

УДК: 330.43

## Модели производственных функций для российской экономики

И. Л. Кирилюк

Институт экономики РАН,  
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 32

E-mail: igokir@rambler.ru

*Получено 17 апреля 2013 г.*

В статье проведён сравнительный анализ применимости нескольких вариантов моделей производственной функции для анализа современной экономики России. Посредством регрессионного анализа оценено влияние таких факторов, как цены на нефть на мировом рынке, инновационные процессы, гипотеза о постоянной отдаче от факторов производства. Расчёты производились как для экономики в целом, так и для отдельных её отраслей. Показано, что рассматриваемые модели экономики России в целом и ряда её отраслей применительно к реальным данным демонстрируют значимую возрастающую отдачу по труду. Обсуждаются ограничения применимости моделей.

Ключевые слова: производственные функции, функции Кобба–Дугласа, отдача от факторов производства, регрессионный анализ, Россия

### Models of production functions for the Russian economy

I.L. Kirilyuk

*Institute of Economics RAS, 32 Nakhimovsky prospect, Moscow 117218 Russia*

**Abstract.** — A comparative analysis of the applicability of several variants of the production function models for the analysis of modern Russian economy is presented in a paper. Through regression analysis, the effect of such factors as the oil prices on the world market, the innovation, the hypothesis of constant returns to factors of production is estimated. Calculations were made both for the economy as a whole and for separate industries. It is shown that the models of the economy of Russia as a whole and some of its industries in relation to real data have significant increasing returns to labor. Limits of applicability for the models are discussed.

Keywords: production functions, Cobb–Douglas functions, returns to factors of production, regression analysis, Russia

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 293–312 (Russian).

## 1. О применимости степенной производственной функции для анализа макроэкономики

Зависимость величины выпуска какой-либо продукции от факторов производства описывается производственной функцией.

Как правило, экономический анализ с использованием аппарата производственных функций проводится на уровне микроэкономики. Большинство известных экономистов — неоклассиков XIX века предпочитали не объединять производственные функции фирм в агрегированную производственную макроэкономическую функцию [Блауг, 2004]. И позже рядом авторов были высказаны критические соображения относительно такого агрегирования (см., например, [Робинсон, 1954]), связанные с трудностями корректного определения в макроэкономике таких агрегированных величин, как, например, капитал. Однако, в том числе, в русскоязычной литературе известны примеры исследования динамики отдачи основных производственных ресурсов на макроуровне (соответствующие работы указаны в разделе 6 данной статьи), где показана успешность применения агрегированных производственных функций для описания экономики целых государств.

В макроэкономике производственные функции могут использоваться при изучении зависимости ВВП страны от величины имеющихся в стране основных фондов (капитала) и труда, определяемого количеством занятых работников. Иногда производственные функции используются для решения других задач, например, для прогнозирования занятости в отраслях промышленности России [Гневашева, 2005].

Одной из характеристик производства является так называемая отдача факторов, используемых в экономике. Она характеризует, насколько эффективно увеличивается производство товаров или услуг при введении в систему некоторых дополнительных ресурсов. Когда количество произведенного продукта увеличивается пропорционально увеличению количества затрачиваемых на его выпуск ресурсов каждого вида, говорят о постоянной отдаче. Если увеличение количества ресурсов приводит к более высоким темпам роста производительности (например, благодаря появляющимся новым возможностям оптимизации производства), отдача называется возрастающей. А если рост выпуска происходит медленнее, чем при постоянной отдаче (например, за счёт увеличения издержек из-за несовершенства технологий и оборудования, неэффективности использования ресурсов), говорят об убывающей отдаче.

Традиционно в экономической теории использовался в основном постулат о наличии постоянной, или убывающей отдачи. Это подтверждалось эмпирическими сведениями и являлось условием экономического равновесия. Однако, возрастающая отдача также выявлена в ряде отраслей экономики и ряде стран (см., например, обзор [Кирдина, Малков, 2010]).

В данной статье мы рассмотрим, какова динамика отдачи основных факторов производства российской экономики в постперестроечный период.

## 2. Характеристики степенной производственной функции

В экономических исследованиях часто используются производственные функции, имеющие следующий вид<sup>1</sup>

$$Y = AK^\alpha L^\beta, \quad (1)$$

где  $Y$  — выпуск продукции (или ВВП),  $K$  — капитал (или основные фонды),  $L$  — труд (который может характеризоваться количеством работников),  $\alpha$  — константа (коэффициент эластич-

<sup>1</sup> Производственная функция такого вида известна как функция Кобба–Дугласа, использованная американскими исследователями Ч. Коббом и П. Дугласом при анализе влияния затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США в 1920–30-х гг.

ности производства по капиталу  $K$ ),  $\beta$  — коэффициент эластичности производства по труду  $L$ ,  $A$  — коэффициент, в простейшем случае являющийся константой, которую часто связывают с уровнем технологий, хотя на самом деле он может зависеть и от других факторов, не относящихся непосредственно к труду, или капиталу. Например, в России ВВП может существенно зависеть от изменения цен на нефть на мировом рынке [Дубовский, 2012, Синельников-Мурылев и др., 2009, Казакова, Синельников-Мурылев, 2009, Подкорытова и др., 2011, Брагинский, 2008, Жилаев, 2004, Ловянников, 2007]. Кроме того, уровень технологий можно в каких-то случаях считать постоянным, а в других возрастающим, выделив в явной форме соответствующий временной тренд в производственной функции.

Отметим, что в общем случае коэффициент  $A$  можно было бы считать некоторой функцией от времени. Но при произвольно зависящем от времени  $A$ , мы не можем на основе имеющихся данных рассчитать определенные значения коэффициентов. Поэтому в наших расчётах мы везде считаем  $A$  постоянным, вынося временной тренд конкретного вида в качестве отдельного множителя. Но нужно понимать, что изменение гипотезы о виде зависимости  $A$  от времени может изменить итоговые выводы из соответствующих расчётов о характере отдачи от факторов производства.

Также можно рассматривать случаи, когда от времени зависят и другие коэффициенты. Так в работе [Назруллаева, 2010] упоминается модель, в которой эластичность капитала  $\alpha$  изменяется во времени пропорционально объёму осуществленных отраслью инвестиций. Мы подобные модели здесь не рассматриваем и считаем все коэффициенты постоянными. Однако изменение величины и знака коэффициентов эластичности во времени может играть существенную роль в развитии экономических систем и устранить некоторые трудности в интерпретации, возникающие при предположении о неизменном характере отдачи.

Учитывая отмеченные в литературе роль цен на нефть на мировых рынках для динамики российского ВВП и значение временного тренда, мы сравним различные варианты аппроксимации с использованием более общего, чем (1) вида производственной функции, а именно, варианты функций вида

$$Y = AK^\alpha L^\beta P^\gamma e^{\zeta t}, \quad (2)$$

где  $P$  — значения цены на нефть за данные годы,  $\gamma$  — коэффициент, характеризующий степенную зависимость ВВП от мировых цен на нефть,<sup>2</sup>  $\zeta$  — коэффициент, характеризующий экспоненциальный временной тренд.

В работе [Копотева, Черный, 2011] сказано, что экспоненциальный множитель типа  $e^{\zeta t}$  характеризует эффект от внедрения инновационных процессов в экономике. С другой стороны, введение этого множителя уменьшает эффект ложной регрессии, связанной с наличием у переменных общего детерминированного тренда. Существуют также методы учёта возможности других проявлений ложной регрессии, связанные с понятием коинтеграции временных рядов [Engle, Granger, 1987]. Но используемые нами временные ряды данных весьма короткие, и мы не уверены в надёжности применения этих методов к используемым нами данным. Поэтому, как и большинство авторов статей, которые мы обсуждаем в разделе 6, мы их не используем.

Переменные  $Y$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $P$  берутся из эмпирических данных, а коэффициенты  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\zeta$  должны быть вычислены (разумеется, учёт последних двух множителей в (2) при аппроксимации эмпирических данных будет приводить к изменению расчётных  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ).

При исследовании разных вариантов моделей, мы полагаем либо  $\gamma = 0$ , то есть, отсутствие влияния цен на нефть на ВВП, либо он вычисляется посредством формул регрессии.

Коэффициент  $\zeta$  мы также полагаем или  $\zeta = 0$ , то есть, отсутствие временного тренда, или он вычисляется посредством формул регрессии. Переменная  $t$  обозначает время.

<sup>2</sup> С возможными способами учёта влияния цен на нефть на макроэкономические показатели можно ознакомиться, например, в [Дубовский, 2012; Синельников-Мурылев и др., 2009; Казакова, Синельников-Мурылев, 2009].

Кроме того, нас интересует справедливость соотношения  $\beta = 1 - \alpha$ . Дело в том, что в функции Кобба–Дугласа величина  $\alpha + \beta$  характеризует отдачу от масштаба следующим образом:

$\alpha + \beta < 1$  — убывающая отдача,

$\alpha + \beta = 1$  — постоянная отдача,

$\alpha + \beta > 1$  — возрастающая отдача.

Отдача возрастающая, если при увеличении количества используемых ресурсов на 1 итоговый показатель, в данном случае ВВП, увеличивается более чем на 1.

Преобразованием  $y = Y/L$ ,  $k = K/L$  при условии  $\beta = 1 - \alpha$ , то есть, постоянной отдачи, можно уменьшить число переменных в системе на одну:

$$y = Ak^\alpha P^\gamma e^{\xi t}. \quad (3)$$

Соответствие её с достаточно высокой точностью эмпирическим данным (по принятым в эконометрике критериям [Дрейпер, Смит, 1986]) позволило бы обойтись без необходимости использования более сложных гипотез, таких, как нестационарность коэффициента  $A$ , или не постоянная отдача от масштаба (то есть, не выполнение соотношения  $\beta = 1 - \alpha$ ).

### 3. Используемые данные

Все данные, которые мы используем в расчётах на уровне экономики в целом, отражены в таблице 1.

Таблица 1. Используемые в статье показатели экономики России в целом

год	L — Численность занятых РФ, тыс. чел.	K — Основные фонды РФ (в постоянных ценах 2008г., млн. руб.)	P — Цена на нефть Urals, долл/барр	Y — ВВП (в постоянных ценах 2008г, млрд. руб.)	Индексы — дефляторы валового внутреннего продукта, % к предыдущему году	Индексы- дефляторы валового нако- пления основ- ного капитала, % к предыду- щему году
1995	66330	71476961.62	16.7	22908.3		—
1996	65748	122401130.1	20	22081.8	145.8	—
1997	64574	107660685.4	18.4	22386.8	115.1	—
1998	63683	96638783.94	11.9	21190.2	118.6	—
1999	64114	56258271.21	17.4	22536	172.5	—
2000	64517	49796155.32	26.9	24799.9	137.6	—
2001	64980	52614224.95	23	26062.5	116.5	—
2002	65574	55751383.78	23.7	27312.3	115.6	—
2003	65979	61866979.09	27.2	29304.9	113.8	110.1
2004	66407	58669932.22	34.4	31407.8	120.3	114.3
2005	66792	63002572.25	50.6	33410.5	119.3	110.8
2006	67174	65551463.71	60.1	36134.6	115.2	110
2007	68019	71986613.17	69.3	39218.7	113.8	115.8
2008	68474	74441095	61.1	41276.8	118.0	119.2
2009	67463	75925248.15	78.2	38048.6	102.0	108.4
2010	67582	79011568.67	109.3	39699.9	111.6	108.8

Источники данных:

Y: [Росстат, 2012] — таблица в подразделе «Национальные счета» раздела официальной статистики на сайте Федеральной службы государственной статистики.

L: [Росстат, 2012] — данные взяты из раздела «Труд» Российского статистического ежегодника (данные за разные годы приводятся в разных выпусках).

P: [Top Oil News, 2012] — данные с сайта о ценах на нефть, усредненные по годам.

K: [Росстат, 2012] — вычислялся на основе данных таблицы подраздела «Основные фонды» раздела официальной статистики на сайте Федеральной службы государственной статистики.

Капитал в постоянных ценах был исчислен с использованием годового индекса-дефлятора валового накопления основного капитала за период 2003–2010 гг., поскольку в базе данных на сайте Федеральной службы государственной статистики [Росстат, 2012] обнаружены данные по этому индексу только за эти годы. Для расчетов за предыдущий период (1996–2002) использовались данные индекса-дефлятора ВВП, приведенные на том же сайте [Росстат, 2012]. Данные из исходной таблицы наличия основных фондов в Российской Федерации на конец отчетного года по полной учетной стоимости, млн. руб. (до 1998 г. — млрд. руб.) в текущих ценах с сайта Росстата последовательно делились (после 2008 г. умножались) на дефлятор, и таким образом была вычислена величина капитала в постоянных ценах 2008 г.

Отметим, что из-за происходившей в 1990-е годы гиперинфляции, а также из-за бессистемных переоценок основных фондов, объективная оценка величины K затруднительна [Воскобойников, Дрябина, 2010]. О специальной методологии расчета стоимости основных фондов пишется в [Гордонов, 1998], но и она не дает гарантий надежных оценок.

#### 4. Проверка гипотезы о характере отдачи от факторов производства

В этом разделе будет описана методология оценки применимости моделей вида (2–3) к описанию эмпирических данных и оценки характера отдачи от факторов производства, а также приведены результаты соответствующих расчётов.

##### 4.1. Линеаризация модели

Таблица 1 содержит все данные, использованные для проверки применимости моделей (2–3), вычисления их коэффициентов и проверки характера отдачи от факторов производства (в предположении гипотезы  $A = \text{const}$ ).

Простым методом вычисления значений коэффициентов, при которых производственные функции (2–3) наилучшим образом аппроксимируют эмпирические данные, а также точности модели и коэффициентов, является линейная регрессия посредством метода наименьших квадратов. Поэтому используемые нами варианты производственной функции (2–3) приводятся к пригодной для применения этого метода вычислений форме посредством взятия натуральных логарифмов от всех переменных (тогда модель приобретает линейный вид). В результате получаем для функций вида (2–3) соответственно следующие уравнения:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma \ln P + \zeta t, \quad (4)$$

$$\ln y = \ln A + \alpha \ln k + \gamma \ln p + \zeta t, \quad (5)$$

к исследованию которых применима обычная линейная регрессия.

Расчёты для разных случаев проводились в соответствии с формулами (4–5), включая или исключая влияние динамики цен на нефть и временной тренд. Также варьировались анализируемые периоды, поскольку в России экономическое развитие в 1999–2010 годах было в целом более стабильным, чем в 1995–1998 (хотя мировой кризис 2008 года отразился и на России), а нас интересовало, насколько влияют на результат кризисные явления. В итоге было реализо-

вано 16 альтернативных вариантов расчётов, результаты которых сгруппированы в четырех приведённых ниже таблицах.

В таблицах 2–5 показаны следующие величины:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\zeta$  — коэффициенты уравнений (2–3), при которых соответствующий вариант функции (4–5) наиболее точно аппроксимирует данные посредством метода наименьших квадратов. Все величины приведены с точностью до 2-го знака после запятой, кроме  $\rho$ , значения которого приведены до шестого знака (так как эта величина в некоторых случаях достаточно мала). Значения коэффициента  $A$  в таблицах не приводятся, поскольку его величина в каждом случае зависит от единиц измерений, размерность зависит от выбора модели и не влияет на выводы статьи.

$R^2$  — коэффициент детерминации, характеризующий долю дисперсии зависимой переменной, объясняемую рассматриваемой моделью. Считается, что регрессионная модель должна объяснять не менее 80% вариации зависимой переменной, то есть модель регрессии успешна, когда  $R^2 > 0.8$  [Дрейпер, Смит, 1986].

Скорректированный  $R^2$  используется для того, чтобы была возможность сравнивать модели с разным числом факторов так, чтобы их число меньше влияло на статистику. Это важно, поскольку значение  $R^2$  увеличивается (не уменьшается) от добавления в модель новых переменных, даже если эти переменные не имеют отношения к объясняемой.

$\rho$  — величина, называемая уровнем значимости для F-критерия; используется для проверки гипотезы о значимости уравнения регрессии. Малые значения  $\rho$  показывают, что гипотезу об отсутствии линейной зависимости между переменными следует отклонить. Часто  $\rho$  сравнивается с уровнем значимости 0.05. Мы принимаем этот вариант.

Для каждого из коэффициентов регрессии также вычисляется свой собственный уровень значимости. Эти коэффициенты также принято считать значимыми при значениях этих уровней меньше 0.05.

#### 4.2. Проверка гипотезы о постоянной отдаче факторов производства

В таблицах 2–3 приводятся данные расчётов, когда априори предполагается выполненным условие постоянной отдачи факторов производства, т. е.  $\beta=1-\alpha$ , а следовательно, справедлива формула (3), поэтому она используется для вычисления коэффициентов уравнения регрессии.

Все величины, соответствующие принятию гипотезы о значимости модели (по описанным в предыдущем подразделе критериям), а также значимые коэффициенты регрессии здесь и далее выделены в таблицах жирным шрифтом.

Таблица 2. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с постоянной отдачей и без временного тренда

Исследуемые периоды	$\alpha$	$\gamma$	$R^2$	$R^2$ скорректированный	Уровень значимости $\rho$
1995–2010	-0.24±0.47	0	0.08	0.01	0.294461
1999–2010	<b>1.23 ±0.44</b>	0	0.79	0.77	<b>0.0001</b>
1995–2010	-0.07±0.11	<b>0.33±0.04</b>	<b>0.96</b>	<b>0.95</b>	<b>0.000000</b>
1999–2010	0.29±0.39	<b>0.26±0.09</b>	<b>0.96</b>	<b>0.95</b>	<b>0.000000</b>

Приведенные в таблице 2 значения показывают, что варианты, где влияние динамики мировых цен на нефть не учитывается, демонстрируют малый коэффициент детерминации. Это означает, что модель фактически не применима, хотя результат во второй строке таблицы 2 близок к значимому. При этом, для случаев с включением  $R^{\gamma}$ , оказываются незначимыми коэффициенты, характеризующие вклад труда и капитала.

Данные таблицы 3 показывают, что, хотя включение временного тренда приводит во всех рассмотренных случаях к высоким значениям  $R^2$ , коэффициенты, характеризующие вклад труда и капитала, не значимы. Тем не менее, модель с учетом мировых цен на нефть и без тренда по значению  $R^2$  немного точнее, чем модель с трендом, но без учета этих цен.

Таблица 3. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с постоянной отдачей и с временным трендом

Исследуемые периоды	$\alpha$	$\gamma$	$\zeta$	$R^2$	$R^2$ скорректированный	Уровень значимости $p$
1995–2010	0.015±0.1	0	<b>0.045±0.00</b>	<b>0.95</b>	<b>0.94</b>	<b>0.000000</b>
1999–2010	-0.24±0.65	0	<b>0.058±0.02</b>	<b>0.95</b>	<b>0.94</b>	<b>0.000001</b>
1995–2010	-0.02±0.07	<b>0.18±0.07</b>	<b>0.02±0.01</b>	<b>0.98</b>	<b>0.98</b>	<b>0.000000</b>
1999–2010	-0.11±0.46	<b>0.16±0.11</b>	<b>0.03±0.025</b>	<b>0.98</b>	<b>0.97</b>	<b>0.000000</b>

Общий вывод состоит в том, что все рассмотренные варианты модели с постоянной отдачей демонстрируют свою неприменимость для экономики России за рассматриваемые периоды. Поэтому гипотезу о постоянной отдаче труда и капитала (основных фондов) в российской экономике за рассматриваемый период предполагается отклонить.

### 4.3. Случаи модели с переменной отдачей факторов производства

Поскольку мы отказываемся от условия постоянной отдачи, то можно рассмотреть  $\alpha$  и  $\beta$  как независимые коэффициенты и проверить, модель с какой отдачей по труду и капиталу является оптимальной. Случаи, приведённые в таблицах 4–5, соответствуют случаям из таблиц 2–3, но при этом гипотеза о постоянстве отдачи априори не принимается.

Таблица 4. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с произвольной отдачей и без временного тренда

Исследуемые периоды	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$R^2$	$R^2$ скорректированный	Уровень значимости $p$
1995–2010	-0.19±0.21	<b>9.9±2.49</b>	0	<b>0.85</b>	<b>0.83</b>	<b>0.000004</b>
1999–2010	0.18±0.28	<b>8.4±1.97</b>	0	<b>0.99</b>	<b>0.98</b>	<b>0.000000</b>
1995–2010	-0.08±0.12	1.93±3.19	<b>0.3±0.11</b>	<b>0.96</b>	<b>0.95</b>	<b>0.000000</b>
1999–2010	0.13±0.22	<b>6.13±2.47</b>	<b>0.1±0.09</b>	<b>0.99</b>	<b>0.99</b>	<b>0.000000</b>

Таблица 4 показывает, что в предположении произвольных  $\alpha$  и  $\beta$  расчёты демонстрируют высокую точность модели, особенно в период относительно стабильного развития экономики России в 1999–2010 гг. Однако, случай, приведённый в 3-й строке таблицы 4 за период 1995–2010 гг. выделяется тем, что там влияние динамики цен на нефть на ВВП значимо, а влияния труда и капитала на динамику ВВП не значимы.

Большие значения коэффициента  $\beta$  везде, кроме периода 1995–2010 гг. в 3-й строке, означают, что имеет место высокая отдача по труду и за счет этого — возрастающая суммарная отдача факторов производства по экономике в целом. Заметим, что для значимых случаев  $\beta$  даже нижняя граница доверительного интервала не только положительна, но и больше единицы.

При этом влияние капитала, определяемое коэффициентом  $\alpha$ , во всех случаях не значимо.

Таблица 5. Коэффициенты и точность аппроксимации данных формулой производственной функции с произвольной отдачей и с временным трендом

Исследуемые периоды	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\zeta$	$R^2$	$R^2$ скорректированный	Уровень значимости $p$
1995–2010	-0.04±0.05	<b>4.47±0.98</b>	0	<b>0.03±0.00</b>	<b>0.99</b>	<b>0.99</b>	<b>0.000000</b>
1999–2010	-0.138±0.2	<b>6.54±1.45</b>	0	<b>0.024±0.01</b>	<b>0.99</b>	<b>0.99</b>	<b>0.000000</b>
1995–2010	-0.04±0.05	<b>3.48±1.32</b>	<b>0.07±0.07</b>	<b>0.026±0.01</b>	<b>0.99</b>	<b>0.99</b>	<b>0.000000</b>
1999–2010	-0.11±0.16	<b>5.47±1.29</b>	<b>0.06±0.04</b>	<b>0.02±0.01</b>	<b>0.99</b>	<b>0.99</b>	<b>0.000000</b>

В таблице 5 значения коэффициентов детерминации особенно высоки (даже скорректированный  $R^2$  везде больше 0.99). Представленный в таблице 5 вариант расчетов включает наибольшее число членов для уравнений регрессии. Это само по себе даёт возможности для более точной аппроксимации. Однако, значения скорректированного  $R^2$  также велики. Устойчиво значим и велик коэффициент  $\beta$  (даже нижняя граница его доверительного интервала больше единицы). Коэффициент  $\alpha$  везде не значим. Остальные коэффициенты значимы для обоих исследуемых периодов.

Общие выводы проведенных расчетов состоят в следующем. Во-первых, исследованные нами случаи использования моделей с постоянной отдачей следует признать неудачными для рассматриваемых временных диапазонов. Во-вторых, при переменной отдаче мы имеем различные альтернативные варианты моделей с высоким значением  $R^2$ , то есть в равной мере адекватных динамике исследуемых эмпирических данных. Это создаёт трудности в выборе «истинного» варианта модели отдачи факторов производства в российской экономике и требует привлечения дополнительных аргументов. В-третьих, если ориентироваться на максимально точную модель, а также на модели приемлемой точности с наименьшим числом параметров, то можно видеть, что отдача по труду везде возрастающая (хотя велик разброс значений  $\beta$ ). Что же касается динамики основного капитала (основных фондов) в российской экономике за период 1995–2010 г. (коэффициент  $\alpha$ ), то он значительно отличается от нуля лишь в одном из рассмотренных случаев. Это означает, что рост основного капитала не приводит закономерно к соответствующему росту ВВП. В-четвертых, введение временного тренда не является, видимо, важным для модели с переменной отдачей, поскольку и без него значения  $R^2$  велики, тем не менее, оно улучшает точность. В-пятых, не следует переоценивать, на наш взгляд, влияние динамики цен на нефть на уровень отдачи используемых в российской экономике факторов производства. Введение влияния изменения цен на нефть в ряде случаев повышает коэффициент детерминации, но в 2-х случаях делает не значимыми коэффициенты, определяющие зависимость ВВП от труда и капитала. Учёт при расчётах кризисного периода российской экономики в 1995–1998 гг. в некоторых случаях несколько ухудшал точность аппроксимации, однако даже в этом временном интервале оказалось возможным подобрать модели с высокой точностью аппроксимации.

## 5. Корреляционные матрицы и графики

Результаты предыдущих пунктов для более полной и наглядной картины того, как величины связаны между собой, стоит дополнить приведением корреляционных матриц между переменными и графиков зависимости переменных от времени.

Корреляционные матрицы мы покажем в двух таблицах:

Таблица 6. Корреляционные матрицы показателей Российской экономики по данным за 1995–2010 гг.

	Ln Y	Ln K	Ln L	Ln P	t
Ln Y	1.00	-0.19	<b>0.90</b>	<b>0.98</b>	<b>0.96</b>
Ln K	-0.19	1.00	0.01	-0.13	-0.24
Ln L	<b>0.90</b>	0.01	1.00	<b>0.90</b>	<b>0.77</b>
Ln P	<b>0.98</b>	-0.13	<b>0.90</b>	1.00	<b>0.93</b>
t	<b>0.96</b>	-0.24	<b>0.77</b>	<b>0.93</b>	1.00

Из таблиц видно, что логарифмы Y и P хорошо коррелируют со временем t весь период, для L и особенно для K коэффициент корреляции существенно возрастает для данных за 1999–2010 гг.

Высокие значения коэффициентов корреляции указывают на наличие частичной мультиколлинеарности между исследуемыми экономическими показателями (когда между ними су-



ществует с высокой точностью линейная зависимость). Это явление ухудшает точность расчётов коэффициентов модели. Однако в нашем случае коэффициент  $\beta$  в основном является значимым.

Таблица 7. Корреляционные матрицы показателей Российской экономики по данным за 1999–2010 гг.

	Ln Y	Ln K	Ln L	Ln P	t
Ln Y	1.00	<b>0.92</b>	<b>0.99</b>	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>
Ln K	<b>0.92</b>	1.00	<b>0.90</b>	<b>0.88</b>	<b>0.95</b>
Ln L	<b>0.99</b>	<b>0.90</b>	1.00	<b>0.96</b>	<b>0.94</b>
Ln P	<b>0.97</b>	<b>0.88</b>	<b>0.96</b>	1.00	<b>0.94</b>
t	<b>0.97</b>	<b>0.95</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>	1.00

Хорошая корреляция логарифмов величин с  $t$  фактически свидетельствует о хорошей точности аппроксимации зависимости самих величин от времени экспонентой. Это может свидетельствовать о возможной связи между качеством применимости формулы Кобба–Дугласа и характером изменения во времени входящих в неё величин. Ранее мы исследовали точность аппроксимации ВВП на душу населения стран мира экспонентой и получили высокие значения коэффициента детерминации для ряда стран [Кирилук и др., 2009]. Другие макроэкономические величины также могут иметь при определенных условиях зависимость от времени, близкую к экспоненциальной. В таком случае, чем точнее аппроксимируются экспонентой другие величины, используемые в (2–3), тем труднее отделить вклад каждой из них в поведение зависимой переменной.

Теперь приведём графики зависимости переменных, используемых нами при аппроксимации, от времени.

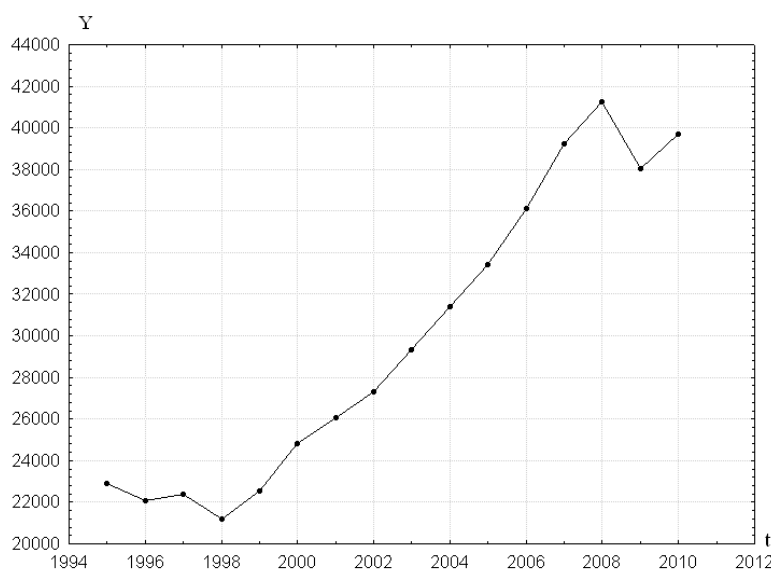


Рис. 1. Зависимость от времени функции  $Y$  (ВВП России в постоянных ценах 2008 г., млрд. руб.)

На рисунке 1 хорошо видно падение ВВП вследствие кризиса 90-х гг. и последовавший за ним восходящий тренд в Российской экономике, прервавшийся на короткое время в связи с мировым кризисом 2008 г.

Функция  $K$  (рис. 2) демонстрирует более случайный характер динамики.

Поведение функции  $L$  (рис. 3) во многом сходно с поведением  $Y$ , демонстрируя спад в периоды кризисов и рост между ними.

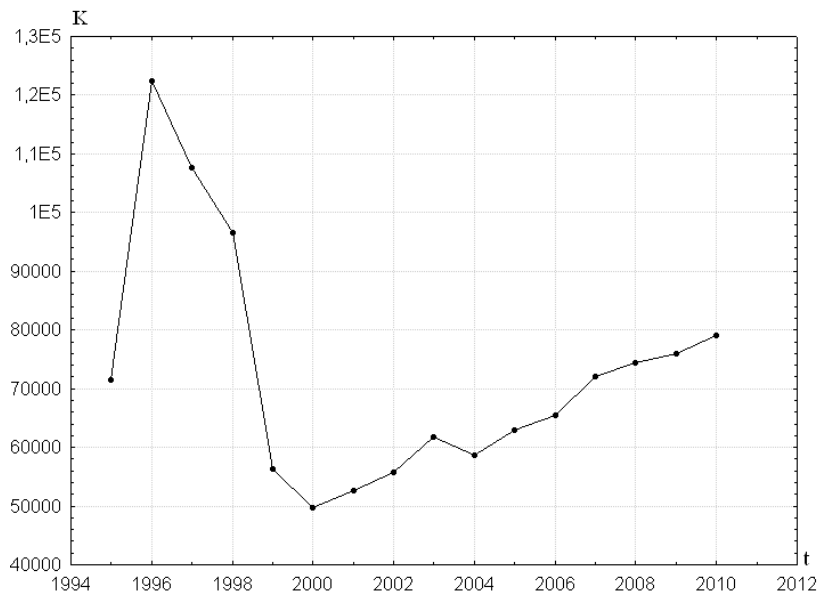


Рис. 2. Зависимость от времени функции К (Основные фонды РФ в постоянных ценах 2008 г., млн. руб.)

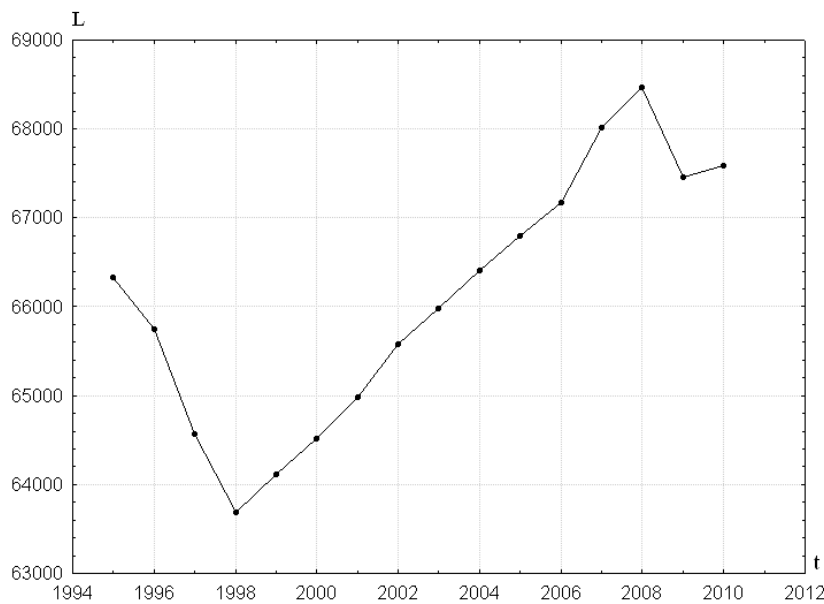


Рис. 3. Зависимость от времени функции L (численность занятых РФ, тыс. чел.)

Функция Р (рис. 4) демонстрирует чётко выраженный положительный тренд с некоторыми колебаниями. Из графика видно, что мировой кризис 2008 года отразился и на ценах на нефть.

## 6. Сопоставление результатов статьи с результатами предыдущих исследований

Возможностям моделирования экономики России и стран СНГ с помощью функций Кобба–Дугласа посвящены, например, перечисленные ниже публикации.

В работе [Копотева, Черный, 2011] с использованием данных Федеральной службы государственной статистики (Росстата) за 2000–2008 гг. вычислены коэффициенты функций вида (3), без учета цен на нефть, то есть, предполагалась постоянная отдача от факторов производства,

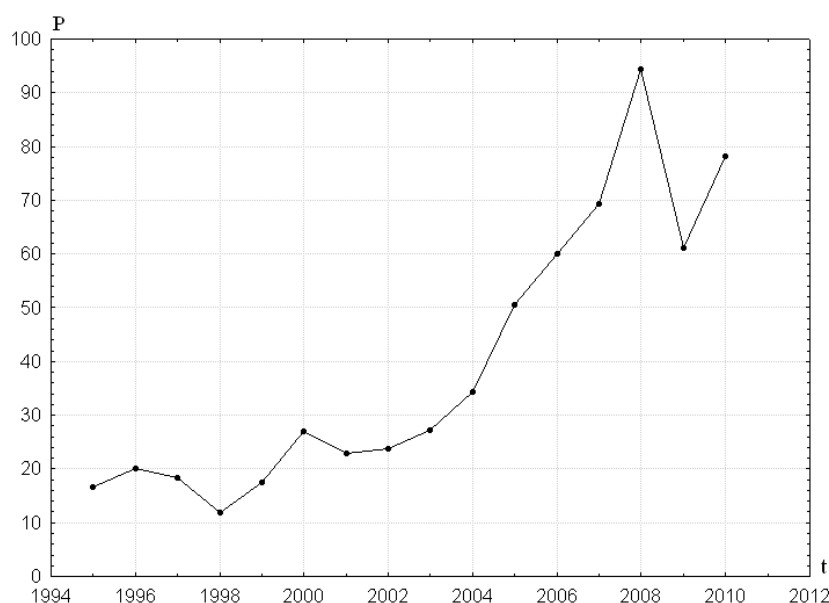


Рис. 4. Зависимость от времени функции P (Цена на нефть Urals, долл/барр)

как с использованием, так и без использования экспоненциального временного тренда. Эти модели сравнивались с другой моделью, связанной с применением одномерных временных рядов. В качестве  $Y$  авторами использовались поквартальные данные. Во всех сравниваемых случаях была отмечена высокая точность аппроксимации. Однако в работе не акцентируется внимание на том, в текущих или постоянных ценах выражены величина основных фондов и ВВП, что затрудняет сравнение результатов с нашими.

В работе [Овчинникова, 2010] функция Кобба–Дугласа использована для оценки факторов экономического роста России на основе модели роста Солоу и данных за 1998–2007 гг. В этой работе оговаривается, что использованы ВВП и капитал в сопоставимых ценах. Также приведена таблица использованных данных, но без ссылки на их источник (причём приведенные значения аналогичных показателей несколько расходятся с использованными в нашем исследовании). Можно также предположить, что автором перепутаны рассчитанные коэффициенты функции Кобба–Дугласа. С учётом этого, коэффициент  $\alpha$  несколько выше, чем полученные в наших моделях значения, а  $\beta$  весьма близок к полученным нами значениям в соответствующей модели. В данной статье, в отличие от наших расчетов, не учитываются временной тренд и динамика мировых цен на нефть.

В работе [Буравлев, 2012] в модель Кобба–Дугласа вводится фактор, учитывающий мотивацию работников к труду через уровень оплаты труда. При этом предполагается постоянная отдача. Используются данные Росстата за 2000–2009 гг., представленные в виде таблицы. Очевидно, в работе при расчетах используются величины  $Y$  и  $K$  в текущих ценах. В этой же работе приведены расчеты для 7 видов экономической деятельности за 2001–2008 гг.. Для всех видов  $R^2 > 0.8$ , однако, использованная для отдельных отраслей формула отличалась от используемых в нашем исследовании. Автор работы не учитывал такие факторы, как переменная отдача, временной тренд и цены на нефть, но ввёл в формулу дополнительный член, описывающий расходы на оплату труда работников. Хотя результаты расчётов дали высокие значения коэффициентов детерминации, однако, использование величин в текущих ценах представляется не вполне корректным. Следует отметить, что и сам автор в конце статьи говорит, что необходимо модифицировать модель путём введения различных индексов инфляции.

В работе [Садохина, 2003] функция Кобба–Дугласа использована при макроэкономической оценке эффективности национального производства стран СНГ в 1991–2001 гг. на основе данных статистических сборников Статкомитета СНГ и Госкомстата России. Таким образом, расчёты проводились для более раннего периода времени, чем исследуемый нами. Как сказано

в этой статье, динамику показателя основных фондов в расчётах там заменяет динамика годового объема инвестиций в основной капитал. Такое приближение автор объясняет нехваткой данных для ряда стран СНГ

В работе [Бессонов, 2004] в расчётах на основе данных Госкомстата годовой периодичности с 1990 по 2002 гг. для отраслей российской экономики, а также экономики в целом использована следующая методология. Автор предполагает, что коэффициент  $A$  не является константой, и исследует его динамику с использованием формулы производственной функции. При этом значения  $\alpha$  и  $\beta$ , в отличие от наших расчетов, не вычисляются, а задаются, причём, в предположении постоянной отдачи. При этих условиях автор определил следующие значения коэффициентов эластичности:  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.7$ . Различие использованных методологий, а также несовпадающие временные периоды затрудняют сопоставление полученных нами и Бессоновым результатов.

Приведём также информацию о некоторых публикациях, где есть результаты использования функции Кобба–Дугласа для исследования макроэкономики других стран СНГ.

В работе [Горидько, Нижегородцев, 2012] по анализу динамики показателей макросистемы Украины за 1995–2009 гг. в ценах 2001 г. в степенную производственную функцию как самостоятельный фактор включена информация. Причём рассматривалось два способа её включения: один из них априори включает гипотезу об убывающей отдаче по отношению к информации, второй, наоборот, автоматически предполагает закон возрастающей отдачи. Особенностью этой работы является то, что в качестве  $L$  используется не численность занятых, а заработная плата лиц, работающих по найму. Также авторами рассматриваются варианты модели с временными лагами. Таким образом, их подход существенно отличается от нашего, что затрудняет сравнение полученных результатов. Итоговый вывод статьи заключается в том, что основное влияние на экономический рост Украины оказывают опережающие инвестиции в основной капитал и финансирование инноваций.

Исследования характера отдачи факторов производства на макроуровне проводились также, например, для таких стран, как Польша (за период с 1980 по 1999 гг.) и Белоруссия (1971–1999 гг.) [Чубрик, 2002]. Было показано, что для Белоруссии гипотеза о постоянной отдаче принимается, а для Польши отклоняется в пользу суммарной положительной отдачи. Производственная функция в этой статье оценивалась при помощи модели с механизмом корректировки равновесия.

Особо следует отметить исследование, в котором, как и нами, была обнаружена сильно убывающая отдача от использования основных фондов (капитала) в экономике. Так, отрицательные значения эмпирически найденных коэффициентов  $\alpha$  в функции Кобба–Дугласа были получены в [Светульников, Абдуллаев, 2010], где использовались данные о развитии Хорезмской области Узбекистана за 1997–2007 годы.

Итоговые сопоставительные данные рассмотренных исследований приведены в таблице 8.

Видно, что в тех работах, где приведены коэффициенты детерминации, имеет место  $R^2 > 0.9$ , что говорит о хорошем соответствии разработанных авторами моделей эмпирическим данным.

Несмотря на то, что фактически всеми авторами для Российской Федерации используются данные из одного источника — Федеральной службы государственной статистики, имеется проблема несовпадения данных за некоторые годы в разных документах, выпускаемых службой. К сожалению, не во всех работах даются конкретные ссылки на источник данных, что затрудняет непосредственное сопоставление.

Видно, что в большинстве рассмотренных работ, посвященных анализу экономики России, гипотеза о постоянной отдаче принимается априори. Однако, в работе [Овчинникова, 2010], где используются данные по России, и отдача предполагается переменной, результаты сходны с нашими. В проведенном автором исследовании также выявлена положительная отдача по труду и в целом по экономике страны.

Отличительной особенностью нашей работы является то, что мы сравниваем разные варианты модели степенной производственной функции, с одновременным учётом разных факторов

(временной тренд, влияние цен на нефть, переменная отдача, учёт кризисных лет) на одинаковых данных.

Таблица 8. Сравнительные данные для некоторых статей, использующих функции Кобба–Дугласа для исследования макроэкономики стран СНГ

Статья	Используемые годы	Используемые величины	Характер отдачи	Страна
[Копотева, Черный, 2011]	2000–2008	ВВП, численность занятых в экономике, стоимость основных производственных фондов, экспоненциальный временной тренд	Постоянная, без тренда $\alpha = 1.269$ , $\beta = -0.269$ , $R^2 = 0.9773$ , постоянная с трендом $\zeta = 0.051$ , $\alpha = 0.0007$ , $\beta = 0.9993$ , $R^2 = 0.9720$	Российская федерация
[Овчинникова, 2010]	1998–2007	ВВП в сопоставимых ценах, численность занятых, среднегодовая стоимость основных фондов с учетом износа в сопоставимых ценах.	Возрастающая (по труду и по экономике в целом), $\alpha = 0.905$ , $\beta = 8.864$	Российская федерация
[Буравлев, 2012]	2000–2009	ВВП в текущих ценах, численность занятых в экономике, стоимость основных производственных фондов	Постоянная, $\alpha = 1.32$ , $\beta = -0.32$ , $R^2 = 0.987$	Российская федерация
[Садохина, 2003]	1991–2001	Погодовые индексы роста валового внутреннего продукта (ВВП), объемов инвестиций в основной капитал и численности занятых в экономике стран СНГ	Постоянная, по России $\alpha = 0.361$ , $R^2 = 0.897$	Страны СНГ
[Бессонов, 2004]	1990–2002	ВВП, основные фонды и численность занятых в экономике	Постоянная, $\alpha = 0.3$ , $\beta = 0.7$ (вводятся априори)	Российская Федерация
[Горидько, Нижегородцев, 2012]	1995–2009	ВВП в ценах 2001г., инвестиции в основной капитал, заработная плата лиц, работающих по найму, расходы на инновации	Убывающая по труду и капиталу, с учетом фактора информации (расходов на инновации). $\alpha = 0.013$ , $\beta = 0.762$ , $R^2 = 0.911$	Украина
[Чубрик, 2002]	Польша, 1980–1999, Беларусь, 1971–1999	ВВП в ценах 1985 г., основные фонды в ценах 1985 г., занятость.	Польша: возрастающая по труду и капиталу, $\alpha = 1.09$ , $\beta = 1.53$ (при переменной отдаче), $\alpha = 0.65$ (в предположении постоянной отдачи). Беларусь: $\alpha = 0.74$ (в предположении постоянной отдачи).	Польша, Беларусь
[Светульников, Абдуллаев, 2010]	1997–2007	Инвестиции, валовой региональный продукт, основные фонды, численность занятых	$\alpha = 4.0021$ , $\beta = -3.0021$ (в предположении постоянной отдачи). Возрастающая и по труду и по капиталу, $\alpha = 2.17766$ , $\beta = 3.10876$ (при допущении переменной отдачи)	Хорезмская область Узбекистана

## 7. Расчёты для отдельных отраслей экономики

Расчёты проводились с использованием соответствующих данных Федеральной службы государственной статистики за 2004–2010 гг., а также значений мировых цен на нефть и погодового индекса-дефлятора валового накопления основного капитала, приведенных в таблице 1. Более узкий, чем для экономики в целом, временной диапазон используемых данных связан с тем, что изменения в классификации отраслей экономики (Общесоюзный классификатор отраслей народного хозяйства (ОКОНХ) был заменен на Общероссийский классификатор видов экономической деятельности (ОКВЭД)) затрудняют их согласование с данными за более ранние годы. Используемые отраслевые данные мы приведем в виде нескольких таблиц.

В качестве переменной  $Y$  использованы данные, приведенные в таблице 9.

Таблица 9. Валовая добавленная стоимость по видам экономической деятельности и валовой внутренний продукт РФ в 2003–2010 гг. (в ценах 2008 г.), миллионов рублей

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство	1338058.7	1342583.8	1379100.6	1397265.6	1486574.6	1506063.3	1344269.0
Рыболовство, рыбноводство	72437.6	64571.7	67151.3	66558.1	62686.4	66155.0	63550.9
Добыча полезных ископаемых	3374123.3	3425476.5	3325632.4	3253524.2	3284626.2	3300080.5	3455870.3
Обрабатывающие производства	5262310.5	5495811.3	5856999.9	6297585.6	6163935.8	5244865.8	5891726.0
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	1008104.6	1016947.8	1063015.6	1026493.0	1033967.4	982648.9	1036936.2
Строительство	1426395.0	1572077.8	1772852.3	2003466.5	2225325.3	1900888.8	1887525.7
Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	4669444.4	5096362.1	5815676.7	6496925.9	7137727.6	6698155.3	7035256.2
Гостиницы и рестораны	242806.2	265326.1	286247.6	325272.1	357969.4	304464.6	311313.5
Транспорт и связь	2540868.5	2691261.1	2952955.7	3096006.5	3258280.4	2982764.3	3211138.4
Финансовая деятельность	647810.8	837102.8	1049382.6	1354491.7	1537849.7	1571874.6	1534534.5
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	2399935.4	2687734.4	2957847.3	3571740.1	3959385.1	3674523.4	3632195.7
Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование	1817371.2	1719378.5	1761930.2	1830055.0	1884401.2	1904369.8	1978556.5
Образование	953351.8	956388.1	961023.5	971468.9	970664.4	957267.7	939523.2

Таблица 9 (продолжение)

	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	1137666.2	1156645.5	1173297.5	1186714.0	1197843.0	1195342.6	1210666.2
Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг	510342.0	524905.8	564465.8	612788.5	621461.7	500333.4	472751.3
Итого в основных ценах	26952745.7	28567810.6	30835383.3	33438285.6	35182698.3	32789798.0	33925275.5
Налоги на продукты	4740840.5	5071569.2	5515441.0	6016192.6	6323848.4	5477555.9	5894424.7
Субсидии на продукты	272710.7	226349.8	215032.3	234385.3	229697.6	215915.7	217643.0
Валовой внутренний продукт в рыночных ценах	31407836.6	33410459.0	36134558.0	39218671.5	41276849.2	38051438.2	39586539.3

Источник: [Росстат, 2012].

Как написано в комментарии к данным, «Расхождения между ВВП в целом и суммой его компонентов, а также между компонентами ВВП и суммой входящих в них элементов, исчисленных в постоянных ценах, объясняются изменениями в структуре весов, используемых для исчисления отдельных звеньев индексов». Как видно, значения ВВП в последней строке таблицы 9 совпадают с соответствующими значениями  $Y$  из таблицы 1, немного отличаясь за 2009–2010 годы, что, видимо, обусловлено тем, что данные корректировались Росстатом.

Значения переменной  $K$  рассчитаны на основе данных таблицы 10 посредством деления на индексы-дефляторы валового накопления основного капитала из таблицы 1.

Таблица 10. Наличие основных фондов в Российской Федерации по видам экономической деятельности по полной учетной стоимости на конец года, млн. руб.

	Млн руб.						
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Всего	34873724	41493568	47489498	60391454	74441095	82302969	93185612
В том числе по видам экономической деятельности:							
Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство	1395777	1440084	1574699	1963327	2259571	2566917	2859877
Рыболовство, рыбоводство	56675	55139	59975	79318	91247	97356	113107
Добыча полезных ископаемых	2618033	3310147	4081090	4976884	6365455	7861116	9084573
Обрабатывающие производства	3196017	3639399	4218012	5122523	6001523	6951720	7989040
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	3033503	3408329	3605984	4087407	4925292	5740995	6769064
Строительство	688936	604922	711286	992921	1220893	1391117	1499940
Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	618622	859421	1138375	1648977	2156539	2556150	3109800
Гостиницы и рестораны	244422	278036	298381	395761	443796	484662	535183
Транспорт и связь	9836464	13388808	15270817	17942233	21525544	23283486	25950327
Финансовая деятельность	372276	493588	679710	996344	1446253	1858026	2154362

Таблица 10 (продолжение)

	Млн руб.						
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Всего	34873724	41493568	47489498	60391454	74441095	82302969	93185612
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	8659798	9368932	10427578	13707183	18642465	19616695	21895792
Государственное управление и обеспечение военной безопасности; обязательное социальное обеспечение	1061442	1237532	1612048	2853979	3260983	3538562	4253045
Образование	1210675	1278844	1410202	2337357	2468104	2534403	2700025
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	940493	1023358	1154516	1639280	1833726	1965934	2175848
Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг	940591	1107029	1246825	1647960	1799704	1855830	2095629

Источник: [Росстат, 2012].

Значения переменной L приведены в таблице 11.

Таблица 11. Среднегодовая численность занятых в экономике РФ по видам экономической деятельности, тысяч человек

Год	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Всего в экономике	66407	66792	67174	68019	68474	67463	67577
В том числе по видам экономической деятельности:							
Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство	7430	7381	7141	6925	6675	6733	6656
Рыболовство, рыбоводство	113	138	146	145	142	146	143
Добыча полезных ископаемых	1088	1051	1043	1040	1044	1067	1057
Обрабатывающие производства	11787	11506	11359	11368	11191	10401	10292
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	1900	1912	1923	1909	1884	1929	1945
Строительство	4743	4916	5073	5274	5474	5315	5380
Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	10843	11088	11317	11713	12020	11943	12057
Гостиницы и рестораны	1152	1163	1185	1260	1274	1142	1183
Транспорт и связь	5293	5369	5426	5450	5451	5307	5347
Финансовая деятельность	835	858	958	1046	1132	1091	1122
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	4825	4879	4957	5004	5146	5315	5380
Из них научные исследования и разработки	1165	988	954	905	855	947	904
Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование	3447	3458	3504	3618	3727	3876	3905
Образование	6125	6039	6009	6016	5980	5979	5902
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	4488	4548	4574	4644	4666	4638	4621
Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг	2330	2460	2533	2573	2621	2526	2531

Источник: Российские статистические ежегодники за 2010 и 2011 гг., табл. 5.5 (доступны на [Росстат, 2012]).

Не ясным остается факт расхождения значений данных во второй строке таблицы 11 «Всего по экономике» (которые взяты непосредственно из источников) и соответствующих значений суммы данных по отраслям. Комментариев в источниках по этому поводу не найдено. Однако эти расхождения не более 2 % от самих значений, более того, однонаправлены и имеют не слишком большой разброс по величине между собой, поэтому, в расчетах будем пользоваться



данными второй строки таблицы 11, совпадающей со вторым столбцом таблицы 1 по значениям за соответствующие годы.

Регрессионный анализ всех 15 отраслей показал следующие результаты:

- 1) Отрасли «Добыча полезных ископаемых», «Производство и распределение электроэнергии, газа и воды» показывают низкие значения коэффициента детерминации  $R^2 < 0.8$  в любых вариантах модели.
- 2) Отрасли «Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство», «Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование», «Здравоохранение и предоставление социальных услуг», «Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг» показывают  $R^2 > 0.8$  в некоторых случаях, но при этом ни в одном из вариантов модели не значимы коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ .
- 3) Для отрасли «Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг» есть варианты модели с  $R^2 > 0.8$ , либо со значимыми коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ , но нет варианта, где выполнены одновременно оба эти условия.

Поскольку нас интересует выявление характера отдачи от факторов производства, мы выпишем для дальнейшего анализа только те случаи, где одновременно  $R^2 > 0.8$ , и при этом значим хотя бы один из коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ . Из 120 комбинаций (8 вариантов модели для 15 отраслей) таким условиям удовлетворяют всего 20 случаев, которые мы приводим в таблице 12, где их можно сравнить также с данными для экономики в целом за соответствующий интервал времени и отобранными по тому же принципу.

Фактически, отбирая варианты только со значимыми коэффициентами, мы уменьшаем итоговый эффект мультиколлинеарности между переменными и повышаем достоверность выводов. Есть ряд других способов противодействия этому эффекту [Бородич, 2000 и др.], но для таких коротких рядов, как используемые нами, они могут оказаться ненадежными.

Отметим также, что мультиколлинеарность связана с одним из видов нарушения условий Гаусса–Маркова, выполнение которых определяет применимость модели линейной по параметрам регрессии.

Для случая с постоянной отдачей пишем  $\beta = 1 - \alpha$ , в тех вариантах, где не учитывается влияние нефти и тренда, стоят нулевые значения в соответствующих ячейках таблицы 12.

Интересным фактом является то, что для каждой конкретной отрасли в таблице 12 оказались случаи только с постоянной, или, наоборот, только с переменной отдачей. Очевидно, это связано с тем, что с одной стороны, замена переменных, используемая в системе с постоянной отдачей (переход от формулы (2) к формуле (3)), может уменьшать роль мультиколлинеарности в модели и повышать точность вычисления коэффициентов. С другой стороны, для систем с переменной отдачей, условие  $\alpha + \beta = 1$  не выполняется, и наилучшие результаты получаются при значениях  $\alpha + \beta$ , заметно отличающихся от единицы.

Для всех случаев с переменной отдачей  $\beta > 1$  (хотя в единственном случае он не значим), что может служить аргументом в пользу того, что эти отрасли характеризуются положительной отдачей по труду. Более того, в десяти случаях нижняя граница доверительного интервала больше единицы. При этом коэффициент  $\alpha$  во многих случаях меньше единицы, есть даже одно значимое отрицательное значение. Факт отрицательности  $\alpha$  хотя и представляется парадоксальным, в некоторых ситуациях может быть обоснован тем, что производство является настолько неэффективным, что сколько бы ресурсов капитала в его нынешнем виде мы не использовали, это не будет улучшать показатели выпуска продукции производства на его основе [Светуньков, Абдуллаев, 2010].

Для отраслей «Рыболовство, рыбоводство», «Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования», «Финансовая деятельность» значимыми оказались некоторые варианты модели с постоянной отдачей (кроме единственного случая «Финансовая деятельность» с учетом тренда и цен на нефть, все значения коэффициентов лежат в диапазоне  $[0, 1]$ ). Интересно, что в большинстве случаев с постоянной отдачей  $\alpha > \beta$ .

Таблица 12. Коэффициенты и точность аппроксимации формулой производственной функции данных для отраслей экономики

Отрасль	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\zeta$	$R^2$	$R^2$ скорректированный	уровень значимости p
Рыболовство, рыболовство	<b>0.57±0.36</b>	<b>1-<math>\alpha</math></b>	<b>-0.23±0.14</b>	<b>0</b>	<b>0.956258</b>	<b>0.934387</b>	<b>0.00191</b>
Рыболовство, рыболовство	<b>0.72±0.42</b>	<b>1-<math>\alpha</math></b>	<b>0</b>	<b>-0.03±0.02</b>	<b>0.926162</b>	<b>0.889242</b>	<b>0.00545</b>
Рыболовство, рыболовство	<b>0.6±0.38</b>	<b>1-<math>\alpha</math></b>	-0.16±0.22	-0.012±0.03	<b>0.972772</b>	<b>0.945545</b>	<b>0.00756</b>
Обрабатывающие производства	<b>2.28±1.4</b>	<b>3.34±2.2</b>	0	0	<b>0.834797</b>	0.752195	<b>0.02729</b>
Обрабатывающие производства	<b>1.41±0.98</b>	<b>2.54±1.29</b>	<b>0.14±0.1</b>	0	<b>0.975268</b>	<b>0.950537</b>	<b>0.00655</b>
Обрабатывающие производства	1.31±2.35	<b>3.68±2.23</b>	0	0.045±0.09	<b>0.911507</b>	<b>0.823014</b>	<b>0.04348</b>
Обрабатывающие производства	<b>1.75±1.56</b>	1.82±2.69	0.21±0.26	-0.037±0.12	<b>0.987443</b>	<b>0.962329</b>	<b>0.02495</b>
Строительство	-0.15±0.53	<b>2.97±1.32</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0.930103</b>	<b>0.895154</b>	<b>0.00488</b>
Строительство	0.027±0.19	<b>4.42±0.78</b>	0	<b>-0.046±0.02</b>	<b>0.995909</b>	<b>0.991818</b>	<b>0.00044</b>
Строительство	-0.04±0.37	<b>5.27±3.55</b>	-0.11±0.42	<b>-0.049±0.03</b>	<b>0.997418</b>	<b>0.992255</b>	<b>0.00515</b>
Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	<b>0.4±0.13</b>	1- $\alpha$	0	0	<b>0.915256</b>	<b>0.898307</b>	<b>0.00073</b>
Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	<b>0.24±0.17</b>	1- $\alpha$	<b>0.18±0.16</b>	<b>0</b>	<b>0.974666</b>	<b>0.961999</b>	<b>0.00064</b>
Оптовая и розничная торговля; ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	<b>0.8±0.76</b>	1- $\alpha$	0	-0.055±0.10	<b>0.945396</b>	<b>0.918094</b>	<b>0.00298</b>
Гостиницы и рестораны	-0.24±1.72	<b>2.05±1.49</b>	0	<b>0.04±0.035</b>	<b>0.952873</b>	<b>0.905746</b>	<b>0.01712</b>
Транспорт и связь	<b>-0.25±0.18</b>	<b>4.82±0.90</b>	0	<b>0.04±0.01</b>	<b>0.998108</b>	<b>0.996216</b>	<b>0.00014</b>
Транспорт и связь	-0.25±0.29	<b>4.54±3.28</b>	0.017±0.18	<b>0.040±0.02</b>	<b>0.998253</b>	<b>0.994758</b>	<b>0.00349</b>
Финансовая деятельность	<b>0.72±0.32</b>	1- $\alpha$	0	0	<b>0.869388</b>	<b>0.843266</b>	<b>0.00219</b>
Финансовая деятельность	<b>0.48±0.40</b>	1- $\alpha$	0.29±0.36	0	<b>0.94192</b>	<b>0.91288</b>	<b>0.00337</b>
Финансовая деятельность	<b>2.07±1.87</b>	1- $\alpha$	<b>0.39±0.28</b>	-0.23±0.27	<b>0.983406</b>	<b>0.966811</b>	<b>0.00361</b>
Образование	0.01±0.08	<b>1.55±1.43</b>	0.051±0.06	0	<b>0.838385</b>	0.67677	0.10478
Всего	<b>0.79±0.41</b>	<b>1-<math>\alpha</math></b>	0	0	<b>0.827705</b>	0.793246	<b>0.00447</b>
Всего	<b>0.40±0.23</b>	<b>5.68±2.45</b>	0	0	<b>0.986906</b>	<b>0.980359</b>	<b>0.00017</b>
Всего	<b>0.34±0.29</b>	4.19±4.34	0.07±0.17	0	<b>0.991835</b>	<b>0.98367</b>	<b>0.00124</b>
Всего	-0.07±2.1	<b>6.79±5.70</b>	0	0.02±0.09	<b>0.988872</b>	<b>0.977744</b>	<b>0.00198</b>

Для отраслей «Гостиницы и рестораны», «Обрабатывающие производства», «Образование», «Строительство», «Транспорт и связь» значимыми оказались некоторые варианты модели

с переменной отдачей. Во всех этих случаях выполняется условие  $\alpha < \beta$ , а также условие  $\beta > 1$ . Что же касается  $\alpha$ , то он значим для отрасли «Обрабатывающие производства»,  $\alpha > 1$  и для одного случая отрасли «Транспорт и связь»,  $\alpha < 0$ .

Как видим, при временном диапазоне, используемом в таблице 12, оказался значим даже вариант модели для всей экономики с постоянной отдачей, без учета тренда и мировых цен на нефть, что говорит о том, что в периоды экономической стабильности формула (1) все-таки может быть применима, хотя и менее точна, чем более сложные модели.

## Заключение

На примере различных вариантов модели степенной производственной функции показано, что экономика России может быть описана производственными функциями с высокими значениями коэффициентов детерминации. Модели, в которых априори не предполагалось постоянства отдачи факторов производства на макроуровне, как правило, демонстрируют возрастающую отдачу по труду (как в моделях без множителя в виде экспоненциального временного тренда, так и в моделях с учётом тренда). Эта же закономерность выявлена для ряда отдельных отраслей экономики в том случае, если для их описания подходит модель степенной производственной функции. Показано также, что применяемые модели в ряде случаев лучше подходят для описания экономики страны в целом, чем для описания большинства её конкретных отраслей.

Тем не менее, следует признать, что большой разброс в значениях коэффициентов модели при разных вариантах расчетов, свидетельствующий о возможной мультиколлинеарности, тот факт, что для ряда моделей российской экономики в целом и её отдельных отраслей получены низкие значения коэффициентов детерминации, а также остающаяся вероятность того, что регрессия где-то является ложной, ограничивает сферу применимости рассматриваемых моделей, особенно на коротких временных рядах эмпирических данных.

В дальнейших исследованиях мы собираемся провести сравнительный анализ результатов моделирования макроэкономических систем с помощью производственных функций вида (2–3) с результатами моделирования системами нелинейных дифференциальных уравнений, принципы которого описаны, например, в [Малков, Кирилук, 2009]. Оценка параметров таких систем, наиболее соответствующих описанию реальных процессов, проводится посредством методов нелинейной регрессии. Для этого предполагается использовать дополнительные панельные данные, что может позволить получить более надёжные результаты с проверкой выполненности условий Гаусса-Маркова и наличия коинтеграционных соотношений.

Автор выражает искреннюю благодарность С. Г. Кирдиной, С. Ю. Малкову, М. Ю. Романовскому, Л. Н. Слуцкину, Т. Ю. Шаталовой, А. В. Шатрову за полезные обсуждения.

## Список литературы

- Бессонов В. А.* О динамике совокупной факторной производительности в российской переходной экономике. — М.: Институт экономики переходного периода, 2004.
- Блауг М.* Методология экономической науки, или как экономисты объясняют. Пер. с англ. / Науч. ред. и вступ. ст. В.С. Автономова. — М.: НП «Журнал Вопросы экономики», 2004.
- Бородич С. А.* Вводный курс эконометрики: учебное пособие. — Мн.: БГУ, 2000.
- Брагинский О. Б.* Цены на нефть: история, прогноз, влияние на экономику // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). — 2008. — Т. LII, № 6. — С. 25–36.
- Буравлев А. И.* Трехфакторная производственная модель Кобба–Дугласа // Экономика и управление: проблемы, решения. — 2012. — № 3. — С. 13–19.
- Воскобойников И. Б., Дрябина Е. В.* Историческая статистика основных фондов российской промышленности в 1970–2004 годах // Вопросы статистики. — 2010. — № 3. — С. 28–45.
- Гневашева В. А.* Прогнозирование занятости с помощью функции Кобба–Дугласа // Научный журнал МосГУ: знание, понимание, умение. — 2005. — № 1. — С. 117–122.

- Гордонов М. Ю. О дальнейшем совершенствовании оценки и статистического учета основных фондов // Настольный аудитор бухгалтера: Прилож. к журн. Совр. Бухучет. — 1998. — № 5. — С. 13–19.
- Горидько Н. П., Нижегородцев Р. М. Построение лаговых регрессионных моделей типа Кобба–Дугласа на долгосрочных временных горизонтах // Пробл. управл. — 2012. — № 3. — С. 55–63.
- Дрейпер, Н., Смит, Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. — М.: Финансы и статистика, 1986.
- Дубовский С. В. Моделирование циклов Кондратьева и прогнозирование кризисов // Кондратьевские волны: аспекты и перспективы: ежегодник. — М.: Учитель, 2012. — С. 179–189.
- Жиляев К. В. Теоретические подходы к построению модели для оценки влияния мировых цен (цен экспорта) на российскую экономику // Научные труды ИМП РАН. — 2004. — Т. 2. — С. 39–56.
- Казакова М. В., Синельников-Мурылев С. Г. Конъюнктура мирового рынка энергоносителей и темпы экономического роста в России // Экономическая политика. — 2009. — № 5. — С. 118–135.
- Кирдина С. Г., Малков С. Ю. Два механизма самоорганизации экономики: модельная и эмпирическая верификация (научный доклад). — М.: Институт экономики РАН, 2010. — 69 с.
- Кириллук И. Л., Малков С. Ю., Малков А. С. Особенности долгосрочной экономической динамики мировой системы: анализ статистических данных // Прикладная эконометрика. — 2009. — №4(16). — С. 34–45.
- Копотева А. В., Черный С. А. Применение модели Кобба–Дугласа для построения сценария посткризисного развития экономики // Вопросы экономических наук. — 2011. — № 6. — С. 31–35.
- Ловяников Д. Г. Влияние роста мировых цен на нефть на российскую экономику // Материалы XI региональной научно-технической конференции «Вузовская наука — Северо-кавказскому региону». Том третий. Экономика. — Ставрополь: СевКавГТУ, 2007.
- Малков С. Ю., Кириллук И. Л. Влияние особенностей производственных процессов на макроэкономическую устойчивость: базовая математическая модель // Стратегическая стабильность. — 2009. — № 4(49). — С. 32–39.
- Назруллаева Е. Ю. Моделирование влияния инвестиционных процессов в российской промышленности на структуру затрат по видам экономической деятельности в 2005–2009 гг. // Прикладная эконометрика. — 2010. — № 3. — С. 38–61.
- Овчинникова А. В. Оценка факторов экономического роста России // Вестник удмуртского университета, Серия 2: Экономика и право. — 2010. — Вып. 4. — С. 52–56.
- Подкорытова О. А., Алексеев А. Г., Чигвинцева Т. А. Долгосрочное влияние нефтяных цен на российскую экономику // Финансы и бизнес. — 2011. — № 3. — С. 121–131.
- Росстат, 2012, URL: <http://www.gks.ru/> (Дата обращения: Декабрь 2012).
- Садохина Е. Ю. Макроэкономическая оценка эффективности национального производства стран СНГ в 1991–2001 гг. — Российская академия наук. Институт народнохозяйственного прогнозирования. — М.: Макс-Пресс, 2003.
- Светульников С. Г., Абдуллаев И. С. Сравнительный анализ производственных функций в моделях экономической динамики // Известия Санкт-петербургского университета экономики и финансов. — 2010. — №5. — С. 55–66.
- Синельников-Мурылев С. Г. Кадочников П. А., Казакова М. В. Анализ структурной и конъюнктурной составляющих налоговой нагрузки в российской экономике. Серия «Научные труды» № 129. — М.: ИЭПП, 2009.
- Чубрик А. С. Отдача от масштаба производственной функции и общефакторная производительность: пример Польши и Белоруссии // ЭКОБЕСТ. — 2002. — Т. 2, № 2. — С. 252–275.
- Engle, Robert F., Granger, Clive W. J. Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing // Econometrica — 1987. — Vol. 55, No 2. — P. 251–276.
- Robinson J. The Production Function and the Theory of Capital // Review of Economic Studies — 1953–1954. — Vol. 21, No 2. — P. 81–106.
- Top Oil News, 2012, URL: <http://topoilnews.com/> (Дата обращения: Август 2012).