

УДК: 519.62/64+517.958:536

О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана

Г. В. Кривовичев

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики – процессов управления
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., д. 35

E-mail: gera1983k@bk.ru

Получено 14 января 2013 г.,
после доработки 13 марта 2013 г.

Предложен модифицированный метод решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой ньютоновской жидкости. Модифицированный метод основан на использовании расщепления дифференциального оператора в уравнении Навье–Стокса и идее мгновенной максвеллизации функции распределения. При переходе от одного временного слоя к другому последовательно численно решаются задачи для системы решеточных кинетических уравнений и системы линейных уравнений диффузии. Эффективность предложенного метода по сравнению с обычным методом решеточных уравнений Больцмана показана при решении задачи о плоском течении в каверне в случае различных значений числа Рейнольдса и при различных разбиениях сетки.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, метод расщепления, задача о течении в каверне

On the computation of viscous fluid flows by the lattice Boltzmann method

G. V. Krivovichev

Saint-Petersburg State University, Department of Applied Mathematics – Processes of Control, 35 University prospect, Saint-Petersburg, Peterhof, 198504, Russia

Abstract. — Modification of the lattice Boltzmann method for computation of viscous Newtonian fluid flows is considered. Modified method is based on the splitting of differential operator in Navier–Stokes equation and on the idea of instantaneous Maxwellisation of distribution function. The problems for the system of lattice kinetic equations and for the system of linear diffusion equations are solved while one time step is realized. The efficiency of the method proposed in comparison with the ordinary lattice Boltzmann method is demonstrated on the solution of the problem of planar flow in cavern in wide range of Reynolds number and various grid resolution.

Keywords: lattice Boltzmann method, splitting method, cavern flow problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 165–178 (Russian).

Введение

Метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее LBM) представляет собой метод для численного расчета течений жидкостей, газов и плазмы, являющийся альтернативой методам, основанным на дискретизации уравнений, описывающих динамику сплошной среды [Мачин, Четверушкин, 2004; Chen, Doolen, 1998; He, Luo, 1997; Wolf-Gladrow, 2005]. При применении метода решается система кинетических уравнений специального вида для функций распределения, из которой с помощью метода Чепмена – Энскога может быть получена система уравнений механики сплошной среды. Значения таких макроскопических величин как плотность, скорость, давление и температура приближенно вычисляются через значения функций распределения.

Большая популярность LBM в последние годы связана с простотой его алгоритма и широкими возможностями для распараллеливания. Метод практически идеально подходит для параллельной реализации на многопроцессорных графических ускорителях и гибридных системах с использованием технологии CUDA, что в настоящее время является весьма актуальным [Биколов и др, 2012; Геллер, Васильев, Холодов, 2010; Грачев, Дмитриев, Сенин, 2011; Евстигнеев, Магницкий, 2010; Куперштох, 2012; Rinaldi и др, 2012; Xiong и др, 2012]. Кроме того, при реализации алгоритма метода на многопроцессорных системах наблюдается увеличение производительности по сравнению с реализациями алгоритмов конечно-разностных методов решения уравнений механики сплошной среды [Velivelli, Bryden, 2006]. Определенными преимуществами LBM обладает при расчетах течений со свободными поверхностями [Schreiber и др, 2011; Zhao и др, 2013] и течений в пористых средах [Guo, Zhao, 2002; Pan, Luo, Miller, 2006].

Настоящая работа посвящена описанию модифицированного варианта LBM, основанного на использовании расщепления дифференциального оператора, входящего в уравнение движения сплошной среды и идее мгновенной максвеллизации функций распределения, предложенной Б. Н. Четверушкиным [Четверушкин, 1999, с. 46]. Эффективность модифицированного метода по сравнению с обычным LBM показана при решении известной тестовой задачи вычислительной гидродинамики.

Метод решеточных уравнений Больцмана

В рамках LBM производится рассмотрение течения среды как динамики ансамбля крупных частиц с заданным конечным числом возможных скоростей. Область, в которой происходит течение, разбивается сеткой с ячейками определенной формы, что задает в ней так называемую решетку (lattice). За шаг по времени δt частицы без взаимодействия друг с другом переходят между узлами решетки. Взаимодействие (абсолютно упругое соударение) может осуществляться только в узлах решетки [Wolf-Gladrow, 2005]. Динамика ансамбля таких частиц описывается статистически с помощью аппарата кинетической теории газов.

В работе рассматриваются только плоские изотермические течения вязкой ньютоновской жидкости и решетки с ячейками квадратной формы со стороной длины l . В этом случае можно использовать набор скоростей D2Q9 [Wolf-Gladrow, 2005] (рис. 1): $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 9$, где $V = l/\delta t$, а векторы \mathbf{v}_i задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (-1, 0), \quad \mathbf{v}_5 = (0, -1), \quad \mathbf{v}_6 = (1, 1), \quad \mathbf{v}_7 = (-1, 1), \\ \mathbf{v}_8 = (-1, -1), \quad \mathbf{v}_9 = (1, -1). \end{aligned}$$

Система дискретных кинетических уравнений (так называемых решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann equations, далее LBE)), описывающая динамику ансамбля крупных

частиц, имеет следующий вид [Chen, Doolen, 1998; He, Luo, 1997; Wolf-Gladrow, 2005]:

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \frac{1}{\tau} (f_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — радиус-вектор узла решетки, t_j — узел временной равномерной сетки, построенной с шагом δt , $f_i, i = 1, \dots, 9$ — одночастичные функции распределения крупных частиц со скоростями \mathbf{V}_i , τ — безразмерный параметр релаксации, $f_i^{(eq)}$ — функции, аппроксимирующие локальные равновесные функции распределения Максвелла.

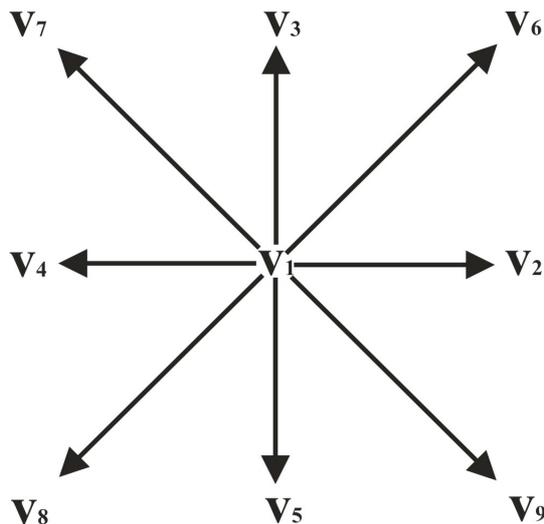


Рис. 1. Набор скоростей D2Q9

Система (1) может быть получена разными способами: или как обобщение специальной модели решеточного газа (lattice gas cellular automata) [Wolf-Gladrow, 2005], или посредством дискретизации кинетического уравнения, предложенного Р. L. Bhatnagar, Е. Р. Gross и М. Krook (далее BGK-уравнение) [Abe, 1997; Bhatnagar, Gross, Krook, 1954; Luo, 2000].

В рамках данной работы ограничимся рассмотрением течений несжимаемой жидкости. В этом случае при проведении численных расчетов нужно находить только такие макроскопические характеристики, как скорость среды \mathbf{u} и давление p . В рамках LBM значения этих величин вычисляются с помощью следующих формул [He, Doolen, Clarck, 2002; He, Luo, 1997]:

$$p(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = c \sum_{i=1}^9 f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}), \quad p(t_j, \mathbf{r}_{kl})\mathbf{u}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = c \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}), \quad (2)$$

где $c = \frac{1}{3}V^2$.

Функции $f_i^{(eq)}$ представляются в следующем виде [Chen, Doolen, 1998; He, Luo, 1997]:

$$f_i^{(eq)} = \frac{W_i}{c} p \left(1 + 3 \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{V^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})^2}{V^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{V^2} \right), \quad (3)$$

где

$$W_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 1, \\ \frac{1}{9}, & i = 2, 3, 4, 5, \\ \frac{1}{36}, & i = 6, 7, 8, 9. \end{cases}$$

Следует отметить, что выражения вида (3) справедливы лишь для случая малых значений безразмерного параметра $M = |\mathbf{u}|/V$, который в рамках LBM имеет смысл числа Маха. Необходимо также отметить, что LBM, вообще говоря, предназначается для расчета течений вязкой *сжимаемой* среды, но случай малых M соответствует случаю *слабосжимаемой* среды [He, Doolen, Clarck, 2002; He, Luo, 1997], а такая модель может с успехом применяться для расчета течений *несжимаемой* жидкости [Четверушкин, 1999, с. 126; Яненко, 1967, с. 136]. В связи с этим укажем, что многими авторами отмечалось [Asinari и др, 2012; He, Doolen, Clarck, 2002; He, Luo, 1997; Ohwada, Asinari, 2010], что LBM тесно связан с таким известным в вычислительной гидродинамике методом расчета течений вязкой *несжимаемой* жидкости, как метод искусственной сжимаемости [Белоцерковский, 1984, с. 133; Яненко, 1967, с. 136–140; Chorin, 1967; Ohwada, Asinari, 2010].

Как показано в [He, Luo, 1997, с. 940–944], из системы (1) с учетом (2) и (3) при применении метода Чепмена–Энскога может быть получена следующая система относительно функций p и \mathbf{u} :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + O(M^2) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + O(M^3), \quad (5)$$

где ρ — постоянная плотность жидкости. Система (4)–(5) с точностью до членов одного порядка малости с M^2 и M^3 соответствует системе уравнений вязкой *несжимаемой* жидкости, что и дает при малых M близость решений задач для (1) с вычислением p и \mathbf{u} по (2) с решениями задач для уравнений гидродинамики. В дальнейшем, говоря о системе (4)–(5), будем иметь ввиду только случай малых значений M , и члены соответствующего порядка малости в уравнениях данной системы будем опускать.

Параметр ν , фигурирующий в (5), имеет смысл кинематического коэффициента вязкости, и он связан с τ следующим соотношением [He, Luo, 1997, с. 943]:

$$\nu = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{3\delta t}. \quad (6)$$

Один из недостатков LBM связан с тем, что разностная система (1) является условно устойчивой по начальным условиям [Sterling, Chen, 1996; Кривовичев, 2013]. На практике эта проблема может быть решена за счет использования специальных граничных условий для функций распределения [Семенов, Кривовичев, 2012], использования схем с несколькими параметрами релаксации [d’Humières D. и др, 2002] или посредством применения неявных вариантов LBE [Кривовичев, 2012]. К сожалению, два последних подхода приводят к значительному увеличению времени проведения расчетов, причем при использовании неявных схем возникают определенные сложности при распараллеливании вычислений.

В настоящей работе предложен модифицированный вариант LBM, основанный на использовании явной разностной схемы (1), позволяющий улучшить устойчивость метода и не приводящий к сложностям, связанным с распараллеливанием вычислений.

Модифицированный вариант LBM

Предлагаемый в данной работе подход основан на введении в векторное уравнение (5) параметра ν_1 , имеющего размерность кинематического коэффициента вязкости. Это делается просто посредством добавления к правой части (5) слагаемого $\nu_1 \Delta \mathbf{u}$ и его вычитания:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + (\nu - \nu_1) \Delta \mathbf{u} + \nu_1 \Delta \mathbf{u}. \quad (7)$$

Вводя обозначения $A_1(\mathbf{u}, p) = -(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu_1 \Delta \mathbf{u}$ и $A_2(\mathbf{u}) = (\nu - \nu_1) \Delta \mathbf{u}$, перепишем систему уравнений, составленную из (4) и (7):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_1(\mathbf{u}, p) + A_2(\mathbf{u}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

Следуя методу расщепления [Яненко, 1967], предлагается численно решать задачи для дискретного аналога (8) на промежутке времени $[t_j, t_{j+1}]$, где $t_{j+1} = t_j + \delta t$ следующим образом: вводить промежуточный временной слой $t_{j+1/2} = t_j + \delta t/2$ и на промежутке $[t_j, t_{j+1/2}]$ решать задачу для дискретного аналога системы

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_1(\mathbf{u}, p), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

а затем, предполагая, что

$$p(t_{j+1}, \mathbf{r}) \approx p(t_{j+1/2}, \mathbf{r}), \quad (10)$$

решать на промежутке $[t_{j+1/2}, t_{j+1}]$ задачу для дискретного аналога системы

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_2(\mathbf{u}), \quad (11)$$

в качестве начального условия для которого при $t = t_{j+1/2}$ используя значение \mathbf{u} , найденное при численном решении задачи для (9). При расчете на следующем временном промежутке в качестве начальных условий для численного решения системы (9) используется значение \mathbf{u} , найденное при решении (11), а значение p задается в соответствии с (10). Как можно видеть, предположение (10) позволяет избежать необходимости в расчете давления на промежутке $[t_{j+1/2}, t_{j+1}]$.

Таким образом, на первом этапе предлагаемого метода производится расчет давления и скорости при фиктивном коэффициенте вязкости ν_1 . На втором этапе при численном решении (11) значения вектора скорости \mathbf{u} в точках сетки корректируются посредством учета реального значения коэффициента вязкости ν . В принципе, по найденному таким образом в момент t_{j+1} полю скоростей можно производить вычисление давления, решая для этого задачу для уравнения Пуассона (например, см. [Роуч, 1972]), что привело бы к дополнительным ресурсоемким вычислениям. Предположение (10) является ни чем иным как упрощением, позволяющим избежать этой процедуры. Естественно, оно будет накладывать определенные ограничения на пределы применимости метода, которые еще предстоит выяснить. Но по всей видимости, метод будет хорошо подходить для расчетов установившихся течений в пористых средах, для которых характерно малое значение Re ($Re \sim 0.001 - 10$) и предположение (10) является оправданным, поскольку давление при таких течениях слабо меняется во времени [Hussein, Becker, 2009]. Заметим, что такие течения происходят в мягких тканях человеческого организма [Hussein, Becker, 2009]. В представленном в данной работе примере предположение (10) не сказывается на точности получаемых результатов.

При проведении численных расчетов вместо задачи для (9) предлагается решать задачу для системы ЛВЕ-уравнений (1) с параметром релаксации τ_1 , вычисляемым через ν_1 с использованием (6). Как известно [Sterling, Chen, 1996; Кривовичев, 2013], посредством выбора параметра релаксации можно влиять на устойчивость схемы (1) — в связи с этим за счет выбора значений ν_1 , через которое вычисляется τ_1 , можно осуществлять стабилизацию схемы (1). На значения ν_1 накладывается условие: $\nu_1 > 0$ (поскольку этот параметр фигурирует в векторном уравнении движения на месте кинематического коэффициента вязкости, который неотрицателен), что влечет: $\tau_1 > 1/2$, и условие $\nu - \nu_1 > 0$ — так как система (11) представляет собой систему из двух линейных уравнений диффузии, в которых $\nu - \nu_1$ имеет смысл коэффициента диффузии.

В настоящей работе предлагается выбирать следующее значение τ_1 : $\tau_1 = 1$. Такой выбор обусловлен такими соображениями: во-первых, для стационарных течений такое значение соответствует внутренним точкам областей устойчивости в пространстве параметров [Nourgaliev и др, 2003; Sterling, Chen, 1996; Кривовичев, 2013]; во-вторых, такое значение τ_1 соответствует идее мгновенной максвеллизации функций распределения, предложенной Б. Н. Четверушкиным [Четверушкин, 1999, с. 46], успешно применяемой при реализации кинетически-согласованных разностных схем решения задач газовой динамики. Последний момент поясним более подробно — перепишем (1) на промежутке $[t_j, t_j + \delta t/2]$ при единичном значении параметра релаксации:

$$f_i\left(t_j + \frac{\delta t}{2}, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2}\right) = f_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl}). \quad (12)$$

Система (12) описывает перенос значений функций $f_i^{(eq)}$ вдоль характеристик системы BGK-уравнений с дискретными скоростями, выходящих из точек (t_j, \mathbf{r}_{kl}) (эта система представлена, например, в работе [Abe, 1997] на с. 242). При использовании (12) предполагается, что при $t = t_j$ значения f_i в узлах (t_j, \mathbf{r}_{kl}) совпадают со значениями $f_i^{(eq)}$ — таким образом, при проведении расчетов полагается, что в момент $t = t_j$ в узлах (t_j, \mathbf{r}_{kl}) происходит мгновенная максвеллизация функций распределения — поскольку, как указывалось выше, $f_i^{(eq)}$ аппроксимируют локальные равновесные функции распределения Максвелла.

Из того, что $\tau_1 = 1$, вытекает следующее ограничение на значение параметра τ : так как $\nu - \nu_1 > 0$, и, согласно (6), $\nu_1 = l^2/6\delta t$, то получим:

$$(\tau - 1) \frac{l^2}{3\delta t} > 0, \Rightarrow \tau > 1,$$

последнее подразумевает, что предлагаемый вариант LBM не будет подходить к задачам моделирования течений, для которых значения параметра τ близки к $1/2$, что характерно, например, для турбулентных течений [Martinez et al., 1994].

Система (11) представляет собой систему из двух линейных уравнений диффузии для компонент вектора \mathbf{u} , никак не связанных друг с другом, и задачи для которых, таким образом, могут решаться одновременно и независимо друг от друга, что особенно важно для параллельной реализации расчетов на многопроцессорных системах. Для решения этих задач можно воспользоваться любой из разработанных и представленных в литературе разностных схем — как явных, так и неявных. При программной реализации предложенного варианта LBM, чтобы не нарушать общей логики программы и не реализовывать принципиально другие алгоритмы, для решения уравнений из (11) можно воспользоваться одним из вариантов LBM для решения уравнения диффузии. Соответствующие явные схемы были предложены, например, в работах [Blaak, Sloot, 2000; Wang, Wang, Li, 2006; Wolf-Gladrow, 1995].

В данной работе задачи для уравнений диффузии численно решались с помощью варианта LBM, предложенного D. A. Wolf-Gladrow в работе [Wolf-Gladrow, 1995], в котором используется малое число возможных скоростей крупных частиц, которые составляют набор D2Q4: $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 4$, где:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (0, -1).$$

Решение уравнения диффузии в узлах решетки вычисляется как:

$$c(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^4 g_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}),$$

где g_i — функции распределения, эволюция которых описывается системой, аналогичной (1), в которой «равновесные» распределения $g_i^{(eq)}$ физического смысла не имеют и вычисляются следующим образом:

$$g_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \frac{1}{4} c(t_j, \mathbf{r}_{kl}).$$

Связь коэффициента диффузии D с параметром τ задается выражением:

$$D = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{2\delta t}.$$

В ряде случаев (при малых числах Рейнольдса), для решения соответствующих задач применялся как LBM, так и метод переменных направлений с использованием неявной схемы и метода трехдиагональной прогонки (например, см. [Киреев, Пантелеев, 2004]).

Необходимо подчеркнуть, что предлагаемый подход, связанный с расщеплением дифференциального оператора из уравнения движения, имеет смысл применять только при расчетах на основе LBM. Для непосредственного решения уравнений Навье–Стокса его применять нецелесообразно, так как все равно пришлось бы решать задачи для системы (9), которая отличается от (4)–(5) только коэффициентом.

Решение задачи о течении в каверне

Рассмотренный выше модифицированный вариант LBM в настоящей работе применялся к решению одной из известных тестовых задач вычислительной гидродинамики — к задаче о плоском течении в квадратной каверне с подвижной верхней крышкой [Chen, Tolke, Krafczyk, 2008; Ghia, Ghia, Shin, 1982]. Результаты расчетов сравнивались с результатами, полученными с помощью обычного LBM.

В задаче о течении в каверне рассматривается область квадратной формы, границы которой параллельны осям декартовой прямоугольной системы координат. Ставятся только кинематические граничные условия — условия прилипания: на трех сторонах компоненты вектора \mathbf{u} равны нулю, на верхней границе равной нулю полагается компонента u_y , компонента $u_x = U_0 = \text{const}$ (рис. 2). В качестве граничных условий для системы (12) выступали равновесные условия — значения функций распределения на границах приравнивались значениям равновесных функций распределения. При расчетах с использованием обычного LBM для системы (1) применялись условия из работы [Le Coupanec, Verschaeve, 2011], для которых, как показано в [Семенов, Кривовичев, 2012], LBM имеет повышенную устойчивость по сравнению с другими известными типами реализации граничных условий. При применении LBM к решению задач для (11) использовался подход для реализации условий Дирихле, предложенный в [Wolf-Gladrow, 1995]. Расчеты с использованием двух вариантов LBM производились с помощью оригинальной программы, написанной на языке C++ (использовалась некоммерческая среда разработки программного обеспечения Dev-C++ 4.9.9.2).

При проведении расчетов задавались значения такого критерия подобия, как число Рейнольдса, в случае ньютоновской жидкости вычисляемого как:

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (13)$$

где L — характерный линейный размер области, в которой происходит течение, U — характерная скорость. При решении задачи о течении в каверне в качестве L естественно рассматривать длину стороны квадрата, в качестве U — величину U_0 .

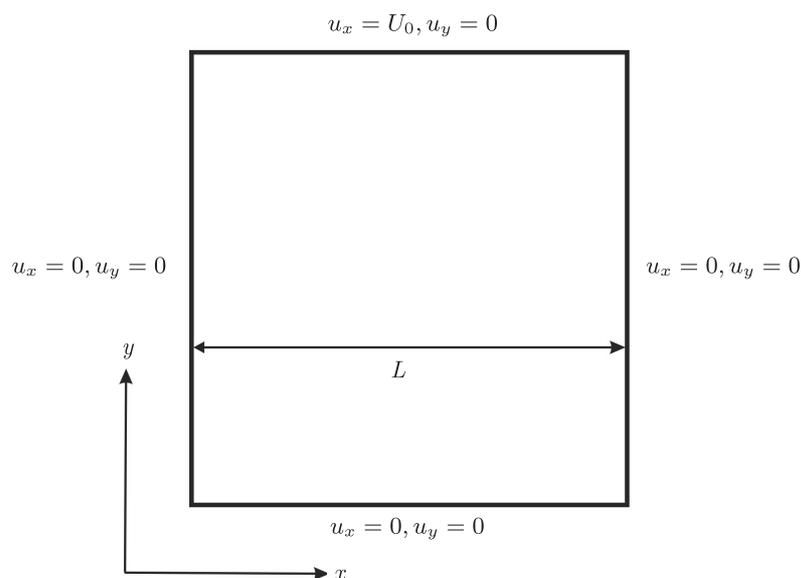
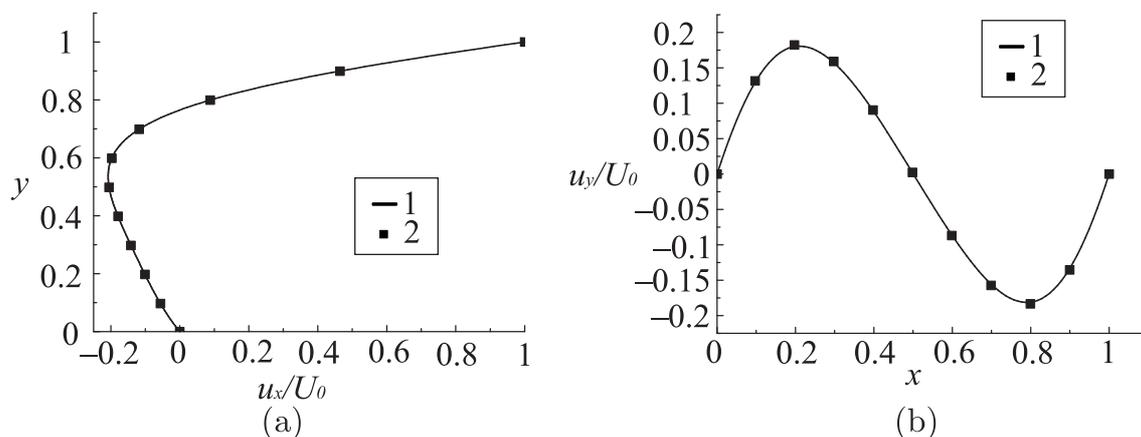


Рис. 2. К постановке задачи о течении в каверне

Поскольку в рамках настоящей работы автор не ставит целью проведение расчетов течений реальных сред, а рассматривает просто решение тестовой задачи, параметр ν , через который вычисляется τ , не задавался, а рассчитывался с использованием формулы (13) по заданным значениям Re , U и L . Рассматривались малые и умеренные значения Re : 0.01, 1, 50, 100, при следующих значениях параметров: $L = 1$ м, $U_0 = 0.01$ м/с. Рассматривался промежуток времени от 0 до 1000 с. Расчеты производились на сетках с одинаковым шагом по обеим декартовым координатам, с числом узлов, равным 50×50 , 100×100 , 150×150 и 200×200 соответственно.

Рис. 3. Графики компонент вектора скорости при $Re = 1$: цифрой 1 — результаты расчетов по модифицированному LBM; цифрой 2 — результаты из [Семин, Шапеев, 1998]

В ходе расчетов подбиралось приближенное наибольшее значение шага по времени δt , при котором не возникало численных неустойчивостей как для случая обычного LBM, так и для случая модифицированного варианта LBM. Ниже для этого значения δt будет использовано обозначение $\tilde{\delta t}$. На рисунках 3–5 для сравнения представлены графики численных решений, отнесенных к U_0 , полученных с помощью модифицированного LBM в случае сетки из 200×200 узлов и данных, взятых из работ [Семин, Шапеев, 1998; Chen, Tolke, Krafczyk, 2008; Ghia, Ghia, Shin, 1982]. На рисунках 3–5а представлены графики u_x/U_0 в точках прямой $\{x = 0.5L, y \in [0, L]\}$,

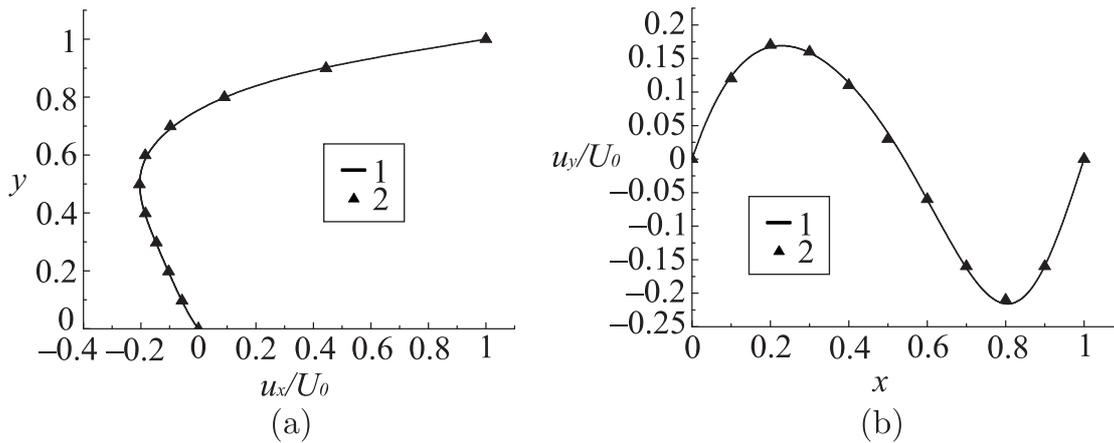


Рис. 4. Графики компонент вектора скорости при $Re = 50$: цифрой 1 — результаты расчетов по модифицированному LBM; цифрой 2 — результаты из [Chen, Tolke, Krafczyk, 2008]

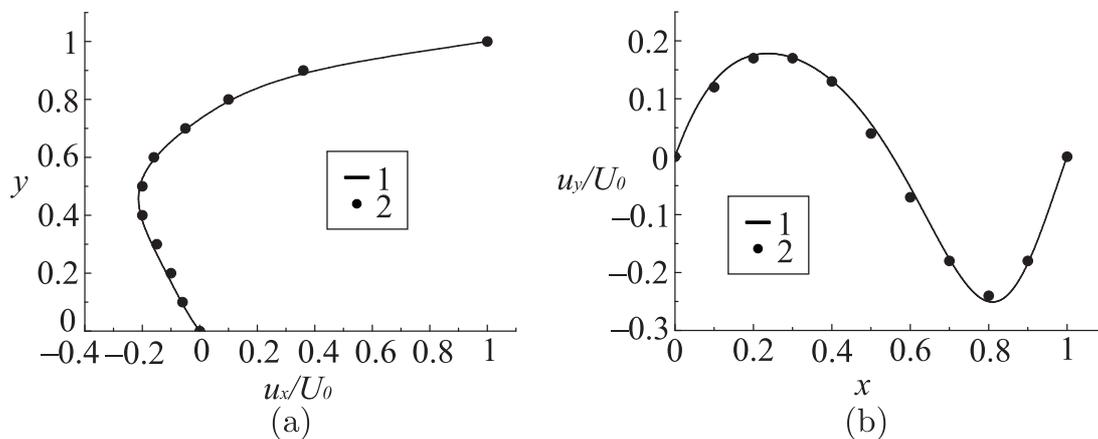


Рис. 5. Графики компонент вектора скорости при $Re = 100$: цифрой 1 — результаты расчетов по модифицированному LBM; цифрой 2 — результаты из [Ghia, Ghia, Shin, 1982]

а на рисунках 3–5b приведены графики u_y/U_0 в точках прямой $\{x \in [0, L], y = 0.5L\}$. Как можно видеть, результаты, полученные с помощью модифицированного LBM, хорошо согласуются с данными, представленными в литературе.

В таблицах 1–2 представлены значения $\tilde{\delta}t$ для случаев обычного LBM и модифицированного LBM при использовании схемы D. A. Wolf-Gladrow для решения задачи Дирихле для системы (11) соответственно. Как можно заметить, значения $\tilde{\delta}t$, полученные при расчетах с помощью модифицированного LBM, для случаев всех сеток оказались выше, чем в случае обычного LBM. Как можно заметить, значения $\tilde{\delta}t$ для модифицированного LBM превосходят аналогичные значения для обычного LBM более чем в 2–4 раза, что говорит о том, что модифицированный LBM при данных значениях более устойчив. При решении задач Дирихле для (11) методом переменных направлений с использованием неявной схемы удалось получить существенно большие значения $\tilde{\delta}t$ — к примеру, при $Re = 1$ они оказались больше примерно в 6 раз, при $Re = 0.01$ — примерно в 20 раз, соответствующие результаты представлены в таблице 3.

Для исследования влияния разбиения сетки на точность получаемых результатов производилось вычисление значений следующей величины:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2},$$

Таблица 1. Значения $\tilde{\delta}t$ для случаев различных Re и различных разбиений сетки при применении обычного LBM

Значение Re	50 × 50 узлов	100 × 100 узлов	150 × 150 узлов	200 × 200 узлов
0.01	$5.555 \cdot 10^{-5}$	$1.667 \cdot 10^{-5}$	$1.001 \cdot 10^{-5}$	$4.166 \cdot 10^{-6}$
1	$6.250 \cdot 10^{-3}$	$2.777 \cdot 10^{-3}$	$1.724 \cdot 10^{-3}$	$1.190 \cdot 10^{-3}$
50	$1.497 \cdot 10^{-1}$	$6.822 \cdot 10^{-2}$	$4.363 \cdot 10^{-2}$	$3.188 \cdot 10^{-2}$
100	$1.667 \cdot 10^{-1}$	$7.419 \cdot 10^{-2}$	$4.675 \cdot 10^{-2}$	$3.390 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2. Значения $\tilde{\delta}t$ для случаев различных Re и различных разбиений сетки при применении модифицированного LBM и схемы D. A. Wolf-Gladrow

Значение Re	50 × 50 узлов	100 × 100 узлов	150 × 150 узлов	200 × 200 узлов
0.01	$2.502 \cdot 10^{-4}$	$8.196 \cdot 10^{-5}$	$5.319 \cdot 10^{-5}$	$2.083 \cdot 10^{-5}$
1	$2.272 \cdot 10^{-2}$	$5.548 \cdot 10^{-3}$	$3.448 \cdot 10^{-3}$	$2.503 \cdot 10^{-3}$
50	$5.268 \cdot 10^{-1}$	$1.925 \cdot 10^{-1}$	$1.190 \cdot 10^{-1}$	$8.001 \cdot 10^{-2}$
100	$7.824 \cdot 10^{-1}$	$3.573 \cdot 10^{-1}$	$1.689 \cdot 10^{-1}$	$1.149 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3. Значения $\tilde{\delta}t$ для случаев $Re = 0.01$, $Re = 1$ и различных разбиений сетки при применении модифицированного LBM и метода переменных направлений

Значение Re	50 × 50 узлов	100 × 100 узлов	150 × 150 узлов	200 × 200 узлов
0.01	$1.102 \cdot 10^{-3}$	$3.250 \cdot 10^{-4}$	$1.933 \cdot 10^{-4}$	$8.011 \cdot 10^{-5}$
1	$3.701 \cdot 10^{-2}$	$1.670 \cdot 10^{-2}$	$9.901 \cdot 10^{-3}$	$7.110 \cdot 10^{-3}$

где I_x и I_y имеют смысл среднеквадратичных отклонений результатов, полученных при численных расчетах, от значений, представленных в работах [Семин, Шапеев, 1998; Chen, Tolke, Krafczyk, 2008; Ghia, Ghia, Shin, 1982]:

$$I_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (u_x(T, 0.5L, y_i) - U_x(0.5L, y_i))^2, \quad I_y = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (u_y(T, x_i, 0.5L) - U_y(x_i, 0.5L))^2,$$

где T — длина рассматриваемого временного промежутка (как показала практика проведенных расчетов, к этому моменту решение задачи выходит на стационарный режим), U_x и U_y — взятые из литературы значения компонент вектора скорости в узлах равномерной сетки, которой отрезок $[0, L]$ разбивается на N частей. При вычислении I_x и I_y бралось $N = 10$.

В таблице 4 представлены значения величины I в случае использования схемы D. A. Wolf-Gladrow — как можно видеть, они уменьшаются при измельчении сетки для случаев рассмотренных значений Re .

Таблица 4. Значения величины I для случаев $Re = 1, 50, 100$ и различных разбиений сетки при применении модифицированного LBM и схемы D. A. Wolf-Gladrow

Значение Re	50 × 50 узлов	100 × 100 узлов	150 × 150 узлов	200 × 200 узлов
1	$1.042 \cdot 10^{-4}$	$2.263 \cdot 10^{-5}$	$8.077 \cdot 10^{-6}$	$4.298 \cdot 10^{-6}$
50	$9.646 \cdot 10^{-4}$	$5.067 \cdot 10^{-4}$	$3.088 \cdot 10^{-4}$	$2.472 \cdot 10^{-4}$
100	$2.130 \cdot 10^{-3}$	$1.215 \cdot 10^{-3}$	$1.021 \cdot 10^{-3}$	$8.462 \cdot 10^{-4}$

В таблицах 5–7 представлены значения числа Маха M , соответствующие шагу $\tilde{\delta}t$ для всех разбиений сетки в случае обычного LBM, модифицированного LBM с использованием схемы D. A. Wolf-Gladrow и модифицированного LBM в сочетании с методом переменных направлений. Как можно заметить, при измельчении сетки значение M уменьшается для всех значений

Re , а при увеличении Re значение M возрастает для всех разбиений. Следует отметить, что значения M для случая модифицированного LBM больше, чем для случая обычного LBM. Наибольшее значение M , равное 0.3834, достигается на сетке 50×50 при $Re = 100$ (см. табл. 6). В работах [Cheng, Yan, Luo, 2006; Fares, 2006; Liao, Jen, 2008] в качестве максимально возможного M для расчета несжимаемой жидкости рекомендуют брать $M = 0.3$, поскольку, в противном случае, при применении LBM могут ожидать большие погрешности. Полученное в настоящей работе максимальное значение M существенно не превышает верхней границы диапазона изменения этого параметра, указанной в [Cheng, Yan, Luo, 2006; Fares, 2006; Liao, Jen, 2008], к тому же, соответствующее значение I имеет приемлемую величину (см. табл. 4) и результаты существенно не отличаются от результатов из [Ghia, Ghia, Shin, 1982].

Таблица 5. Значения числа Маха M для случаев различных Re и различных разбиений сетки при применении обычного LBM

Значение Re	50×50 узлов	100×100 узлов	150×150 узлов	200×200 узлов
0.01	$2.722 \cdot 10^{-5}$	$1.650 \cdot 10^{-5}$	$1.490 \cdot 10^{-5}$	$8.291 \cdot 10^{-6}$
1	$3.062 \cdot 10^{-3}$	$2.750 \cdot 10^{-3}$	$2.568 \cdot 10^{-3}$	$2.369 \cdot 10^{-3}$
50	$7.337 \cdot 10^{-2}$	$6.753 \cdot 10^{-2}$	$6.501 \cdot 10^{-2}$	$6.346 \cdot 10^{-2}$
100	$8.169 \cdot 10^{-2}$	$7.280 \cdot 10^{-2}$	$6.963 \cdot 10^{-2}$	$6.723 \cdot 10^{-2}$

Таблица 6. Значения числа Маха M для случаев различных Re и различных разбиений сетки при применении модифицированного LBM и схемы D. A. Wolf-Gladrow

Значение Re	50×50 узлов	100×100 узлов	150×150 узлов	200×200 узлов
0.01	$1.225 \cdot 10^{-4}$	$8.114 \cdot 10^{-5}$	$7.925 \cdot 10^{-5}$	$4.145 \cdot 10^{-5}$
1	$1.113 \cdot 10^{-2}$	$5.503 \cdot 10^{-3}$	$5.137 \cdot 10^{-3}$	$4.975 \cdot 10^{-3}$
50	$2.581 \cdot 10^{-1}$	$1.906 \cdot 10^{-1}$	$1.774 \cdot 10^{-1}$	$1.592 \cdot 10^{-1}$
100	$3.834 \cdot 10^{-1}$	$3.538 \cdot 10^{-1}$	$2.518 \cdot 10^{-1}$	$2.287 \cdot 10^{-1}$

Таблица 7. Значения числа Маха M для случаев различных Re и различных разбиений сетки при применении модифицированного LBM и метода переменных направлений

Значение Re	50×50 узлов	100×100 узлов	150×150 узлов	200×200 узлов
0.01	$5.399 \cdot 10^{-4}$	$3.217 \cdot 10^{-4}$	$2.880 \cdot 10^{-4}$	$1.594 \cdot 10^{-4}$
1	$1.813 \cdot 10^{-2}$	$1.653 \cdot 10^{-2}$	$1.475 \cdot 10^{-2}$	$1.414 \cdot 10^{-2}$

В целом, можно отметить, что полученные результаты позволяют говорить о том, что модифицированный LBM для задачи о течении в каверне оказался более предпочтительным, в связи с возможностью проведения расчетов с большим значением шага по времени. Как уже отмечалось выше, метод будет применим только при малых и умеренных значениях Re . Предложенный метод может быть распространен на случай пространственных течений, течений со свободной поверхностью, течений под действием внешних сил и магнитогидродинамических течений.

Список литературы

- Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1984. — 520 с.
- Биколов Д. А., Сенин Д. С., Демин Д. С., Дмитриев А. В., Грачев Н. Е. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 221–228.

- Геллер О. В., Васильев М. О., Холодов Я. А. Построение высокопроизводительного вычислительного комплекса для моделирования задач газовой динамики // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 309–317.
- Грачев Н. Е., Дмитриев А. В., Сенин Д. С. Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 227–231.
- Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А. Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1794–1798.
- Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2004. — 480 с.
- Кривовичев Г. В. О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13. — С. 19–27.
- Кривовичев Г. В. Об устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — С. 1–8.
- Куперитох А. Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13. — С. 130–138.
- Мачин Д. А., Четверушкин Б. Н. Кинетические и lattice Boltzmann схемы // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 3. — С. 87–94.
- Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1972. — 612 с.
- Семенов С. А., Кривовичев Г. В. Численное исследование подходов к реализации граничных условий в методе решеточных уравнений Больцмана // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й международной научной конференции. — СПб.: Издат. дом С.-Петербур. ун-та, 2012. — С. 196–201.
- Семин Л. Г., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье–Стокса // Вычислительные технологии. — 1998. — Т. 3, № 3. — С. 72–84.
- Четверушкин Б. Н. Кинетически-согласованные разностные схемы в газовой динамике. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 232 с.
- Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967. — 197 с.
- Abe T. Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // Journal of Computational Physics. — 1997. — Vol. 131, No 1. — P. 241–246.
- Asinari P., Ohwada T., Chiavazzo E., Rienzo A. F. Link-wise artificial compressibility method // Journal of Computational Physics. — 2012. — Vol. 231. — P. 5109–5143.
- Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. — 1954. — Vol. 94, No 3. — P. 511–525.
- Blaak R., Sloot P. M. A. Lattice dependence of reaction-diffusion in lattice Boltzmann modeling // Computer Physics Communications. — 2000. — Vol. 129. — P. 256–266.
- Chen S., Doolen G. D. Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1998. — Vol. 30. — P. 329–364.
- Chen S., Tolke J., Krafczyk M. A new method for the numerical solution of vorticity–streamfunction formulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Vol. 198. — P. 367–376.
- Cheng M., Yao Q., Luo L. S. Simulation of flow past a rotating circular cylinder near a plane wall // International Journal of Computational Fluid Dynamics. — 2006. — Vol. 20, No 6. — P. 391–400.

- Chorin A.J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // *Journal of Computational Physics*. — 1967. — Vol. 2. — P. 12–26.
- d’Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L.S.* Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions // *Philosophical Transactions of Royal Society of London A*. — 2002. — Vol. 360. — P. 437–451.
- Fares E.* Unsteady flow simulation of the Ahmed reference body using a lattice Boltzmann approach // *Computers and Fluids*. — 2006. — Vol. 35. — P. 940–950.
- Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // *Journal of Computational Physics*. — 1982. — Vol. 48. — P. 387–411.
- Guo Z., Zhao T.S.* Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 66. — P. 036304-1–036304-9.
- He X., Doolen G.D., Clark T.* Comparison of the lattice Boltzmann method and the artificial compressibility method for Navier–Stokes equations // *Journal of Computational Physics*. — 2002. — Vol. 179. — P. 439–451.
- He X., Luo L.S.* Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation // *Journal of Statistical Physics*. — 1997. — Vol. 88, No 3/4. — P. 927–944.
- Hussein M.A., Becker T.* Numerical modelling of shear and normal stress of micro-porous ceramics for stimulated in-vitro cultivation of bone cells // *Microfluidics and Nanofluidics*. — 2010. — Vol. 8. — P. 665–675.
- Le Coupane E., Verschaeve J.C.G.* A mass conserving boundary condition for the lattice Boltzmann method for tangentially moving walls // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2011. — Vol. 81, No 12. — P. 2632–2645.
- Liao Q., Jen T.C.* Numerical simulation of fluid flow and heat transfer in a curved square duct by using the lattice Boltzmann method // *Numerical Heat Transfer, Part A*. — 2008. — Vol. 54. — P. 451–480.
- Luo L.S.* Theory of the lattice Boltzmann method: lattice Boltzmann models for nonideal gases // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 62, No 4. — P. 4982–4996.
- Martinez D.O., Matthaeus W.H., Chen S., Montgomery D.C.* Comparison of spectral method and lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics // *Physics of Fluids*. — 1994. — Vol. 6, No 3. — P. 1285–1298.
- Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2003. — Vol. 29. — P. 117–169.
- Ohwada T., Asinari P.* Artificial compressibility method revisited: asymptotic numerical method for the incompressible Navier–Stokes equations // *Journal of Computational Physics*. — 2010. — Vol. 229. — P. 1698–1723.
- Pan C., Luo L.S., Miller C.T.* An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation // *Computers and Fluids*. — 2006. — Vol. 35. — P. 898–909.
- Rinaldi P.R., Dari E.A., Venere M.J., Clansse A.* A lattice Boltzmann solver for 3D fluid simulation on GPU // *Simulation Modelling Practice and Theory*. — 2012. — Vol. 25. — P. 163–171.
- Schreiber M., Neumann P., Zimmer S., Bungartz H.J.* Free-surface lattice-Boltzmann simulation on many-core architectures // *Procedia Computer Science*. — 2011. — Vol. 4. — P. 984–993.
- Sterling J.D., Chen S.* Stability analysis of lattice Boltzmann methods // *Journal of Computational Physics*. — 1996. — Vol. 123. — P. 196–206.
- Velivelli A.C., Bryden K.M.* Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burger’s equation // *Physica A*. — 2006. — Vol. 362. — P. 139–145.

- Wang J., Wang M., Li Z.* Lattice Poisson–Boltzmann simulations of electro-osmotic flows in microchannels // *Journal of Colloid and Interface Science*. — 2006. — Vol. 296. — P. 729–736.
- Wolf-Gladrow D.A.* A lattice Boltzmann equation for diffusion // *Journal of Statistical Physics*. — 1995. — Vol. 79, No 5–6. — P. 1023–1032.
- Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 311 p.
- Xiong Q.G., Li B., Xu J., Fang X.J., Wang X.W., Wang L.M., He X.F., Ge W.* Efficient parallel implementation of the lattice Boltzmann method on large clusters of graphic processing units // *Computer Science and Technology*. — 2012. — Vol. 57, No 7. — P. 707–715.
- Zhao Z., Huang P., Li Y., Li J.* A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2013. — Vol. 71. — P. 223–248.