** Для алгоритмической реализации изложенного метода необходимо, как отмечалось выше, правильно выбрать на окружности точки  $w_j$  или, что то же самое, определить последовательность углов  $\theta_j$ . Очевидно, что при правильном выборе положений этих точек описанный метод дает наилучшее приближение, возможное при заданной степени полинома. Однако, такой выбор представляет собой самостоятельную задачу, т. к. чтобы правильно определить углы  $\theta_j$ , а тем самым и  $w_j$ , нужно знать истинное расположение фокусов, которого у нас нет (напомним, что это есть цель решения поставленной

задачи фокусной аппроксимации). При отсутствии дополнительной информации в качестве точек  $\theta_j$  естественно взять в качестве  $\theta_j$   $n$  равноотстоящих точек интервала  $[0, 2\pi n]$ , т. е. положить  $w_j = \exp(2\pi i j/n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Эксперименты показали, что лемниската, построенная по равномерному распределению  $w_j$ , приближает аппроксимируемую кривую. Для ряда простых кривых это приближение оказывается достаточно хорошим, однако, в общем случае оно не может быть признано удовлетворительным.

Таким образом, отсутствие в общем случае информации о расстановке аргумента  $w_j$  приводит к итерационной схеме алгоритма, состоящей из последовательности итераций, каждая из которых уточняет значения точек  $w_j$  и дает, соответственно, лемнискаты, осуществляющие все более точное приближение заданной кривой. Равномерное расположение точек берется в данном случае в качестве первого приближения. В дальнейшем алгоритм многократно повторяет следующую цепочку шагов, составляющую *одну итерацию алгоритма*:

- 1). По точкам  $w_j$  строится полином  $F(z)$  как решение оптимизационной системы уравнений (14) в соответствии с методикой, изложенной в предыдущем разделе.
- 2). Проверяется критерий качества приближения, например,  $L$ -критерий. Если критерий удовлетворяется, алгоритм заканчивает свою работу, в противном случае осуществляется переход к следующему шагу 3.
- 3). В полученный полином подставляются последовательно точки  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , в результате чего получается последовательность точек  $F(z_1), F(z_2), \dots, F(z_n)$ .
- 4). Значения  $F(z_1), F(z_2), \dots, F(z_n)$  нормируются по формуле  $w_j = F(z_j)/|F(z_j)|$ , задавая новую последовательность  $w_j$  на единичной окружности.
- 5). Осуществляется переход к шагу 1.

Рисунок 5 иллюстрирует работу алгоритма в двух модельных экспериментах с приближением двух кривых однофокусной (рис. 5а) и двухфокусной лемнискатами (рис. 5б) соответственно. На графиках слева (5а, б) изображены точки кривой  $C$  («звездочки»), исходная лемниската («сплошная») и результирующая лемниската («пунктир»).

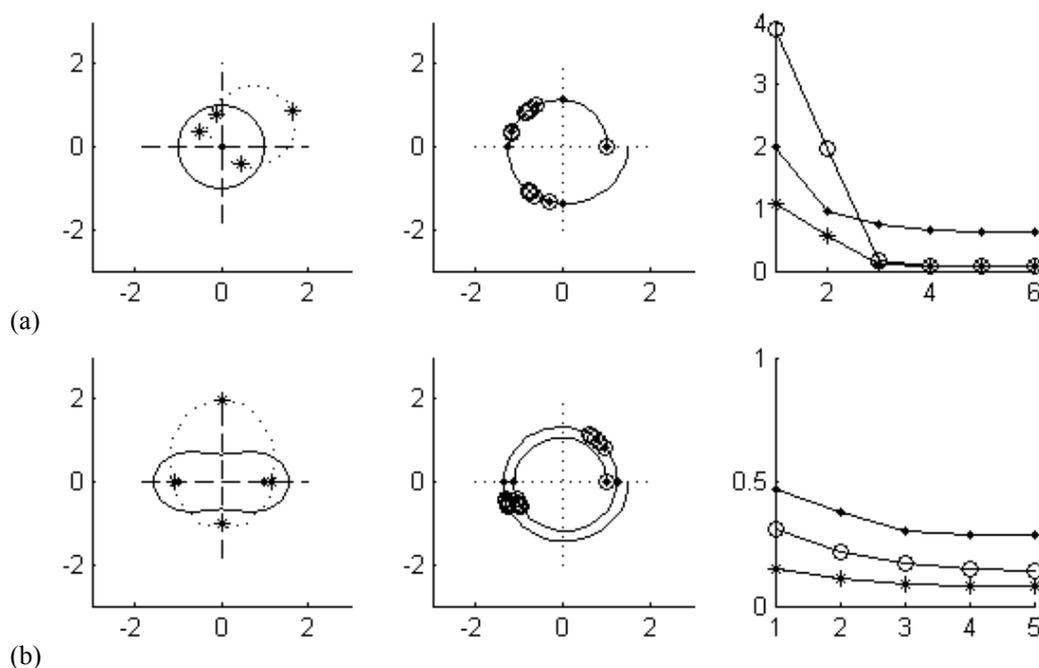


Рис. 5. Поведение  $R$ -,  $L$ -,  $W$ -критериев пяти итераций в модельных экспериментах (графики справа, где «звездочками» отмечен  $R$ -критерий, «кружочками» —  $W$ -критерий, «точками» —  $L$ -критерий), пояснения в тексте

Из описания алгоритма следует, что основой его работы является выбор образов точек аппроксимируемой кривой на единичной окружности. Чтобы проиллюстрировать динамику изменений этого процесса, на центральных графиках рисунка 5 выведены точки расположения на единичной фазовой окружности значений фаз  $w_j$  на каждой итерации. Точки  $w_j$  условно изображены на спирали, чтобы иметь возможность проследить итерационную динамику их перераспределения на витках окружности (смещения «кружочков» на спиральных кривых, где точками отмечены начальные значения фаз). В соответствии с числом фокусов в первом примере (рис. 5a) это один виток спирали, а во втором (рис. 5b) два. Как можно наблюдать (рис. 5b), наибольшие фазовые смещения соответствуют наиболее удаленной точке кривой  $C$ .

На графиках справа приведены кривые поведения  $R$ -,  $L$ -,  $W$ -критериев на пяти итерациях работы алгоритма (обозначения в подрисуночной подписи). Приведенные кривые иллюстрируют сходимость всех трех критериев и их топологическую эквивалентность (остаточные значения критериев связаны с тем, что аппроксимируемые кривые, представленные заданным набором точек, не могут быть точно представлены лемнискатами с указанным числом фокусов).

**Определение фокусов.** Поскольку результатом работы излагаемого алгоритма являются коэффициенты полинома, а целью исследования является нахождение фокусов, для окончательного решения задачи требуется определить корни  $\zeta_k$  найденного полинома, которые и являются фокусами. Вопрос о нахождении корней алгебраических уравнений хорошо исследован, поэтому в данной работе не рассматривается. Отметим лишь, что для завершенности программной реализации алгоритмов была добавлена простая процедура нахождения корней, основанная на нахождении минимума модуля полинома по методу наискорейшего спуска. Как известно из теории функций комплексного переменного, всякий такой минимум соответствует корню полинома, и никаких других локальных экстремумов модуль комплексного полинома не имеет, поэтому такая процедура обязательно сходится. После нахождения корня  $\zeta_1$  полинома  $F(z)$ , процедура вычисляет частное от деления полинома на двучлен  $(z - \zeta_1)$  и ищет уже корни этого частного. Полученные с помощью этой процедуры координаты фокусов отмечены на приведенных ниже рисунках «звездочками» (рис. 6).

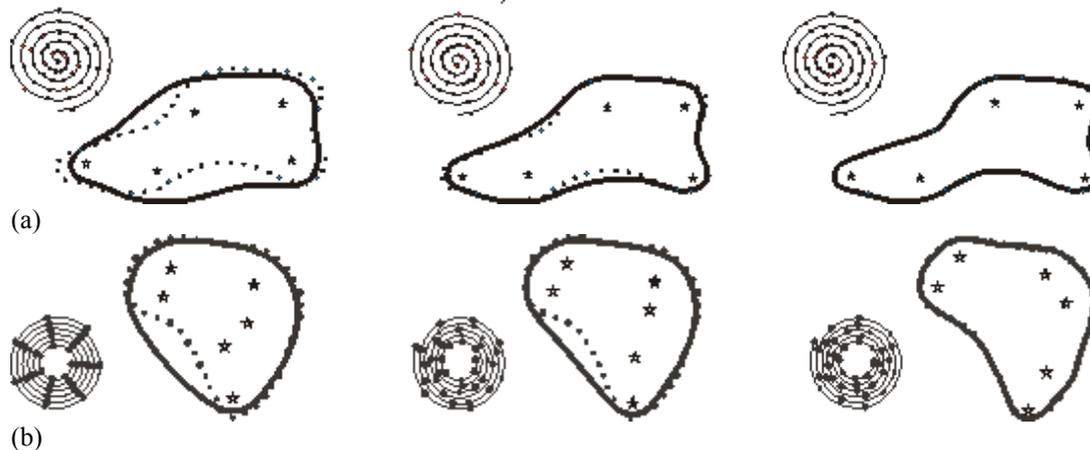


Рис. 6. Фазы приближения с иллюстрациями фазовой окружности: 5-фокусной кривой (a) и 6-ти фокусной эмпирической кривой (b)

**Результаты экспериментов по приближению кривых.** Первые контрольные эксперименты проведены с приближением кривых фокусного происхождения. При приближении произвольных кривых трудно отделить ошибку, связанную с принципиальной неточностью приближения при ограниченном числе фокусов, от ошибки, связанной с недостаточной точностью работы алгоритма. Лемниската же может быть приближена

с любой точностью, поэтому качество ее приближения может служить оценкой качества алгоритма (рис. 6а). Приведены три фазы (1-я, 3-я, 5-я) приближения пятифокусной лемнискаты, иллюстрирующие работу алгоритма (найденные координаты фокусов практически точно соответствуют истинным координатам, которые в данном случае известны).

Для иллюстрации фазовой динамики процедуры приближения на экран, наряду с промежуточными формами аппроксимируемой кривой, выводились также спиральные кривые с расположением точек  $w_j$  на каждой итерации. На рисунке 6а хорошо видно, как алгоритм, начиная с равномерно распределенных точек на окружности, затем перераспределяет их с целью получения более точного приближения, значения всех критериев при этом сходятся к нулю. Другой пример, приведенный на рисунке 6б, связан с приближением эмпирической кривой. Удовлетворительный результат получен с помощью шестифокусной лемнискаты.

**Приложения фокусной аппроксимации.** Фокусное приближение представляется целесообразным использовать как в задачах сжатия информации, так и в задачах, требующих интерпретации аппроксимационных степеней свободы. Например, в тех задачах, где относительно имеющихся измерений существует обоснованная гипотеза о порождении их некоторым числом источников, расположенных внутри аппроксимируемой кривой. Природа этих источников может быть самой различной, не обязательно физической.

Другое направление применения фокусного приближения основано на отмеченном выше способе представления аппроксимируемой кривой уравнением. Использование такого способа представления позволяет легко решать задачи, связанные с ответом на вопрос: лежит ли произвольно заданная точка на кривой, лежит ли она внутри области, ограниченной кривой, или вне ее; насколько удалена указанная точка от кривой и ряд других [Ракчеева, 2011b]. Решение таких задач представляет, как правило, значительные трудности. К ним относятся, например, задачи распознавания образов и принятия решений.

Исследование более широкого класса многофокусных кривых, названных квазиломнисками, задаваемого аддитивным функционалом произвольной функции расстояния  $\varphi(r)$ , выделяет семейство лемнискат как наиболее подходящее для приближения произвольных кривых среди всех квазиломнискат при определенных требованиях к аппроксимационному аппарату и к функции расстояния [Ракчеева, 2009a].

Фокусное представление формы кривых позволяет ввести на плоскости полиполярную систему координат. Семейство лемнискат и семейство градиентных к ним кривых образуют два взаимно ортогональных семейства координатных кривых:  $\rho(x, y) = \text{const}$  и  $\varphi(x, y) = \text{const}$ . Особенность фокусной полиполярной системы координат состоит в том, что ее метрическая компонента может иметь произвольную форму, например, настроенную на форму заданной кривой [Ракчеева, 2009б]. На рисунке 7 приведена сетка полиполярной лемнистической системы координат для 6-ти фокусной аппроксимации эмпирической (географической) кривой.

Отметим, наконец, что, поскольку система фокусов содержит в сжатом виде информацию о форме приближаемой кривой, найденное приближение может быть использовано для описания особенностей этой формы. Инструментарий фокусного приближения предоставляет адекватные средства для решения также прямой задачи — генерации гладких форм при работе с ЭВМ в интерактивном режиме [Ракчеева, 2001].

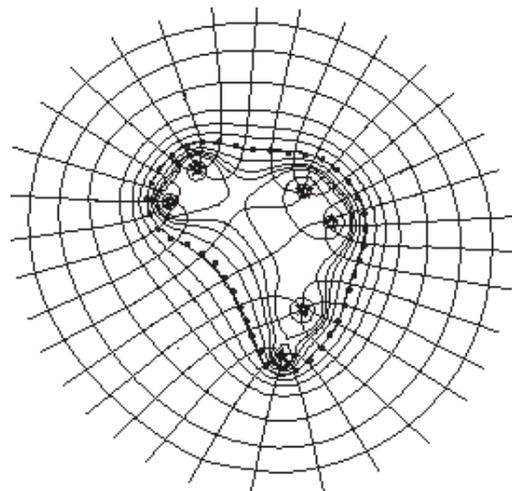


Рис. 7. Полиполярная система координат эмпирической кривой

## Заключение

**Критерии и методы фокусной аппроксимации.** Предлагаемые подходы к решению задачи фокусной аппроксимации позволяют разработать алгоритмы построения лемнискаты, аппроксимирующей заданную эмпирическую кривую. Рассмотрены три подхода.

Первый, градиентный — универсальный, вещественный, полностью алгоритмический, он ищет непосредственно необходимое количество и расположение фокусов для достижения требуемой точности приближения. Применимость градиентного метода выходит за рамки лемнискат, он использует универсальный *L-критерий*.

Второй подход, разделяющий задачу фокусной аппроксимации на две: 1) поиск аппроксимирующего полинома — лемнискаты и 2) определение управляющих параметров — фокусов, дает более специализированное аналитико-алгоритмическое решение в комплексной интерпретации. Численно-аналитические методы этого подхода, используя *R-критерий*, минимизируют вещественный функционал, что приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений. Доказана топологическая эквивалентность и преобладание *L-* и *R-критериев*.

Третий подход (МФО), также в комплексной парадигме разделения задач поиска лемнискаты и ее фокусов, является наиболее специфическим для базиса лемнискат. Используя *W-критерий*, метод фазовой окружности минимизирует комплексный функционал, с вещественной и мнимой компонентами, что приводит к аналитико-алгоритмическому методу фокусной аппроксимации — к линейной системе уравнений, встроенной в итерационную процедуру последовательного приближения. Доказана топологическая эквивалентность *W-критерия* и *R-критерия*.

Таким образом, рассмотрено несколько подходов к решению задачи фокусной аппроксимации, каждый из методов имеет свои преимущества.

## Список литературы

- Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967. — 486 с.
- Ракчеева Т. А. Приближение кривых: фокусы или гармоники // Математика, компьютер, образование. Т. 2. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — С. 83–90.
- Ракчеева Т. А. Квазиломнискаты в задаче приближения формы кривых // Интеллектуальные системы. — 2009а — Т. 13, Вып. 1–4. — С. 79–96.
- Ракчеева Т. А. Полиполярная лемнискатическая система координат // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009б. — Т. 1, № 3. — С. 251–261.
- Ракчеева Т. А. Многофокусные лемнискаты: приближение кривых. Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50, № 11. — С. 2060–2072.
- Ракчеева Т. А. Алгоритмическое решение задачи фокусной аппроксимации замкнутых кривых на вещественной плоскости // Программные продукты и системы. — 2010. — № 3(91). — С. 59–65.
- Ракчеева Т. А. Управление многофокусными степенями свободы в задаче формообразования // Параллельные вычисления и задачи управления. Труды Международной научной конференции. Москва, ИПУ РАН, 2001.
- Ракчеева Т. А. Фокусная аппроксимация на комплексной плоскости. Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011а. — Т. 51, № 11. — С. 1963–1972.
- Ракчеева Т. А. Фокусная аппроксимация в задаче распознавания // Математика, компьютер, образование, вып. 18, ч. 1 — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011б. — 141 с.
- Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
- Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen.— Berlin: Springer, 1935. — Bd. 3. — 435 p.