

УДК: 537.877

Модель взаимодействия векторного 3D электромагнитного поля с 2D периодическими структурами

В. Л. Кузнецов, А. С. Рудковский

Московский государственный технический университет гражданской авиации,
факультет прикладной математики и вычислительной техники,
Россия, 125993, г. Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20

E-mail: v.kuznetsov@mstuca.aero

*Получено 28 декабря 2012 г.,
после доработки 30 марта 2013 г.*

В работе рассмотрено применение метода инвариантного погружения для описания взаимодействия 3D векторного электромагнитного поля с 2D фотонным кристаллом конечной толщины, образованным диэлектрическими круговыми цилиндрами или брусками квадратного сечения. Вычислены матричные коэффициенты прохождения и отражения волн с учетом их поляризации при различных углах падения и некопланарной дифракции.

Ключевые слова: метод инвариантного погружения, фотонный кристалл, некопланарная дифракция

Model of 3D electromagnetic field with 2D periodic structures interaction

V. L. Kuznetsov, A. S. Rudkovskiy

*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science,
MSTU CA, 20 Kronstadt Boulevard, Moscow, 125993, Russia*

Abstract. — An application of the invariant imbedding method to describe the interaction of 3D electromagnetic field with 2D photonic crystal of finite thickness, formed by a dielectric circular cylinder or square bars, is considered in this paper. Matrix coefficients of transmission and reflection for waves at different angles of incidence were calculated taking into account different types of polarization and non-coplanar diffraction.

Keywords: Invariant embedding method, Photonic crystal, Non-coplanar diffraction

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 213–224 (Russian).

Введение

В последнее десятилетие исследование фотонных кристаллов (ФК) — пространственно периодических твердотельных структур с периодом, сравнимым с длиной волны воздействующего на него электромагнитного излучения, превратилось в одну из наиболее быстро развивающихся областей современной физики [Joannopoulos et al., 2003; Yasumoto, 2006]. Повышенный интерес к ФК связан с возможностью их использования при решении различных задач управления полем внутри таких структур, созданием таких прикладных устройств как волноводы, фильтры, резонаторы и т.д. [Ohtera, Kurniatan, Yamada, 2010; Grbic, Eleftheriades, 2004; Zolla et al., 2005]. Эти замечательные свойства ФК обусловлены с одной стороны тем, что распространение излучения в них похоже на поведение электронов в кристалле, и, соответственно, характеризуется наличием запрещенных зон — зон непрозрачности. А с другой стороны ФК, как правило, искусственные образования, и их характеристики могут варьироваться при выборе технологии изготовления. Требуемые для решения практической задачи параметры энергетического спектра не определяют однозначно тип, период решетки и выбор материала, обладающего необходимыми оптическими свойствами. Поэтому важная роль в создании востребованных ФК принадлежит их моделированию и компьютерному конструированию.

Спектр современных подходов к описанию взаимодействия поля с ФК достаточно широк. Среди основных следует отметить такие хорошо известные методы, как FDTD (и его различные модификации) [Taflove, Hugnes, 2005], метод матрицы рассеяния [Гольдберг, Ватсон, 1967], метод разложения по плоским волнам [Danner, 2002], метод трансфер-матрицы [Barnes, Pendry, 1991]. К сожалению реже метод инвариантного погружения [Bellman, Wing, 1975; Кляцкин, 1986].

Основная идея метода инвариантного погружения может быть проинтерпретирована следующим образом. Рассмотрим множество (пространство) решений задачи, отличающихся друг от друга лишь конкретными значениями некоторого параметра μ , называемого параметром погружения. На этом множестве выделим два решения (две точки): первое соответствует исходной поставке задачи (с параметром $\mu = \mu_1$), а второе выбирается при таком значении параметра $\mu = \mu_0$, при котором явный вид решения известен, либо легко определяем. В пространстве решений эти точки соединены гладкой кривой, каждой точке которой соответствует решение задачи со своим значением параметра μ , принадлежащим отрезку $[\mu_0, \mu_1]$. Если задача поставлена так, что ее решение, соответствующее некоторому параметру μ' , функционально зависит только от решений с $\mu < \mu'$, т. е. μ может играть роль времени, то вдоль этой кривой может быть построено уравнение эволюции, называемое также уравнением погружения. При этом сама задача поиска решения сводится к задаче Коши при заданных начальных условиях — известном решении при $\mu = \mu_0$. В такой интерпретации метод инвариантного погружения идейно близок к методу продолжения по параметру [Ортега, Рейнболдт, 1975].

Отметим, что при решении электродинамических задач, связанных с описанием взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с материальными объектами, обычно в качестве параметра погружения используется геометрический параметр, например, толщина слоя «усекаемого» объекта [Varabanenkov Yu. N., Kouznetsov V. L., Varabanenkov M. Yu, 1999], [Барабаненков, Кузнецов, 1999], [Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю., 2003]. При этом увеличение значения параметра погружения соответствует дополнению усеченного объекта новым элементарным слоем. Эта процедура подобна той, что используется в методе трансфер-матрицы [Barnes, Pendry, 1991]. Поэтому иногда эти два метода ассоциируют друг с другом [Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю., 2003].

В настоящей работе метод инвариантного погружения используется для исследования 2D ФК. В отличие от работы [Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю., 2003], где рассматривалась классическая 2D постановка задачи, здесь мы будем анализировать взаимодействие векторного 3D поля с 2D ФК. Увеличение размерности модели векторного поля до трехмерного случая приводит к не-

обходимости учета эффекта некомпланарной дифракции и сопутствующих этому эффектов изменения поляризации пространственных компонент дифрагированного поля.

Пространство решений в методе погружения для исследуемой задачи

Известно, что если поле в ФК представить в виде разложения в угловой спектр, то, как во всякой периодической структуре, в нем между собой будут взаимодействовать лишь моды с волновыми векторами, совпадающими с точностью до векторов трансляции обратной решетки.

В случае 2D кристалла это обстоятельство позволяет описать дифрагированные волны с помощью дискретного множества $\{E_i\}$ — набора векторных комплексных амплитуд углового спектра $E = (\dots E_{-1}, E_0, E_1, \dots)^T$. Договоримся также, что нулевой индекс будет соответствовать моде, чей волновой вектор — k_0 окажется ближайшим к нормали к поверхности ФК. Тогда вектор E_n будет описывать амплитуду моды ЭМП, смещенной относительно центральной на n векторов обратной решетки, т. е. $k_n = ([q_0 + n \cdot \kappa], \pm \sqrt{k^2 - (q_0 + n \cdot \kappa)^2})$.

Отметим, что $n \in \mathbf{Z}$, т. е. в выбранном пространстве E — бесконечномерный вектор. В набор его компонент входят как однородные, так и неоднородные (эванесцентные) моды. Последние, хотя и локализуются лишь в непосредственной близости от ФК, но играют важную роль в формировании амплитуд обычных, однородных мод дифрагированного поля. Проведенные численные эксперименты показывают, что учет лишь однородных мод приводит к заведомо ошибочным результатам — серьезному дисбалансу при проверке результатов по теореме Пойнтинга.

Заметим, что в методе инвариантного погружения, как и в методе трансфер-матриц, в основе описания взаимодействия поля со структурой лежат не параметры поля, а характеристики среды — амплитудные матричные коэффициенты прохождения $\{T_{nm}^\pm\}$ и отражения $\{R_{nm}^\pm\}$ ФК, определяющие связь между иницирующими — E_m и дифрагированными — E_n полями:

$$E_n^\pm = \sum_m T_{nm}^\pm \cdot E_m^\pm, \quad E_n^\pm = \sum_m R_{nm}^\pm \cdot E_m^\mp. \tag{1}$$

Здесь индексы «+» и «-» соответствуют направлениям распространения поля — вдоль или против направления нормальной к верхней грани ФК оси OZ соответственно.

Переход от «полевого» описания к языку амплитудных коэффициентов прохождения и отражения имеет преимущество, заключающееся в том, что для получения уравнений погружения для амплитуд дифрагированных полей необходимо проводить специальную процедуру — «усечение» периодической структуры, тогда как «динамику» матричных коэффициентов $\{T_{nm}^\pm\}$ и $\{R_{nm}^\pm\}$, как функций координаты сечения — z этой структуры, можно описывать на полной (не усеченной) геометрии.

Поясним сказанное. Напряженность поля E в каком-либо сечении z_1 внутри ФК зависит от процессов рассеяния как при $z < z_1$, так и при $z > z_1$. При этом, согласно идеологии метода погружения, заданными для рассматриваемого шага алгоритма вычислений являются лишь процессы при $z < z_1$, отражение от оставшейся части ФК ($z > z_1$) можно рассчитать лишь если верхний слой очень тонкий, и применимо борновское приближение (см. рис. 1). Это приводит к необходимости искусственного усечения ФК. Другое дело, если рассматривать зависимость $R(z)$. Коэффициент отражения нижней части ФК при $z < z_1$ не зависит от процессов рассеяния поля в зоне $z > z_1$, поскольку поле, провзаимодействовавшее со средой в верхней

зоне и вновь входящее в нижнюю зону должно рассматриваться уже как инициирующее (падающее) поле. Именно поэтому для $\mathbf{R}(z)$ может быть поставлена задача Коши и построены уравнения погружения. Координата z может интерпретироваться как время, и $\mathbf{R}(z)$ удовлетворяет принципу динамической причинности. Аналогичные рассуждения справедливы и для коэффициента прохождения.

В этой статье, однако, следуя работам [Barabanenkov Yu. N., Kouznetsov V. L., Barabanenkov M. Yu, 1999], [Барабаненков, Кузнецов, 1999], [Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю., 2003], и действуя «с запасом», мы будем одновременно использовать как переход к новым неизвестным — матричным коэффициентам $\left\{ \mathbf{T}_{nm}^{\pm} \right\}$ и $\left\{ \mathbf{R}_{nm}^{\pm} \right\}$, так и процедуру усечения.

Таким образом, пространство решений в нашей задаче задается как множество пар $\left\{ \left(\left\{ \mathbf{R}_{nm}^{\pm}(z) \right\}, \left\{ \mathbf{T}_{nm}^{\pm}(z) \right\} \right) \right\}$, а роль параметра погружения μ играет переменная толщина ФК — z .

Уравнения погружения для 2D ФК

Общий вид уравнений погружения

Рассмотрим, как изменятся амплитудные коэффициенты отражения и прозрачности при добавлении к усеченному ФК узкого слоя толщины Δz (см. рис. 1).

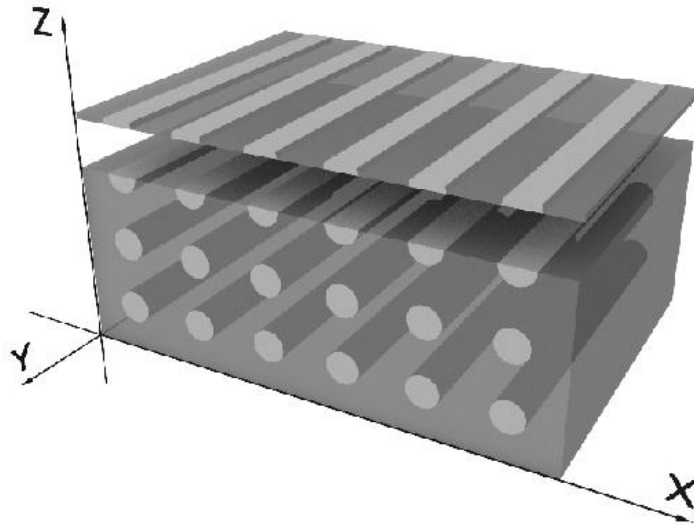


Рис. 1. Переход от усеченного ФК толщины z к усеченному ФК толщины $(z + \Delta z)$.

Для этого рассмотрим ФК толщины $z + \Delta z$ и выразим его амплитудные коэффициенты прохождения $\mathbf{T}_{nm}^{\pm}(z + \Delta z)$ и отражения $\mathbf{R}_{nm}^{\pm}(z + \Delta z)$ через соответствующие характеристики кристалла высоты z и коэффициентов прохождения $\mathbf{t}_{nm}^{\pm}(\Delta z)$ и отражения $\mathbf{r}_{nm}^{\pm}(\Delta z)$ добавляемого элементарного слоя. При расчетах будем предполагать, что исходный усеченный кристалл высоты z остается отделенным от элементарного слоя бесконечно узким зазором. Тогда такую систему можно рассматривать как своеобразный "виртуальный резонатор", образованный полупрозрачными зеркалами с коэффициентами отражения $\mathbf{R}_{nm}^{+}(z)$ и $\mathbf{r}_{nm}^{-}(\Delta z)$ (рис. 1). Можно показать, что с учетом переотражений выражения для $\mathbf{R}_{nm}^{+}(z + \Delta z)$ и $\mathbf{T}_{nm}^{-}(z + \Delta z)$ принимают

хорошо известный в литературе вид [Митра, Ли, 1974; Beenakker, 1997]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^+(z+\Delta z) &= \mathbf{r}^+(\Delta z) + \mathbf{t}^+(\Delta z) \cdot \mathbf{R}^+(z) \cdot \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathbf{r}^-(\Delta z) \cdot \mathbf{R}^+(z))^k \right] \cdot \mathbf{t}^-(\Delta z), \\ \mathbf{T}^-(z+\Delta z) &= \mathbf{T}^-(z) \cdot \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathbf{r}^-(\Delta z) \cdot \mathbf{R}^+(z))^k \right] \cdot \mathbf{t}^-(\Delta z). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ряды в правых частях уравнений описывают многократное переотражение волн в виртуальном резонаторе.

Для перехода от конечно-разностной формы приведенных уравнений к дифференциальной, уравнения (2) необходимо дополнить соотношениями, определяющими явный вид коэффициентов $\mathbf{r}_{nm}^-(\Delta z)$ и $\mathbf{t}_{nm}^\pm(\Delta z)$. Если не рассматривать случай, близкий к вудовскому резонансу, т. е. исключить ситуации, когда приближенно выполняются соотношения $|\mathbf{q}_0 + n \cdot \mathbf{k}| \cong |\mathbf{k}|$, $n \in \mathbf{Z}$, то для описания взаимодействия поля с тонким слоем можно ограничиться борновским приближением и записать его коэффициенты отражения и прохождения в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{nm}^\pm(\Delta z) &= \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_{nm}^\pm \cdot \Delta z + \mathbf{o}(\Delta z), \\ \mathbf{r}_{nm}^\pm(\Delta z) &= \boldsymbol{\rho}_{nm}^\pm \cdot \Delta z + \mathbf{o}(\Delta z). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{I} — единичная матрица, а $\boldsymbol{\rho}_{nm}^\pm$ и $\boldsymbol{\tau}_{nm}^\pm$ — некоторые матричные коэффициенты, явный вид которых будет определен далее (соотношения (7)).

Соотношения (3) записаны с точностью до членов первого порядка малости по Δz . Нетрудно видеть, что с той же точностью для недиссипативной среды ($\boldsymbol{\tau}_{m,m}^\pm$ — мнимое) выполняется и энергетический баланс — теорема Пойнтинга:

$$k_{z,m} = \sum_n \operatorname{Re} \{k_{z,n}\} \cdot |r_{n,m}|^2 + \sum_n \operatorname{Re} \{k_{z,n}\} \cdot |t_{n,m}|^2 = k_{z,m} + o(\Delta z).$$

Отметим, что несмотря на то, что каждый элементарный слой рассчитывается в борновском приближении, последовательное наложение бесконечного числа таких элементарных слоев приводит к тому, что при переходе $\Delta z \rightarrow 0$ учитываются все эффекты многократного рассеяния поля внутри ФК.

С учетом предельного перехода $\Delta z \rightarrow 0$ и представлений (3), уравнения (2) могут быть записаны в виде следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_{nm}^+}{dz} &= \sum_{k,l} \mathbf{R}_{nk}^+ \cdot \boldsymbol{\rho}_{kl}^- \cdot \mathbf{R}_{lm}^+ + \sum_k \mathbf{R}_{nk}^+ \cdot \boldsymbol{\tau}_{km}^- + \sum_k \boldsymbol{\tau}_{nk}^+ \cdot \mathbf{R}_{km}^+ + \boldsymbol{\rho}_{nm}^+, \\ \frac{d\mathbf{T}_{nm}^-}{dz} &= \sum_{k,l} \mathbf{T}_{nk}^- \cdot \boldsymbol{\rho}_{kl}^- \cdot \mathbf{R}_{lm}^+ + \sum_k \mathbf{T}_{nk}^- \cdot \boldsymbol{\tau}_{km}^-. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия для системы (4) имеют вид:

$$\mathbf{R}_{nm}^\pm(0) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{T}_{nm}^\pm(0) = \mathbf{I}. \quad (5)$$

Отметим, что сама структура уравнений погружения (4) универсальна и не зависит ни от геометрии ФК, ни от характеристик его вещества — вся конкретная информация о ФК содержится в матричных характеристиках $\boldsymbol{\rho}_{nm}^\pm$ и $\boldsymbol{\tau}_{nm}^\pm$ элементарного слоя. Таким образом, задача сводится к конкретизации вида указанных характеристик.

Матричные коэффициенты уравнения погружения

Для нахождения матричных коэффициентов решается вспомогательная задача о характеристиках рассеяния и прозрачности уединенного элементарного слоя — тонкого среза ФК толщины Δz . Элементарным мы будем называть его потому, что дифракция поля на нем может рассчитываться в борновском приближении, т. е. действующее поле — $\mathbf{E}^{\text{int}}(\mathbf{r}')$ в каждой внутренней точке \mathbf{r}' элементарного слоя однозначно и просто определяется падающим полем. Плотность индуцированного дипольного момента в точке внутри слоя определяется соотношением $\mathbf{p}(\mathbf{r}') = -k_0^2 [\varepsilon(\mathbf{r}') - 1] \cdot \mathbf{E}^{\text{int}}(\mathbf{r}')$, а дифрагированное поле — интегралом по объему элементарного слоя от функции Грина $\Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ с весом $\mathbf{p}(\mathbf{r}')$, \mathbf{r} — точка наблюдения, лежащая вне слоя. Теперь удобно перейти в смешанное (\mathbf{q}, z) — представление, т. е. разложить поля в угловой спектр. В этом представлении, с учетом векторного характера электромагнитного поля, матричная функция Грина может быть записана в виде [Tsang L., Kong J.A., Ding K.H., 2000]:

$$\Gamma(\mathbf{q}, z - z') = -\delta(z - z') \cdot \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z / k^2 + \frac{i}{2} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{k} \times \mathbf{k} / k^2] \cdot \frac{\exp(ik_z \cdot (z - z'))}{|k_z|}.$$

Здесь знаком \times обозначено диадное произведение векторов, а \mathbf{I} — единичный тензор. Заметим, что поскольку точка наблюдения — z не принадлежит слою, а z' — координата точки истока поля — лежит внутри слоя, то всегда $z \neq z'$, и первый сингулярный член, пропорциональный $\delta(z - z')$, можно опустить. Тогда функцию Грина можно записать в виде:

$$\alpha\beta \Gamma^+(q, z - z') = \frac{i}{2 \cdot k^2} \cdot \frac{k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha \cdot k_\beta}{|k_z|} \exp(ik_z \cdot (z - z')). \quad (6)$$

Индексы α и β , пробегающие значения x, y, z , указывают какие именно проекции вектора напряженности поля дифрагированной (α) и падающей (β) волн связывает данный элемент матричной функции Грина.

Принимая во внимание малую толщину элементарного слоя и приближая точку наблюдения к его границам, полагаем экспоненту в (6) равной единице. Теперь в преобразованном интеграле по объему элементарного слоя от функции Грина с весом $\mathbf{p}(\mathbf{r}')$ интегрирование по z заменяется умножением на Δz — толщину слоя. Дифрагированные поля, как это следует из соотношений (3), оказываются пропорциональными Δz .

Далее следует учесть когерентность всех вторичных источников, принадлежащих слою, и соответствующее интерференционное погашение всех волн, не связанных соотношением $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_m + (n - m) \cdot \mathbf{k}$, где \mathbf{q}_n и \mathbf{q}_m — поперечные составляющие волновых векторов падающего поля и n -й дифрагированной моды, \mathbf{k} — вектор обратной решетки ФК. Тогда матричная функция Грина вырождается в 4-индексную матрицу $\left\| \alpha\beta \Gamma_{nm}^\pm \right\|$.

Теперь, связывая дифрагированные поля с падающим, и учитывая, что борновское приближение дает лишь поправки к невозмущенному закону распространения падающей волны, записываем:

$${}_\alpha E_n^{\text{отр}} = {}_{\alpha,\beta} t_{n,m}(\Delta z) \cdot {}_\beta E_m^{\text{пад}}, \quad {}_\alpha E_n^{\text{прош}} = {}_{\alpha,\beta} r_{n,m}(\Delta z) \cdot {}_\beta E_m^{\text{пад}}.$$

Отсюда, в соответствии с (3), получаем:

$$\begin{aligned} {}_{\alpha\beta} \tau_{nm}^\pm &= {}_{\alpha\beta} \mathbf{I} \cdot ik_z(n) \cdot \delta_{nm} + {}_{\alpha\gamma} \Gamma_{nm}^\pm \cdot {}_{\gamma\beta} \mathbf{A} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)k_0^2}{\pi^2(n - m)} \sin\left(\frac{\pi \cdot d_x(n - m)}{\Lambda_x}\right), \\ {}_{\alpha\beta} \rho_{nm}^\pm &= {}_{\alpha\gamma} \Gamma_{nm}^\pm \cdot {}_{\gamma\beta} \mathbf{A} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)k_0^2}{\pi^2(n - m)} \sin\left(\frac{\pi \cdot d_x(n - m)}{\Lambda_x}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Матрица \mathbf{A} описывает изменение z -компоненты поля внутри элементарного слоя, обусловленное поляризационными зарядами, возникающим на его границах [Schiffer, Thielheim, 1979].

Отметим, что описанная выше методика расчета характеристик ρ_{nm}^{\pm} и τ_{nm}^{\pm} , но для 2D структур и 2D поля, хорошо известна [Барабаненков, Кузнецов, 1999], [Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю., 2003], и специфика нашей задачи, связанная с расширением пространства для поля (3D — случай), сводится к корректному учету поляризации поля, осложняемому некомпланарностью дифрагированных полей.

Мультибазисное описание дифрагированных мод

Необходимость учета большого числа мод при решении системы (4) заставляет минимизировать размерность задачи при учете поляризации поля. Заметим, что взаимодействие каждой пары (n, m) мод из спектров иницирующего и дифрагированного полей будет задаваться матричной функцией Грина, размерности 3×3 . Размерность этой матрицы и, соответственно, число совместно решаемых уравнений можно уменьшить, учитывая поперечность поля, порождаемого матричной функцией Грина (6).

Следует заметить, что матричная функция Грина содержит в качестве мультипликативного члена проектирующий оператор \mathbf{P} по компонентам вектора напряженности электрического поля $P_{\alpha, \beta} = \delta_{\alpha, \beta} - k_{\alpha} k_{\beta} / k_0^2$ ($\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$). Нетрудно убедиться в том, что при произвольной ориентации вектора плотности индуцированного дипольного момента $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ компонента углового спектра, характеризуемая волновым вектором \mathbf{k} , будет содержать только поперечное поле. Действительно, скалярное произведение \mathbf{k} и $\mathbf{P} \cdot \mathbf{p} \propto \mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ равно нулю:

$$(\mathbf{k}, \mathbf{Pp}(\mathbf{r})) = \sum_{\alpha\beta} k_{\alpha} \left[\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} / k_0^2 \right] \cdot p_{\beta} = \sum_{\beta} \left[k_{\beta} p_{\beta} - \frac{1}{k_0^2} \sum_{\alpha} k_{\alpha}^2 \cdot (k_{\beta} p_{\beta}) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что все компоненты углового спектра, в том числе и эванесцентные моды, являются поперечными.

Для понижения размерности матричных уравнений воспользуемся тем, что элементы множеств $\{\mathbf{E}\}$ и $\{\mathbf{r}\}$, связанные отображением $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, могут быть записаны в несовпадающих базисах, по-разному ориентированных в пространстве. Так, если точку наблюдения или истока поля удобно записывать в системе отсчета, жестко связанной с ФК, то вектор напряженности поля \mathbf{E} целесообразно задавать в другой системе, связанной с его волновым вектором. Тогда размерность вектора поля (с учетом его поперечности) для выбранной моды углового спектра можно уменьшить с трех до двух, если первый орт базиса направить по волновому вектору моды, а второй — параллельно верхней грани ФК. Направление третьего определяется автоматически. Если для каждой моды падающего или дифрагированного поля таким образом выбрать свой базис (мультибазисная система), то матрица Грина будет иметь размерность 2×2 , и общее число решаемых уравнений системы (4) уменьшится более, чем в два раза. Сказанное можно символически описать переходом

$${}_{\alpha\beta} \Gamma_{nm}^{\pm} \rightarrow {}_{\varphi\chi} G_{nm}^{\pm}. \quad (8)$$

Здесь α и β пробегают три значения x, y, z , а φ и χ — два значения h и v , соответствующие горизонтальной и вертикальной поляризации.

Переход к новому базису для описания векторного поля осуществляется с помощью обычных матриц поворота, которые, однако, для каждой пространственной моды характеризуются своим набором углов. Так соотношения (1), связывающие амплитуды мод иницирующего

и дифрагированного полей, в новом базисе можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_n^\pm)' &= \mathbf{U}_n^\pm \cdot \mathbf{E}_n^\pm = [\mathbf{U}_n^\pm \cdot \mathbf{T}_{nm}^\pm \cdot (\mathbf{U}_m^\pm)^{-1}] \cdot \mathbf{U}_m^\pm \cdot \mathbf{E}_m^\pm, \\ (\mathbf{E}_n^\pm)' &= \mathbf{U}_n^\pm \cdot \mathbf{E}_n^\pm = [\mathbf{U}_n^\pm \cdot \mathbf{R}_{nm}^\pm \cdot (\mathbf{U}_m^\mp)^{-1}] \cdot \mathbf{U}_m^\mp \cdot \mathbf{E}_m^\mp. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что в (9) записана связь некоторой фиксированной пары мод (n -й и m -й), поэтому суммирование по повторяющимся индексам не предполагается. Матричный вид выражений связан с векторным характером электромагнитного поля, по компонентам которого суммирование предполагается.

Далее домножим слева и справа уравнения системы (4) на блочные матрицы поворота и вставим внутрь произведений единичные матрицы, представленные в виде $\mathbf{I} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1}$. Если для всех фигурирующих в уравнениях (4) величин ввести новые обозначения — $\Psi' = \mathbf{U} \cdot \Psi \cdot \mathbf{U}^{-1}$, то вид уравнений сохранится.

Результаты численного эксперимента

Система уравнений (4)–(6) с учетом перехода к мультибазисному описанию для взаимодействующих мод была использована нами при проведении расчетов. Для численного эксперимента был выбран ФК, состоящий из шести слоев диэлектрических цилиндров с радиусом вставок 2.5 мм и периодом структуры 9мм (рис. 2). Значение диэлектрической проницаемости вставок было выбрано $\varepsilon = 4.2$, что соответствует широкому классу диэлектриков в гигагерцовом диапазоне частот.

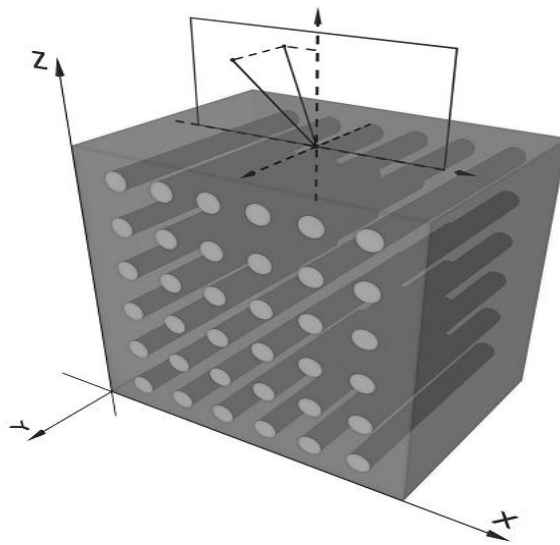


Рис. 2 2D ФК с цилиндрическими вставками

С целью контроля точности результатов во время расчета осуществлялась проверка выполнения теоремы Пойнтинга, которая в случае горизонтальной и вертикальной поляризации падающего поля имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_n \left(\left(|v_v R_{n0}| + |v_v T_{n0}| \right)^2 + \left(|h_v R_{n0}| + |h_v T_{n0}| \right)^2 \right) \cdot \operatorname{Re}(k_z(n)) &= k_z(0), \\ \sum_n \left(\left(|h_h R_{n0}| + |h_h T_{n0}| \right)^2 + \left(|v_h R_{n0}| + |v_h T_{n0}| \right)^2 \right) \cdot \operatorname{Re}(k_z(n)) &= k_z(0). \end{aligned} \quad (10)$$

В проведенных расчетах (10) выполнялись с точностью не хуже, чем 10^{-4} .

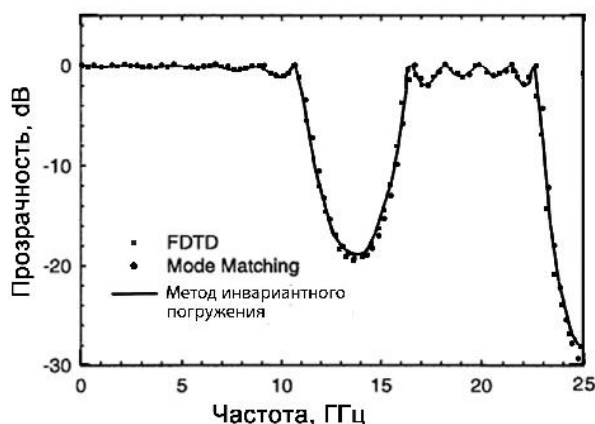


Рис. 3. Сравнение результатов расчета ФК различными методами

На рисунке 3 приведены для сравнения зависимости, полученные нами с помощью метода погружения, и результаты расчетов методами FDTD и Mode Matching [Taflove, Hugnes, 2005], [Kelly et al., 1994] для случая нормального падения поля на ФК. В методе FDTD реализуется численный алгоритм решения дифференциальных уравнений Максвелла с разбиением счетного пространства на ячейки с размерами порядка длины волны, этим обусловлены высокие требования к производительности вычислительного комплекса. При использовании метода согласования мод искомое поле находится сразу во всем объеме ФК, что требует совместного решения большого числа алгебраических уравнений. При ограниченности вычислительных ресурсов это приводит к уменьшению детализации поля во всем объеме кристалла. В отличие от указанных подходов, метод инвариантного погружения реализует последовательные вычисления при росте толщины ФК, что не требует хранения в памяти больших массивов данных.

Для дальнейшего исследования спектральных характеристик запрещенной зоны, нами был проведен ряд экспериментов.

В первом случае было рассмотрено падение горизонтально поляризованного поля, волновой вектор которого лежит в плоскости, перпендикулярной вставкам ФК, и образует с нормалью углы: $\pi/10$, $\pi/8$, $\pi/6$, $\pi/4$. Проведенные расчеты показывают, что по мере увеличения угла падения две запрещенные зоны, расположенные в полосе частот 10–25 ГГц, постепенно сближаются, сливаясь при угле падения $\pi/4$. При этом прозрачность кристалла в области левой запрещенной зоны плавно уменьшается, «проседая» почти на 20 дБ (рис. 4).

Во втором эксперименте было рассмотрено падение горизонтально поляризованной волны под углами $\pi/8$ и $\pi/4$ к нормали в случае, когда проекция волнового вектора на верхнюю грань ФК образует с диэлектрическими вставками азимутальный угол $\pi/8$. Несмотря на более сложный характер взаимодействия, вид анализируемой запрещенной зоны в полосе 13–17 ГГц (рис. 5а, б) очень близок к тому, что наблюдается при нормальном падении (рис. 4а, д).

Расчеты, проведенные для случая вертикальной поляризации падающего поля, показали, что для частотной зависимости коэффициента прозрачности $_{vv}T_{00}$ существует минимум в области 15 ГГц, однако ему соответствует значение коэффициента прозрачности -1.8 dB , чего явно недостаточно для формирования запрещенной зоны (рис. 6).

Определенный интерес представляет влияние формы вставок на параметры запрещенной зоны ФК. Мы провели численный эксперимент для ФК с вставками в виде прямоугольных брусков сечения $2,5 \times 2,5$ мм. Сравнение кривых прозрачности для ФК, образованных круго-

выми цилиндрами и брусьями, при нормальном падении волн представлено на рисунке 7. Наблюдаемое смещение в частотном диапазоне связано, видимо, с особенностями резонансов Ми в анализируемых структурах.

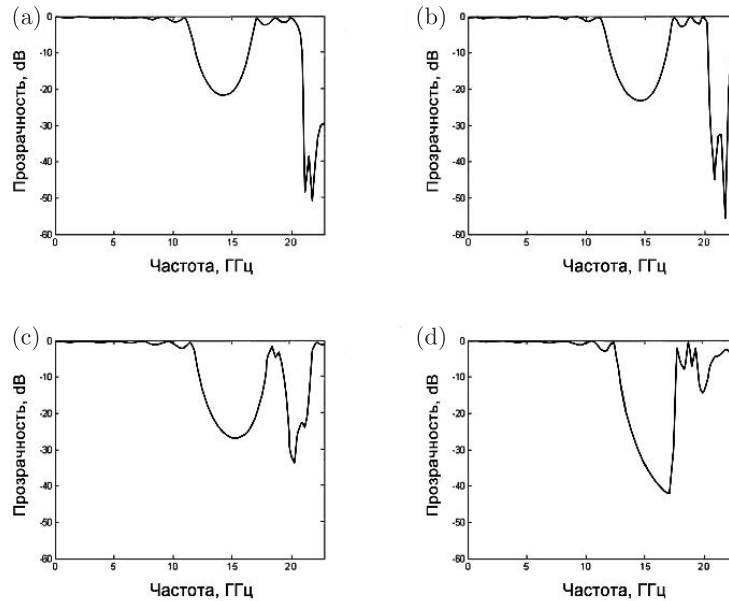


Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента прохождения электромагнитной волны через слой 2D ФК при увеличении угла падения: (a) $\theta = \pi/10$, (b) $\theta = \pi/8$, (c) $\theta = \pi/6$, (d) $\theta = \pi/4$

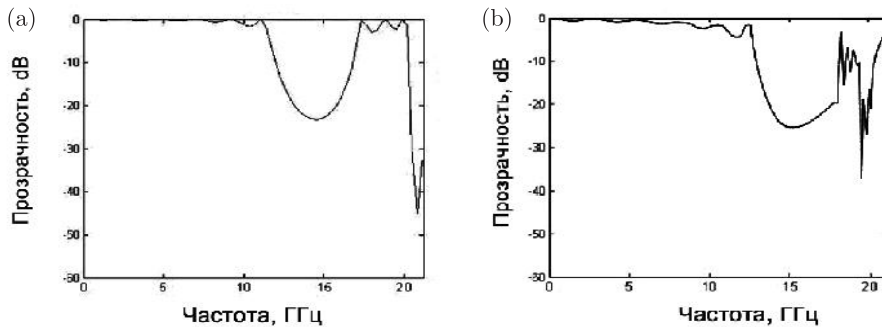


Рис. 5. Результаты расчета коэффициента прозрачности ФК для горизонтально поляризованной волны, падающей на ФК с азимутальным углом $\phi = \pi/8$ и двумя разными углами падения $\theta = \pi/8$ (a) и $\theta = \pi/4$ (b)

Заключение

В работе развивается теоретический подход, базирующийся на методе инвариантного погружения, для расчета взаимодействия векторного 3D электромагнитного поля с 2D фотонным кристаллом конечной толщины. Этот подход обладает рядом преимуществ, в сравнении с другими известными методами.

Во-первых, результатом расчета являются матричные коэффициенты отражения — ${}_{\alpha\beta}R_{nm}^{\pm}(z)$ и прохождения — ${}_{\alpha\beta}T_{nm}^{\pm}(z)$. Это значит, что падающее поле не обязательно должно быть плоской волной. Произвольное (монохроматическое) падающее поле раскладывается в угловой спектр, который, в свою очередь, разбивается на группы плоских волн, взаимодействующих в ФК. Внутри каждой такой группы выполняется условие $\mathbf{q}_n = \mathbf{q}_m + (n - m) \cdot \mathbf{k}$ для

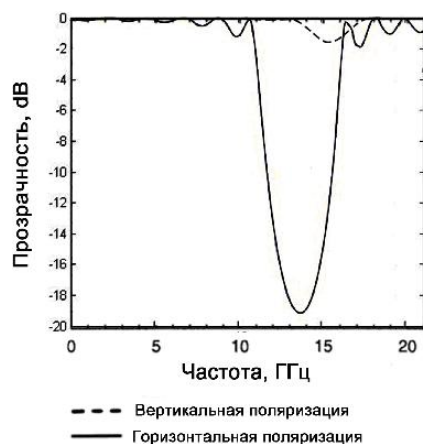


Рис. 6. Сравнение расчетов для разных видов поляризации

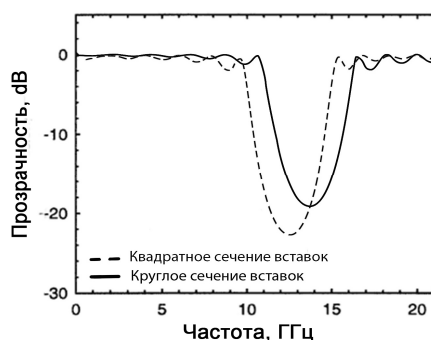


Рис. 7. Сравнение расчетов в случае разной формы вставок ФК

любой пары ее элементов, т. е. в группу включаются все плоские волны, волновые векторы которых совпадают с точностью до векторов трансляции обратной решетки. Матричные коэффициенты отражения и прохождения позволяют рассчитать дифрагированные поля сразу для всей группы. Дифрагированные поля разных групп между собой не взаимодействуют.

Другим важным преимуществом метода является то обстоятельство, что результатом однократного расчета коэффициентов ${}_{\alpha\beta}R_{nm}^{\pm}(z)$ и ${}_{\alpha\beta}T_{nm}^{\pm}(z)$ ФК толщины z являются значения этих коэффициентов для ФК любой толщины $z' < z$.

В работе построена математическая модель взаимодействия поля с ФК и приводятся некоторые результаты численных экспериментов, которые, в частности, хорошо совпадают с известными в литературе результатами, полученными другими методами для нормально падающей на кристалл плоской волны.

Список литературы

- Барабаненков Ю. Н., Барабаненков М. Ю. Метод соотношений переноса в теории резонансного многократного рассеяния волн с применением к дифракционным решеткам и фотонным кристаллам // ЖЭТФ. — 2003. — Т. 123. — Вып. 4 — С. 763.
- Барабаненков Ю. Н., Кузнецов В. Л. Матричное уравнение Риккати для задачи рассеяния векторного поля на двухмасштабной периодической поверхности // Радиотехника и электроника. — 1999. — Т. 44, № 6.
- Гольдберг М., Ватсон К. Теория столкновений. — М.: Мир, 1967.
- Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
- Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.

- Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными // пер. с англ., М., 1975.
- Barabanenkov Yu. N., Kouznetsov V. L., Barabanenkov M. Yu.* Transfer relations for electro- magnetic wave scattering from periodic dielectric one-dimension interface: TE polarization // Progress in Electromagnetic Research: PIER. — 1999. — Vol. 24.
- Barnes C., Pendry J. B.* Multiple Scattering of Waves in Random Media: a Transfer-Matrix Approach // Proc. R. Soc. Lond. — 1991.
- Beenakker C.W.J.* Random-matrix theory of quantum transport // Reviews of Modern Physics. — 1997. — Vol. 69, No 3.
- Bellman R., Wing G. M.* An Introduction to Invariant Imbedding. — NY: Willey Interscience, 1975.
- Danner A. J.* An Introduction to the Plane Wave Expansion Method for Calculating Photonic Crystal Band Diagrams. University of Illinois, 2002.
- Grbic A., Eleftheriades G. V.* Overcoming the Diffraction Limit with a Planar Left-handed Transmission-line Lens // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 92.
- Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Meade R. D., Winn J. N.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. — Princeton Univ. Press, 2008.
- Kelly P. K., Maloney J. G., Shirley B. L., Moore R. L.* Photonic bandgap structures of finite thickness: theory and experiment // IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. — 1994. — Vol. 2. — Seattle.
- Ohtera Y., Kurniatan D., Yamada H.* Antireflection coatings for multi-layer type photonic crystals // Optics Express — 2010. — Vol.18. — P. 12249–12261.
- Schiffer R., Thielheim K.O.* Light scattering by dielectric needles and disks // J. Appl. Phys. — 1979. — Vol. 50, No 4.
- Taflove A., Hugnes S.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time Domain Method. — Artech House, 2005.
- Tsang L., Kong J.A., Ding K.H.* Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications. — NY: Willey Interscience, 2000.
- Yasumoto K.* Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals (Optical Science and Engineering). — NY, 2006.
- Zolla F., Renversez G., Nicolet A., Kuhlmeiy B., Guenneau S., Felbacq D.* Foundations of Photonic Crystal Fibers // London: Imperial College Press. — 2005.