

УДК: 519.8

Математическое моделирование стохастических равновесий и бизнес-циклов модели Гудвина

И. А. Башкирцева^a, Е. Д. Екатеринчук^b, Т. В. Рязанова^c,
А. А. Сысолятина^d

Уральский федеральный университет,
Россия, 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51

E-mail: ^a irina.bashkirtseva@usu.ru, ^b ek.ekaterinchuk@gmail.com, ^c tatyana.ryazanova@usu.ru,
^d anna.sysolyatina@usu.ru

Получено 21 ноября 2012 г.,
после доработки 20 декабря 2012 г.

В работе рассматривается модель экономической динамики Гудвина, находящаяся под воздействием случайных возмущений. Проведен полный параметрический анализ равновесий и циклов детерминированной системы. Исследованы вероятностные свойства аттракторов стохастической системы с использованием техники функций стохастической чувствительности и метода прямого численного моделирования. Обсуждается явление генерации стохастических бизнес-циклов в зоне, где исходная детерминированная модель имеет лишь устойчивые равновесия.

Ключевые слова: модель Гудвина, бизнес циклы, случайные возмущения, функция стохастической чувствительности, индуцированные шумом переходы

Mathematical modeling of stochastic equilibria and business cycles of Goodwin model

I. A. Bashkirtseva, E. D. Ekaterinchuk, T. V. Ryazanova, A. A. Sysolyatina

Ural Federal University, 51, Lenina avenue, Ekaterinburg, 620083, Russia

Abstract. — The Goodwin dynamical model under the random external disturbances is considered. A full parametrical analysis for equilibria and cycles of deterministic model is developed. We study probabilistic properties of stochastic attractors using stochastic sensitivity functions technique and numerical methods. A phenomenon of the generation of stochastic business cycles in the zones of stable equilibria is discussed.

Keywords: Goodwin's model, business cycle, random perturbation, stochastic sensitivity function, noise-induced transitions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 107–118 (Russian).

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение № 14.А18.21.0364 и АВЦП № 1.1099.2011, грантом РФФИ № 12-01-31210 и при финансовой поддержке молодых ученых УрФУ в рамках реализации программы развития УрФУ.

1. Введение

Основные экономические и финансовые показатели, такие как валовый внутренний продукт, уровень производства, уровень безработицы, курсы валют, банковские процентные ставки, курсы ценных бумаг и т. д. повсеместно демонстрируют сложную динамику, сочетающую как временную стабилизацию, так и большеамплитудные, зачастую апериодические колебания. Традиционно в экономической динамике исследовались флуктуации вблизи равновесий для линейных моделей [Scarth, 1996; Gandolfo, 1997]. Однако линейные приближения правомерны только для малоамплитудных колебаний и не могут описывать сложные характеристики большеамплитудных и апериодических колебаний. Здесь для понимания природы сложных экономических процессов стали использоваться нелинейные динамические модели и математическая теория бифуркаций [Puу, 1989; Rosser, 1991; Lorenz, 1993; Thomas, 2005; Zhang, 2005].

В сложной экономической динамике наряду с порядком возникает и хаос. Неустойчивые периодические орбиты как основа хаотических аттракторов рассматривалась в ряде работ [Hilborn, 1994; Szabo, 2000; Chian, 2007; Jakimowicz, 2009]. Одним из новых активно развивающихся направлений современной теоретической экономики является эконофизика [Романовский, Романовский, 2012; Чернавский и др., 2011], использующая развитые методы нелинейной динамики и теории вероятности.

В работах [Трубецков, 2004; Трубецков, 2006] продемонстрировано, как канонические примеры известных систем нелинейной динамики могут использоваться в математическом моделировании колебательных процессов в экономике. Показано, как математический аппарат теории бифуркаций систем дифференциальных уравнений может быть использован в анализе динамики базовых экономических показателей.

Предельные циклы являются основным элементом теории нелинейных динамических систем и ключом к пониманию происхождения и природы колебательных явлений в экономике. Одной из первых моделей макроэкономических циклов является модель Гудвина [Goodwin, 1951]. Эта модель и ее различные модификации до сих пор эффективно применяются при исследовании механизмов развития экономических процессов, характеризующихся цикличностью.

Детальный анализ модели Гудвина и его свойств был проведен в работе [Strotz, 1953]. Обобщенная форма этой модели была дана Лоренцем [Lorenz, 1993]:

$$\ddot{x}(t) + A(x(t))\dot{x}(t) + B(x(t)) = O^*(t),$$

где x — отклонение дохода от равновесия, $A(x)$ — четная функция с условиями $A(0) < 0$, $A''(0) > 0$, $B(x)$ — нечетная функция с условием $B(0) = 0$, $O^*(t)$ — функция издержек.

В своих исследованиях Lorenz и Nusse [Lorenz, Nusse, 2002] предложили конкретный вид функций $A(x)$ и $B(x)$

$$\ddot{x} + a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \dot{x}(t) - bx + cx^3 = O^*(t).$$

Функцию $O^*(t)$ можно трактовать как некоторое внешнее воздействие. В случае, когда это воздействие отсутствует ($O^*(t) \equiv 0$), в этой системе наблюдается устойчивый предельный цикл. Если $O^*(t)$ — периодическая функция, то модель демонстрирует переходы от регулярных колебаний к хаотическим [Lorenz, Nusse, 2002]. Различные модификации модели Гудвина исследовались в работах (см. например [Yoshida, 2007; Li, 2011; Cao, 2011]). Несомненный интерес представляет анализ модели, когда $O^*(t)$ является случайной функцией.

В данной статье рассматривается стохастическая модель экономической динамики Гудвина, задаваемая дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \dot{x} - bx + cx^3 = \varepsilon \dot{w}(t), \quad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, w — стандартный винеровский процесс, ε — интенсивность шума.

Раздел 2 данной статьи посвящен анализу соответствующей детерминированной модели ($\varepsilon = 0$), построена бифуркационная диаграмма, подробно описаны параметрические зоны для равновесий и исследована устойчивость аттракторов модели.

В разделе 3 приведен краткий обзор аппарата функции стохастической чувствительности (ФСЧ).

В разделе 4 подробно изучается стохастическая модель Гудвина. Здесь с помощью аппарата ФСЧ исследуются стохастические аттракторы модели.

В разделе 5 описан эффект вызванной шумом генерации бизнес-циклов в зоне параметров, где исходная детерминированная система имеет лишь устойчивые равновесия. Это явление приводит к качественному изменению формы плотности распределения (P -бифуркации [Arnold, 1998]).

2. Анализ детерминированной модели

Запишем детерминированную модель Гудвина (1) ($\varepsilon = 0$) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} y + bx - cx^3. \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) существуют три равновесия $M_0(0, 0)$, $M_1\left(\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right)$, $M_2\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right)$. Они лежат на оси Ox и имеют абсциссы, не зависящие от параметра a . Равновесия M_1 , M_2 симметричны относительно M_0 .

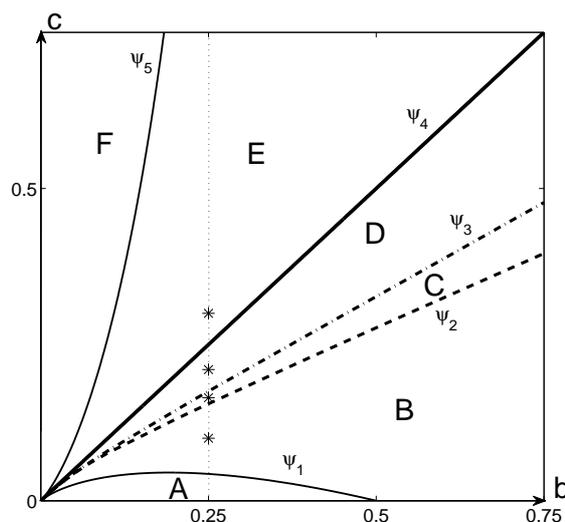
Классический анализ устойчивости равновесий основывается на системе первого приближения, матрица которой для (2) имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} f'_x(\bar{x}, \bar{y}) & f'_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g'_x(\bar{x}, \bar{y}) & g'_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix},$$

где \bar{x}, \bar{y} — координаты равновесия и

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y, & g(x, y) &= -a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} y + bx - cx^3, \\ f'_x(x, y) &= 0, & g'_x(x, y) &= -a \frac{4xy}{(x^2 + 1)^2} + b - 3cx^2, \\ f'_y(x, y) &= 1, & g'_y(x, y) &= -a \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Проведенный анализ показывает, что равновесие $M_0(0, 0)$ при любых значениях параметров является седлом. Это означает, что взятое за точку отсчета равновесие переменной дохода всегда неустойчиво. Такая неустойчивость является внутренней причиной, порождающей в исследуемой экономической системе другие типы функционирования, связанные с нетривиальными равновесиями M_1 , M_2 и возможными автоколебаниями вокруг них. Математический анализ таких режимов связан с исследованием типов фазовых портретов и их бифуркаций. Локальные фазовые портреты равновесий M_1 , M_2 имеют один тип. Их параметрическое описание представлено в сводной бифуркационной диаграмме (рис. 1).

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма при $a = 2$

Здесь для $a = 2$ представлены следующие зоны: A — устойчивый узел, $B \cup C \cup D$ — устойчивый фокус, E — неустойчивый фокус, F — неустойчивый узел. Три границы, разделяющие зоны, имеют следующие аналитические представления:

$$\psi_1(a, b) = \frac{b}{a^2 - 8b}(a^2 + 8b - 4a\sqrt{2b}),$$

$$\psi_4(a, b) = b,$$

$$\psi_5(a, b) = \frac{b}{a^2 - 8b}(a^2 + 8b + 4a\sqrt{2b}).$$

Граница $c = \psi_2(a, b)$ (пунктирная линия) соответствует бифуркационной кривой, отвечающей жесткому рождению полуустойчивого цикла, а граница $c = \psi_3(a, b)$ — разделению одного неустойчивого цикла на два. Функции $\psi_2(a, b)$ и $\psi_3(a, b)$, не имеющие аналитического представления, были найдены численными методами. При фиксированном значении параметра $b = 0.25$ и увеличении параметра c происходят следующие изменения фазового портрета:

- $A \rightarrow B$: два устойчивых узла преобразуются в фокусы,
- $B \rightarrow C$: вокруг равновесий жестко рождается полуустойчивый цикл, который расщепляется на внешний устойчивый и внутренний неустойчивый, разделяющий бассейны притяжения устойчивого цикла и равновесий M_1 и M_2 ,
- $C \rightarrow D$: неустойчивый цикл расщепляется на два неустойчивых меньшего размера, охватывающих равновесия M_1 и M_2 соответственно,
- $D \rightarrow E$: оба неустойчивых цикла сливаются с равновесиями M_1 и M_2 , которые теряют устойчивость, и единственным аттрактором системы остается устойчивый цикл,
- $E \rightarrow F$: неустойчивые фокусы преобразуются в неустойчивые узлы, цикл остается устойчивым.

На рисунке 2 для характерных значений параметров, отмеченных звездочками на рисунке 1, представлены фазовые портреты, где жирной сплошной линией изображен устойчивый цикл, пунктиром — неустойчивые циклы, тонкими сплошными — фазовые траектории, кружками — устойчивые равновесия, окружностями — неустойчивые равновесия.

На рисунке 3 (сверху) демонстрируется зависимость размера аттракторов системы (2) от параметра c . Здесь представлены x -координаты аттракторов: сплошная жирная линия отражает

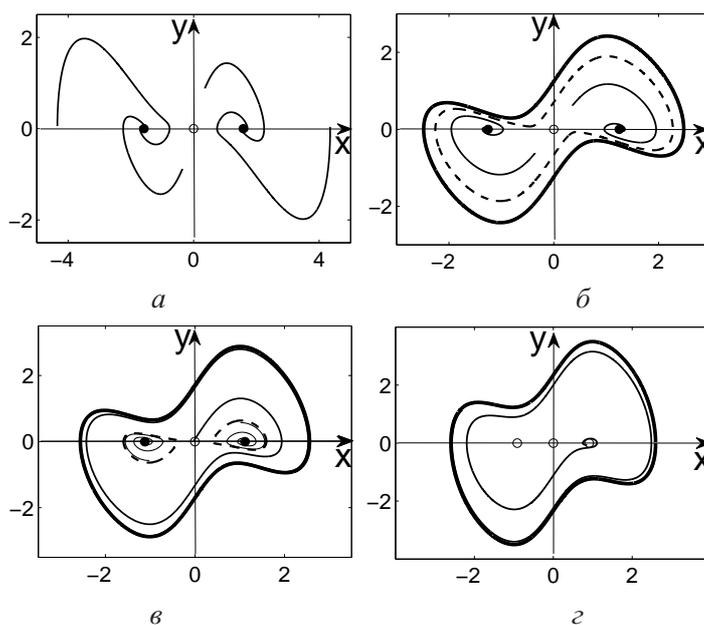


Рис. 2. Фазовые траектории системы для $a = 2, b = 0.25$ при а) $c = 0.1$, б) $c = 0.16$, в) $c = 0.2$ и г) $c = 0.3$

изменение координат устойчивых равновесий, точки — неустойчивых равновесий, тонкая сплошная — экстремальных значений устойчивого цикла, пунктир — экстремальных значений неустойчивых циклов. Бифуркационными значениями являются $c_1 = 0.155332, c_2 = 0.174635$ и $c_3 = 0.25$. Значение c_1 соответствует рождению полуустойчивого цикла, c_2 — расщеплению неустойчивого цикла на два, а c_3 — потере устойчивости равновесий M_1, M_2 . Также можно заметить, что устойчивый цикл практически не меняет своего размера по оси Ox .

На рисунке 3 (снизу) представлены зависимости характеристических показателей Ляпунова для детерминированных аттракторов системы (2) при изменении параметра c и фиксированных $a = 2, b = 0.25$. Здесь сплошной жирной линией выделен характеристический показатель устойчивых равновесий, точками — неустойчивых равновесий, тонкой сплошной линией — устойчивого цикла, пунктиром — неустойчивых циклов.

Как видим из рисунке 3 (снизу), при стремлении c к c_3 слева степень устойчивости равновесий M_1, M_2 уменьшается. При увеличении c от c_1 сначала происходит резкое увеличение степени устойчивости предельного цикла, а затем значение его характеристического показателя стабилизируется.

С экономической точки зрения полученные результаты означают следующее. В данной системе динамика дохода существенно зависит как от параметра c , так и от начальных значений динамических переменных $x_0, y_0 = \dot{x}_0$. Действительно, при $0 < c < c_1$ в зависимости от начальных значений доход стремится к одному из двух нетривиальных равновесных значений, связанных с M_1 или M_2 . В зоне $c_1 < c < c_3$ при определенных начальных условиях возможен еще один, третий тип динамики — устойчивые колебания фиксированной частоты и амплитуды. При $c > c_3$ устойчивые равновесные режимы исчезают и в системе остается только устойчивый бизнес-цикл.

Функционирование любой экономической системы всегда сопровождается случайными возмущениями как внешними (аддитивными), так и внутренними (параметрическими). Присутствие случайного фактора всегда приводит к деформации режимов динамического поведения исходной детерминированной модели.

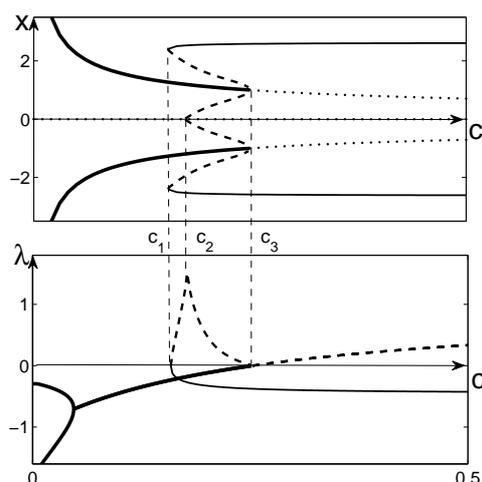


Рис. 3. Экстремумы по x и характеристический показатель аттракторов для $a = 2, b = 0.25$ при изменении c

В данной работе исследование случайных воздействий на динамику модели Гудвина опирается на технику функций стохастической чувствительности.

3. Аппарат функции стохастической чувствительности

Стандартной моделью динамической системы со случайными возмущениями является стохастическая система уравнений Ито [Хасьминский, 1969]

$$dx = f(x) dt + \varepsilon \sigma(x) dw(t). \quad (3)$$

Здесь $f(x)$ — достаточно гладкая n -вектор-функция, $\sigma(x)$ — достаточно гладкая $n \times n$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, $w(t)$ — n -мерный стандартный винеровский процесс, ε — параметр интенсивности возмущений. Предполагается, что соответствующая детерминированная система (3) ($\varepsilon = 0$) имеет экспоненциально устойчивый аттрактор.

В результате действия шумов случайные траектории системы (3) покидают детерминированный аттрактор и формируют некоторый стохастический аттрактор со стационарным распределением $\rho(x, \varepsilon)$. Функция $\rho(x, \varepsilon)$ удовлетворяет стационарному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК). Непосредственное использование этого уравнения уже для двумерных систем является технически трудной задачей. В этих обстоятельствах, широко используются асимптотики [Вентцель, Фрейдлин, 1979], основанные на функции квазипотенциала $v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon)$. В случае малых шумов с помощью квазипотенциала можно записать асимптотику стационарной плотности как

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp\left(-\frac{v(x)}{\varepsilon^2}\right).$$

Конструктивный подход к аппроксимации квазипотенциала вблизи детерминированного аттрактора рассматривался в [Мильштейн, Ряшко, 1995].

В простейшем случае, когда аттрактором является точка покоя \bar{x} , для квазипотенциала используется квадратичная аппроксимация $v(x) \approx \frac{1}{2}(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))$. Эта аппроксимация позволяет

представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W$.

Положительно определенная матрица W — матрица стохастической чувствительности — является решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^T = -S, \tag{4}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^T, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы (3) вокруг равновесия \bar{x} .

Теперь рассмотрим случай, когда детерминированным аттрактором является предельный цикл, задаваемый T -периодическим решением $x = \xi(t)$. Пусть Π_t — гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$. В этом случае с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазитенциала вблизи цикла для сечения Пуанкаре Π_t можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho_t(x, \varepsilon) = K \exp\left(-\frac{(x - \xi(t))^T W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2}\right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$.

Матрица $W(t)$, играющая роль функции стохастической чувствительности цикла, является решением краевой задачи

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \quad W(t+T) = W(t), \quad W(t)r(t) = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^T(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \quad r(t) = f(\xi(t)), \quad P(t) = P_{r(t)}, \quad P_r = I - \frac{rr^T}{r^T r}.$$

Система (5), благодаря экспоненциальной устойчивости цикла, имеет единственное решение [Bashkirtseva, Ryashko, 2004].

В случае цикла на плоскости матрицы $W(t)$ и $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = m(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^T(t).$$

Здесь $p(t)$ — нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$, а $m(t) > 0$ — T -периодическая скалярная функция, задающая разброс (дисперсию) пучка по нормали к циклу.

Функция $m(t)$ [Bashkirtseva, Ryashko, 2000; Башкирцева, Перевалова, 2007] удовлетворяет краевой задаче

$$\dot{m} = a(t)m + b(t), \quad m(0) = m(T) \tag{6}$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^T(t)S(t)p(t).$$

Функция $m(t)$ определяет локальную стохастическую чувствительность цикла в точке $\xi(t)$. Удобной характеристикой стохастического цикла в целом является коэффициент стохастической чувствительности $M = \max_{(0,T)} m(t)$.

4. Стохастическая модель Гудвина

Для изучения влияния случайных возмущений на динамику модели Гудвина перейдем к стохастической системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a\frac{x^2-1}{x^2+1}y + bx - cx^3 + \varepsilon\dot{w}, \end{cases} \quad (7)$$

где w — стандартный винеровский процесс, моделирующий случайные внешние воздействия, ε — интенсивность шума. Траектории системы (7) под действием случайных возмущений покидают детерминированный аттрактор (равновесия или цикл) и формируют вокруг него некоторый пучок. При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора увеличивается. В данной статье представлены результаты исследования влияния шума на аттракторы системы и вызванные этим шумом качественные изменения динамики модели. Здесь и далее зафиксируем два параметра детерминированной системы $a = 2$ и $b = 0.25$.

В первую очередь рассмотрим случай стохастического равновесия на интервале изменения параметра $0 < c < c_3$. На рисунке 4 при одном и том же значении интенсивности $\varepsilon = 0.01$ представлены стохастические траектории системы (7) вблизи равновесия M_1 для $c = 0.22$ (слева) и $c = 0.05$ (справа). Здесь экономическая система демонстрирует случайные флуктуации малой амплитуды вокруг нетривиальных равновесий. Как легко заметить, разброс случайных состояний существенно зависит от параметра c . Аппарат функции стохастической чувствительности позволяет аналитически описать этот эффект, полученный численно.

Для стохастических равновесий M_1 и M_2 модели (7) матрица стохастической чувствительности, найденная из (4), имеет диагональный вид

$$W = \begin{pmatrix} \frac{c+b}{4ab(b-c)} & 0 \\ 0 & \frac{c+b}{2a(b-c)} \end{pmatrix}.$$

На интервале $0 < c < c_3$ структурной устойчивости равновесий, зависимость диагональных элементов $w_1 = \frac{c+b}{4ab(b-c)}$ и $w_2 = \frac{c+b}{2a(b-c)}$ матрицы W от параметра c представлена на рисунке 5. Как видно, стохастическая чувствительность равновесий при приближении параметра c к бифуркационному значению $c_3 = 0.25$ монотонно возрастает и стремится к бесконечности.

При $c > c_1$ вокруг детерминированного устойчивого цикла формируется пучок случайных состояний. Ширина этого пучка вдоль цикла неравномерна. Это означает, что стохастическая чувствительность отдельных участков цикла может существенно меняться. Функция стохастической чувствительности позволяет детально описать это явление. На рисунке 6 представлены стохастический цикл для $c = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ и соответствующий ему график функции стохастической чувствительности $m(t)$, полученный численным решением задачи (6). Заметим, что на цикле есть два наиболее чувствительных участка: на графике $m(t)$ им соответствуют высокие узкие пики. Как видим, здесь доход демонстрирует сложное колебательное движение, сочетающее детерминированную и стохастическую компоненты.

На рисунке 7 представлен график зависимости коэффициента стохастической чувствительности M от параметра c . Аналогично случаю стохастического равновесия здесь наблюдается неограниченный рост стохастической чувствительности при стремлении параметра c к значению c_1 справа. При увеличении параметра c коэффициент чувствительности M монотонно стремится к нулю, что свидетельствует об уменьшении стохастической чувствительности цикла.

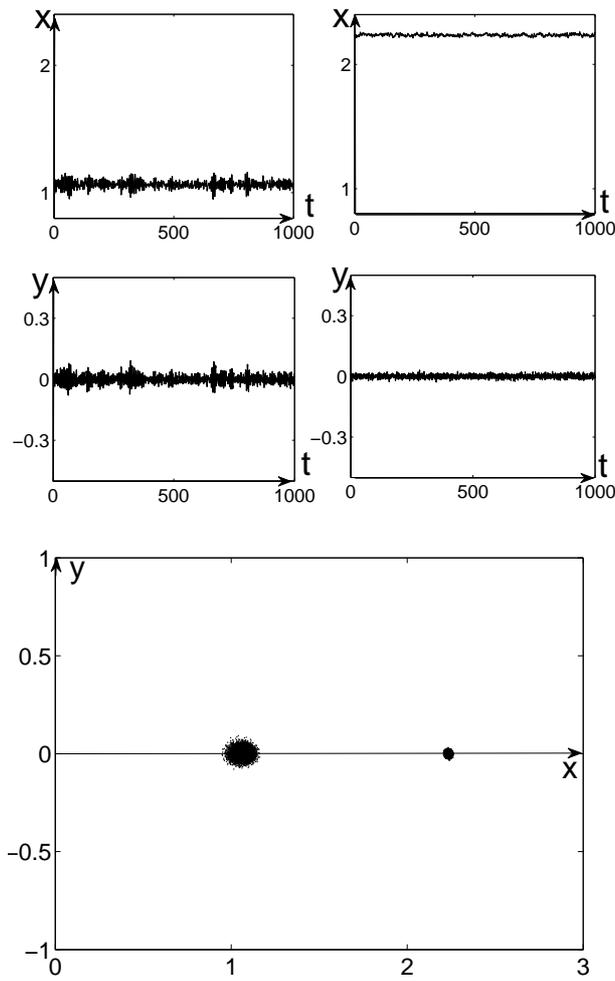


Рис. 4. Стохастическое равновесие при $a = 2$, $b = 0.25$ и $\varepsilon = 0.01$ для $c = 0.22$ (слева) и $c = 0.05$ (справа)

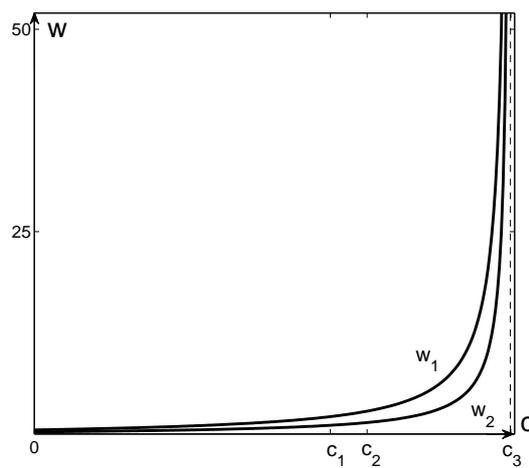


Рис. 5. Коэффициент стохастической чувствительности равновесия при $a = 2$, $b = 0.25$

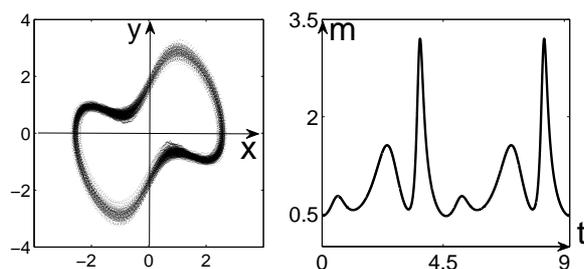


Рис. 6. Стохастический цикл для $a = 2$, $b = 0.25$, $c = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ и функция стохастической чувствительности цикла

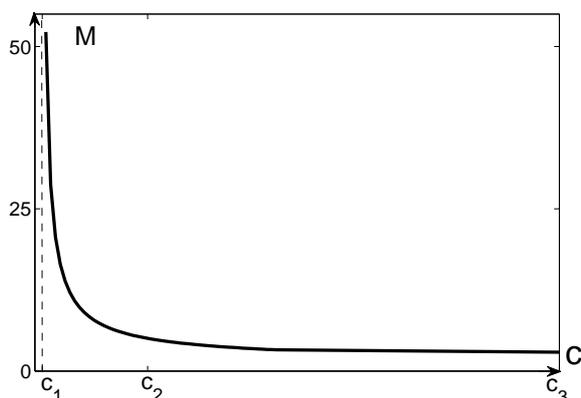


Рис. 7. Коэффициент стохастической чувствительности цикла $a = 2$, $b = 0.25$ при изменении c

5. Индуцированные шумом переходы

Рост интенсивности случайных возмущений приводит не только к количественным изменениям, сопровождающимся увеличением разброса случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов, но и может порождать различные качественные эффекты. Рассмотрим зону параметров, где детерминированная система (7) имеет в качестве аттракторов лишь два устойчивых равновесия. На рисунках 8, а, б для $c = 0.15$ представлены случайные состояния и траектории $x(t)$ системы (2) под действием шумов различной интенсивности: $\varepsilon = 0.05$ (слева) и $\varepsilon = 0.3$ (справа).

В рассматриваемом случае при увеличении интенсивности шума наряду с увеличением разброса случайных состояний вокруг M_1 и M_2 наблюдаются и качественные изменения. Эти изменения сопровождаются деформацией стационарной плотности распределения (рис. 8, в). При малом шуме, случайные состояния локализуются вблизи детерминированных равновесий M_1 и M_2 (рис. 8, а слева). В этом случае функция распределения имеет два острых пика. При дальнейшем увеличении интенсивности шума форма графика стационарной плотности преобразуется в кратероподобную. Случайные траектории под действием шума покидают бассейны притяжения детерминированных равновесий и проходят через области фазовой плоскости, достаточно удаленные от этих равновесий (рис. 8, а справа). При этом случайные состояния концентрируются вдоль некоторой замкнутой кривой, форма которой близка к форме детерминированного цикла, возможного лишь при $c > c_1$. На рисунке 8, б показаны траектории переменной x по времени для двух этих режимов. В случае малого шума случайные траектории концентрируются

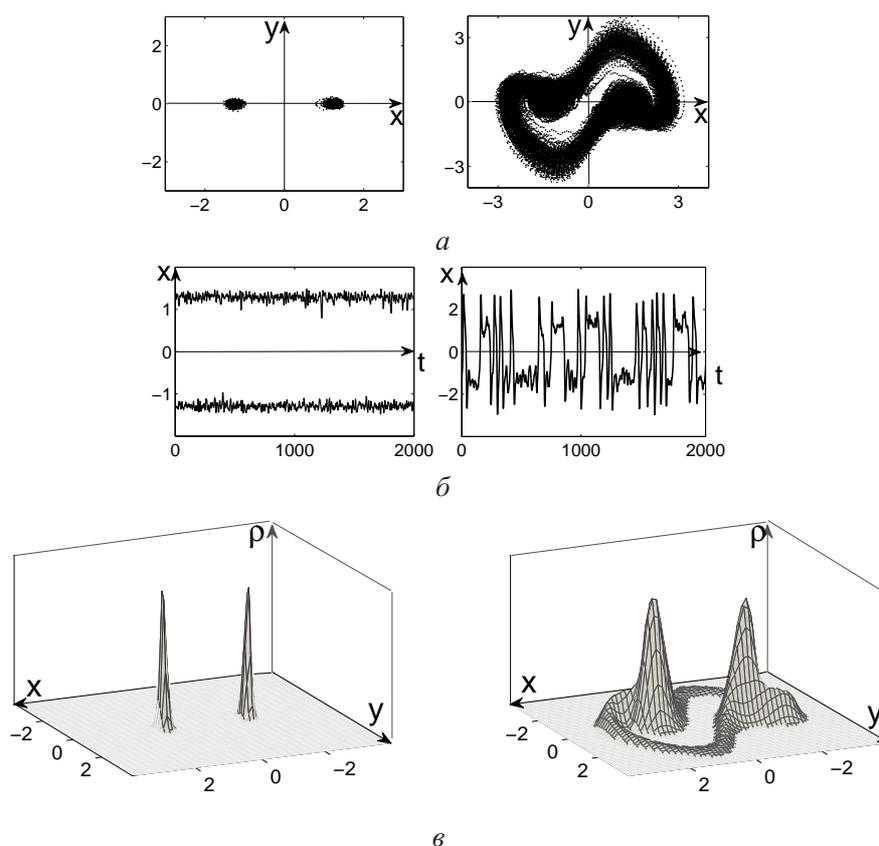


Рис. 8. Индуцированный шумом переход при $a = 2$, $b = 0.25$, $c = 0.15$ при $\varepsilon = 0.05$ (слева) и $\varepsilon = 0.3$ (справа)

вокруг детерминированных равновесий, переходов между которыми нет (рис. 8, б). Увеличение шума приводит к переходам случайных траекторий между равновесиями M_1 и M_2 .

Можно сказать, что при достаточно большом шуме в модели Гудвина сочетаются колебания малой амплитуды вокруг устойчивых равновесий и колебания большой амплитуды — стохастический цикл. Такое качественное изменение стохастической динамики (P -бифуркация) может быть интерпретировано как вызванная шумом генерация бизнес-цикла в зоне, где исходная детерминированная модель имеет лишь устойчивые равновесия.

Авторы признательны Ряшко Л. Б. за плодотворные обсуждения материалов работы.

Список литературы

- Баширцева И. А., Первалова Т. В. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя — цикл // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 10. — С. 53–69.
- Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 1979.
- Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика, 1995. — Т. 59, № 1. — С. 53–63.
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М. Введение в эконофизику: статистические и динамические модели. — ИКИ, 2012.
- Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. — М: Едиториал УРСС, 2004.

- Трубецков Д. И.* Канонические модели нелинейной динамики в экономике // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2006. — Т. 14, № 2. — С. 75–93.
- Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
- Чернавский Д. С., Старков Н. И., Малков С. Ю., Косе Ю. В., Щербаков А. В.* Об эконофизике и её месте в современной теоретической экономике // УФН. — 2011. — Vol. 181:7. — С. 767–773.
- Arnold L.* Random Dynamical Systems. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
- Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. — 2004. — V. 66. — P. 55–67.
- Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // Physica A. — 2000. — V. 278. — P. 126–239.
- Cao J., Jiang H.* Stability and Hopf bifurcation analysis on Goodwin model with three delays // Chaos, Solutions and Fractals. — 2011. — No. 44. — P. 613–618.
- Chian A. C. L.* Complex Systems Approach to Economic Dynamics. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- Gandolfo G.* Economic dynamics. — Berlin: Springer, 1997.
- Goodwin R. M.* The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles // Econometrica. — 1951. — Vol. 19, No. 1. — P. 1–17.
- Hilborn R. C.* Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. — New York: Oxford University Press, 1994.
- Jakimowicz A.* Catastrophes and chaos in business cycle theory. — Proceedings of the 4th Polish symposium on Econo- and Sociophysics, Rzeszow, Poland, May 2009.
- Li S., Li Q., Li J., Feng J.* Chaos prediction and control of Goodwin's nonlinear accelerator model // Nonlinear analysis: Real world applications. — 2011. — No. 12. — P. 1950–1960.
- Lorenz H. W.* Nonlinear dynamical economics and chaotic motion, 2nd ad. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1993.
- Lorenz H. W., Nusse H. E.* Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered // Chaos, Solutions and Fractals. — 2002. — No. 13. — P. 957–965.
- Puu T.* Nonlinear economic dynamics. Lecture notes in economics and mathematical systems. — Berlin: Springer-Verlag, 1989. — Vol. 336.
- Rosser J. B.* From catastrophe to chaos: a general theory of economic discontinuities. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Rosser J. B.* Chaos theory before Lorenz // Nonlinear dynamics psychology and life sciences. — 2009. — Vol. 13, No. 3. — P. 257–269.
- Scarth W. M.* Macroeconomics: an introduction to advanced methods. — Toronto: Dryden, 1996.
- Strotz R. H., McAnulty J. C., Naines J. B.* Goodwin's nonlinear theory of the business cycle: An electro-analog solution // Econometrica. — 1953. — Vol. 21, No. 3. — P. 390–411.
- Szabo K. G., Lai Y-C., Tel T., Grebogi C.* Topological gap filling at crisis // Phys Rev E. — 2000. — No. 61. — P. 5019–5032.
- Thomas L., Reitz S., Samanidou E., editors* Nonlinear dynamics and heterogeneous interacting agents. Lecture notes in economics and mathematical systems. — Berlin: Springer, 2005. — Vol. 550.
- Yoshida H., Asada T.* Dynamic analysis of policy lag in a Keynes-Goodwin model: Stability, instability, cycles and chaos // Journal of Economic Behavior and Organization. — 2007. — Vol. 62, No. 3. — P. 441–469.
- Zhang W-B.* Differential equations, and chaos in economics // Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. World Scientific. — 2005. — Vol. 68.