**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2013 Т. 5 № 1 С. 3−10**

Ки&М

УДК: 517.93

Метод Галёркина–Петрова для одномерных параболических уравнений высокого порядка в областях с меняющейся границей

П. В. Виноградова[1,a], А.Г. Зарубин[2], А. М. Самусенко[1]

[1] Дальневосточный государственный университет путей сообщения,
Россия, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, д. 47

[2] Тихоокеанский государственный университет,
Россия, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, д. 136

E-mail: [a] vpolina17@hotmail.com

Получено 30 января 2013 г.

Исследуется начально-краевая задача для параболических уравнений высокого порядка в областях с переменной границей. Устанавливается возможность применения метода Галёркина–Петрова, и находятся асимптотические оценки скорости сходимости приближённых решений к точным.

Ключевые слова: начально-краевая задача, параболическое уравнение, метод Галёркина–Петрова, сходимость, скорость сходимости

Galerkin–Petrov method for one-dimensional parabolic equations of higher order in domain with a moving boundary

P.V. Vinogradova[1], **A.G. Zarubin**[2], **A.M. Samusenko**[1]

[1] *Far Eastern State Transport University, 680021, Khabarovsk, Serisheva 47, Russia*
[2] *Pacific National University, 680035, Khabarovsk, Tihookeanskaja 136, Russia*

Abstract. — In the current paper, we study a Galerkin–Petrov method for a parabolic equations of higher order in domain with a moving boundary. Asymptotic estimates for the convergence rate of approximate solutions are obtained.

Keywords: initial boundary value problem, parabolic equation, Galerkin–Petrov method, convergence, convergence rate

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 3–10 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-98506-р-восток-а).

1. Постановка задачи. Основной результат

Метод Галёркина–Петрова основан на выборе элементов двух координатных систем, причём приближённое решение находится в виде линейной комбинации по одной базисной системе, а невязка ортогональна другой базисной системе [Петров, 1940]. Если две системы связаны между собой посредством линейного оператора, то данный метод называется методом моментов. Исследованию данного проекционного метода посвящено достаточно большое количество работ, укажем, например, статьи [Дауговет, 1965; Вайникко, 1968], которые посвящены исследованию метода моментов решения краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучению метода моментов для линейных и квазилинейных операторных уравнений посвящены работы [Зарубин, 1978, 1987].

В данной статье исследуется метод моментов для линейных одномерных параболических уравнений в областях, граница которых меняется со временем.

Рассмотрим в R^2 криволинейную трапецию D с образующими параллельными оси Ox и ограниченными кривыми $\mathrm{x}=\psi(\mathrm{t}), \mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t}), 0\le t\le T$. Будем предполагать, что функции $\psi(t)$ и $\phi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, причём $0<\mu\le\varphi(t)-\psi(t)$.

В области D рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}+(-1)^m\frac{\partial^{2m}\mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^{2m}}+\sum_{j=0}^{r}a_j(x,t)\frac{\partial^j\mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^j}=f(x,t),\ \ 0\le r\le 2m-1, \tag{1}$$

$$\mathrm{u}(\psi(\mathrm{t}),\mathrm{t})=\mathrm{u}(\varphi(\mathrm{t}),\mathrm{t})=\ldots=\frac{\partial^{m-1}\mathrm{u}(\psi(\mathrm{t}),\mathrm{t})}{\partial x^{m-1}}=\frac{\partial^{m-1}\mathrm{u}(\varphi(\mathrm{t}),\mathrm{t})}{\partial x^{m-1}}=0, \tag{2}$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0)=0,\psi(0)\le x\le\varphi(0). \tag{3}$$

Для дальнейшего исследования задачи (1)–(3) нам потребуются пространства $\mathrm{W}_2^{2\mathrm{m},1}(D), L_P(D),$ определение которых можно найти, например, в [Ладыженская, Солонников, Уральцева, 1967].

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим в цилиндре $\overline{\mathrm{Q}}=\{(\xi,\mathrm{t}), 0\le\xi\le 1, 0\le t\le T\}$ задачу

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}+(-1)^m a(t)\frac{\partial^{2m}\mathrm{v}}{\partial\xi^{2m}}+\sum_{j=0}^{r}b_j(\xi,t)\frac{\partial^j\mathrm{v}}{\partial\xi^j}=f_1(\xi,t), \tag{4}$$

$$\mathrm{v}(0,\mathrm{t})=\mathrm{v}(1,\mathrm{t})=\ldots=\frac{\partial^{m-1}\mathrm{v}(0,\mathrm{t})}{\partial\xi^{m-1}}=\frac{\partial^{m-1}\mathrm{v}(1,\mathrm{t})}{\partial\xi^{m-1}}=0, \tag{5}$$

$$\mathrm{v}(\xi,0)=0,\ 0\le\xi\le 1, \tag{6}$$

где функции $\mathrm{a(t)}, \mathrm{b}_j(\xi,t)$ непрерывны в $\overline{Q}$, причём $a(t)\ge\mu_1>0$ для всех $t\in[0,T]$. Пусть $f_1(\xi,t)$ принадлежит $L_2(Q),$ тогда задача (4)–(6) имеет решение $v(\xi,t)$ из $W_2^{2m,1}(Q)$ и оно единственно (см. [Ладыженская, Солонников, Уральцева, 1967]).

Предположим, что выполняются равенства

$$b_j(\xi,t)=\frac{a_j(\xi(\varphi(t)-\psi(t))+\psi(t),t)}{(\varphi(t)-\psi(t))^j},\quad j=0,1,2,\ldots,r,\quad a(t)=\frac{1}{(\varphi(t)-\psi(t))^{2m}}, \tag{7}$$
$$f_1(\xi,t)=f(\xi(\varphi(t)-\psi(t))+\psi(t),t),$$

$\xi=\dfrac{x-\psi(t)}{(\phi(t)-\psi(t))}$, $(\xi,t)\in Q$, и $v(\xi,t)$ — решение задачи (4)–(6) из пространства $W_2^{2m,1}(Q)$. Тогда функция $u(x,t)=v\left(\dfrac{x-\psi(t)}{\phi(t)-\psi(t)},t\right)$ принадлежит пространству $W_2^{2m,1}(D)$ и является решением задачи (1)–(3).

На пространстве $H_1 = W_2^{2m}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{m}(0,1)$ определим линейные операторы $A(t)$ и $K(t)$ равенствами

$$A(t)z(\xi) = \frac{(-1)^m}{(\varphi(t)-\psi(t))^{2m}} \frac{d^{2m}z(\xi)}{d\xi^{2m}},$$

$$K(t)z(\xi) = \sum_{j=0}^{r} b_j(\xi,t) \frac{\partial^j z(\xi)}{\partial \xi^j}.$$

Тогда задача (4)–(6) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A(t)v + K(t)v = f_1(\xi,t), \tag{8}$$

$$v(\xi,0) = 0. \tag{9}$$

Известно, что система функций $\{\sin(s\pi\xi)\}_{s=1}^{\infty}$ является полной ортогональной системой в $L_2(0,1)$. Рассмотрим функции $\varphi_s(\xi)$, которые являются решением задачи

$$\frac{d^{2m}\varphi_s(\xi)}{d\xi^{2m}} = \sin(s\pi\xi),$$

$$\varphi_s(0) = \varphi_s(1) = \ldots = \frac{d^{m-1}\varphi_s(0)}{d\xi} = \frac{d^{m-1}\varphi_s(1)}{d\xi}.$$

Очевидно, что функции $\varphi_s(\xi)$ можно выписать в явном виде.

Пусть P_n — ортопроектор в $L_2(0,1)$ на линейную оболочку функций $e_s(\xi) = \sin(s\pi\xi)$, $s = 1,\ldots,n$. Согласно методу моментов, приближённое решение задачи (8)–(9) находим в виде конечной суммы $v_n(\xi,t) = \sum_{s=1}^{n} c_s(t)\varphi_s(\xi)$, где неизвестные коэффициенты $c_s(t)$ являются решениями задачи Коши

$$P_n \frac{\partial v_n}{\partial t} + P_n A(t)v_n + P_n K(t)v_n = P_n f_1(\xi,t), \tag{10}$$

$$v_n(\xi,0) = 0. \tag{11}$$

Тогда функцию $u_n(x,t) = v_n\left(\dfrac{x-\psi(t)}{\varphi(t)-\psi(t)}, t\right)$ назовём решением задачи (1)–(3), построенным по методу моментов, если выполнены равенства (7).

В дальнейшем через M_i будем обозначать различные положительные постоянные, не зависящие от n и t. Норму в $\mathrm{L}_2(0,1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$.

Теорема 1. *Пусть функция* $\mathrm{f}_1(\xi,t) \in L_2(Q), \mathrm{f}_1(\xi,0) = 0$ *и имеет производную* $\dfrac{\partial f_1(\xi,t)}{\partial t}$ из $L_2(Q)$. *Пусть функции* $\phi(t)$, $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[0,T]$, *а функции* $b_j(\xi,t)$ *имеют непрерывную производную* $\dfrac{\partial b_j(\xi,t)}{\partial t}$. *Пусть коэффициенты* $b_j(\xi,t)$ *такие, что*

$$\left(K(t)z, z\right)_{L_2(0,1)} \geq 0 \tag{12}$$

для любой функции $z(\xi)$ *из* H_1. *Тогда*

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|v_n(\xi,t)-v(\xi,t)\right\|\le M_1 n^{-m+\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Доказательство. Умножим (10) скалярно на $\dfrac{\partial^{2m}v_n(\xi,t)}{\partial\xi^{2m}}$ и проинтегрируем по t от 0 до $\zeta(\zeta\le T)$, тогда

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{\mathrm{m}}v_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi^m}\right\|^2+\mu_1\int_0^\zeta\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi^{2m}}\right\|^2dt\le\int_0^\zeta\left\|K(t)v_n\right\|\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n}{\partial\xi^{2m}}\right\|dt+\left\|f_1\right\|_{L_2(Q)}\left(\int_0^\zeta\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n}{\partial\xi^{2m}}\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

где $\mu_1=\left(\sup(\varphi(t)-\psi(t))^{2m}\right)^{-1}$. Так как функции $b_j(\xi,t)$ непрерывны в Q, то

$$\left\|K(t)v_n\right\|\le M_2\left\|v_n\right\|_{W_2^r(0,1)}. \tag{15}$$

Применим к правой части мультипликативное неравенство (см. [Глушко, Крейн, 1960]) для пространств $W_2^r(0,1), W_2^{2m}(0,1)$ и $L_2(0,1)$. Тогда из (15) получаем

$$\left\|K(t)v_n\right\|\le M_3\left\|v_n\right\|_{W_2^{2m}}^{\frac{r}{2m}}\left\|v_n\right\|^{1-\frac{r}{2m}}\le M_4\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n}{\partial\xi^{2m}}\right\|^{\frac{r}{2m}}\left\|v_n\right\|^{1-\frac{r}{2m}}. \tag{16}$$

Отсюда и из (14) следует оценка

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{\mathrm{m}}v_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi^m}\right\|^2+\mu_1\int_0^\zeta\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi^{2m}}\right\|^2dt\le M_5\left(\int_0^\zeta\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n}{\partial\xi^{2m}}\right\|^{\left(1+\frac{r}{2m}\right)}\left\|v_n\right\|^{1-\frac{r}{2m}}\right)dt++\left\|f_1\right\|_{L_2(Q)}\left(\int_0^\zeta\left\|\frac{\partial^{2\mathrm{m}}v_n}{\partial\xi^{2m}}\right\|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если к правой части применим неравенство Юнга и неравенство Фридрихса, то получим

$$\left\|\frac{\partial^{\mathrm{m}}v_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi^m}\right\|^2\le M_6\left(\left\|f_1\right\|_{L_2(Q)}^2+\int_0^\zeta\left\|\frac{\partial^{\mathrm{m}}v_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi^m}\right\|^2dt\right).$$

Отсюда и из неравенства Гроноулла вытекает оценка

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{\partial^{\mathrm{m}}v_n(\xi,t)}{\partial\xi^m}\right\|\le M_7. \tag{17}$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$P_n\frac{\partial \mathrm{w_n}}{\partial t}+P_nA(t)w_n+P_nK(t)w_n=P_n\frac{\partial f_1(\xi,t)}{\partial t}--P_nA'(t)v_n-P_nK'(t)v_n, \tag{18}$$

$$w_n(\xi,0)=0. \tag{19}$$

Для $w_n(\xi,t)$ по аналогии с получением оценки (17) устанавливается неравенство

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|\frac{\partial^{\mathrm{m}}w_n(\xi,\mathrm{t})}{\partial\xi^m}\right\|\le M_8. \tag{20}$$

Так как $f_1(\xi,0)=0$ и $v_n(\xi,0)=0$, то из уравнения (10) вытекает тождество $P_n\dfrac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0)=0.$ Тогда

$$0=\left(P_n\frac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0),A\frac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0)\right)=\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0),A\frac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0)\right)=\left\|\frac{\partial^{m+1}v_n}{\partial\xi^m\partial t}(\xi,0)\right\|^2\geq M_9\left\|\frac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0)\right\|^2.$$

Итак, $\dfrac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0)=0$ для всех ξ из [0,1].

Коэффициенты $b_j(\xi,t)$ и функция $f_1(\xi,t)$ непрерывно дифференцируемы по t, поэтому решение $v_n(\xi,t)$ задачи (10)–(11) удовлетворяет тождествам

$$P_n\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}+P_nA(t)\frac{\partial v_n}{\partial t}+P_nK(t)\frac{\partial v_n}{\partial t}=P_n\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}-A'(t)v_n-K'(t)v_n\right),$$

$$v_n(\xi,0)=0,\ \frac{\partial v_n}{\partial t}(\xi,0)=0.$$

Отсюда и из (18) следует

$$P_n\frac{\partial z_n}{\partial t}+P_nA(t)z_n+P_nK(t)z_n=0,$$

где $z_n=w_n(\xi,t)-\dfrac{\partial v_n(\xi,t)}{\partial t}$. Из последнего тождества вытекает оценка $\left\|w_n(\xi,t)-\dfrac{\partial v_n(\xi,t)}{\partial t}\right\|\leq 0.$ Таким образом, $w_n(\xi,t)=\dfrac{\partial v_n(\xi,t)}{\partial t}$. Последнее равенство и оценка (20) приводят к соотношению

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\frac{\partial^{m+1}v_n(\xi,t)}{\partial\xi^m\partial t}\right\|\leq M_9. \tag{21}$$

Пусть $v(\xi,t)$ и $v_n(\xi,t)$ — решения задач (4)–(6) и (10)–(11). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(v-v_n)+A(t)(v-v_n)+K(t)(v-v_n)=(I-P_n)\left(f_1-\frac{\partial v_n}{\partial t}-K(t)v_n\right). \tag{22}$$

Умножим (22) скалярно в $L_2(0,1)$ на $(v-v_n)$ и проинтегрируем по t от 0 до ζ. Используя (12), имеем

$$\frac{1}{2}\|v-v_n\|^2+\mu_1\int_0^\zeta\int_0^1\left|\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}(v-v_n)\right|^2d\xi dt\leq\int_0^\zeta\left|\left((I-P_n)\left(f_1-\frac{\partial v_n}{\partial t}-K(t)v_n\right),(v-v_n)\right)\right|dt. \tag{23}$$

Из определения функций $\varphi_s(\xi)$ следует, что для любой функции $z(\xi)$ из $L_2(0,1)$ верно неравенство $\left\|(I-P_n)\left(\dfrac{d^{2m}}{d\xi^{2m}}\right)^{-1}z(\xi)\right\|\leq M_{10}n^{-2m+1}$. Отсюда и из оценок (23) и (16) получаем

$$\frac{1}{2}\|v-v_n\|^2+\mu_1\int_0^\zeta\int_0^1\left|\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}(v-v_n)\right|^2d\xi dt\leq M_{11}n^{-m+\frac{1}{2}}\int_0^\zeta\left(\|f_1\|+\left\|\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\|+\left\|\frac{\partial^{2m}v_n}{\partial\xi^{2m}}\right\|\right)\left\|\frac{\partial^m(v-v_n)}{\partial\xi^m}\right\|dt.$$

Если применить к правой части последнего соотношения ε-неравенство, а также оценку (21) и равномерную ограниченность $\int \left| \frac{\partial^{2m} v_n(\xi,t)}{\partial \xi^{2m}} \right|^2 d\xi dt,$ то получим (13).

Теорема доказана.

Используя связь между решениями $v(\xi,t)$ и $u(x,t)$ задач (4)–(6) и (1)–(3) при выполнении неравенства (7), а также связь между функциями $v_n(\xi,t)$ и $u_n(x,t),$ получаем

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} |u(x,t)-u_n(x,t)|^2\, dx \le M_{12} n^{-2m+1}.$$

2. Численный эксперимент

В данном параграфе мы приведем результаты численного эксперимента решения задачи (1)–(3) методом Петрова–Галёркина.

Пусть $m=2, \varphi(t)=\frac{1}{9}t^2+3, \psi(t)=-\frac{1}{9}t^2+1,$

$$a_0(x,t)=a_2(x,t)=a_3(x,t)=0, a_1(x,t)=(t+1)e^{-x}, \quad f(x,t)=tx(x^3-1),$$

тогда задача (1)–(3) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+(t+1)e^{-x}\frac{\partial u}{\partial x}=tx(x^3-1),$$

$$u\left(-\frac{1}{9}t^2+1,t\right)=u\left(\frac{1}{9}t^2+3,t\right)=\frac{\partial u}{\partial t}\left(-\frac{1}{9}t^2+1,t\right)=\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{1}{9}t^2+3,t\right)=0,$$

$$u(x,0)=0, \psi(0)\le x\le \varphi(0), 0\le t\le 1.$$

В цилиндре $\overline{\mathrm{Q}}=[0;1]\mathrm{x}[0;\mathrm{T}]$ рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)^{-4}\frac{\partial^4 \mathrm{v}}{\partial \xi^4}+(t+1)e^{-\left(\xi\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)-\frac{1}{9}t^2+1\right)}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \xi}=f_1(\xi,t),$$

$$v(0,t)=v(1,t)=\frac{\partial v}{\partial \xi}(0,t)=\frac{\partial v}{\partial \xi}(1,t)=0,$$

$$v(\xi,0)=0, 0\le \xi\le 1, 0\le t\le 1,$$

где $f_1(\xi,t)=t\left(\xi\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)-\frac{1}{9}t^2+1\right)\left(\left(\xi\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)-\frac{1}{9}t^2+1\right)^3-1\right).$

Приближённое решение данной задачи $v_n(\xi,t)$ будем искать в виде

$$v_n(\xi,t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(t)\beta_k(\xi),$$

где функции $\beta_k(\xi)$ являются решением следующей задачи:

$$\frac{d^4\beta_k(\xi)}{d\xi^4}=\sin(k\pi\xi),$$

$$\beta_k(0)=\beta_k(1)=\frac{d\beta_k}{d\xi}(0)=\frac{d\beta_k}{d\xi}(1).$$

Решения $\beta_k(\xi)$ имеют следующий вид:

$$\beta_k(\xi)=\frac{\sin(\mathrm{k}\pi\xi)}{(\pi\mathrm{k})^4}-\frac{(1+(-1)^k)\xi^3}{(\pi\mathrm{k})^3}+\frac{(2+(-1)^k)\xi^2}{(\pi\mathrm{k})^3}-\frac{\xi}{(\pi\mathrm{k})^3}.$$

Составим невязку и запишем требование ортогональности в виде

$$\int_0^1\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)^{-4}\frac{\partial^4 \mathrm{v}}{\partial\xi^4}+(t+1)e^{-\left(\xi\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)-\frac{1}{9}t^2+1\right)}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\xi}-f_1(\xi,t)\right)\sin(m\pi\xi)\mathrm{d}\xi=0,$$

$$m=1,\dots,n.$$

Коэффициенты $\alpha_k(t)$ находятся как решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\frac{d\alpha_k(t)}{dt}\int_0^1\beta_k(\xi)\sin(m\pi\xi)d\xi+\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)^{-4}\alpha_k(t)\int_0^1\frac{d^4\beta_k(\xi)}{d\xi^4}\sin(m\pi\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}(t+1)\alpha_k(t)\int_0^1 e^{-\left(\xi\left(\frac{2}{9}t^2+2\right)-\frac{1}{9}t^2+1\right)}\frac{d\beta_k(\xi)}{d\xi}\sin(m\pi\xi)d\xi-\int_0^1 f_1(\xi,t)\sin(m\pi\xi)d\xi=0,$$

$$\alpha_k(0)=0,$$

$$m=1,\dots,n.$$

Для нахождения приближённого решения данной задачи применим метод Рунге–Кутты. Вычислим значения $\alpha_k(t)$ в узлах сетки. Тогда приближенное решение исходной задачи в узлах сетки имеет вид

$$u_n(x,t_s)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(t_s)\beta_k\left(\frac{x-\psi(t_s)}{\varphi(t_s)-\psi(t_s)}\right).$$

На рисунке 1 представлен график приближенного решения.

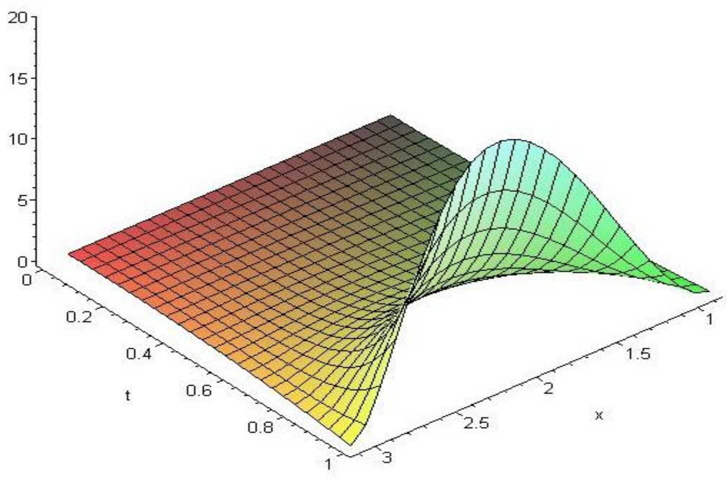

Рис. 1

Список литературы

Вайникко Г. М. О быстроте сходимости метода моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. — 1968. — Т. 9, № 1. — С. 21–28.

Глушко В. П., Крейн С. Г. Неравенства для норм производных в пространствах с весом // Сибирский математический журнал. — 1960. — Т. 1, № 3. — С. 343–382.

Дауговет И. К. О методе моментов для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. — 1965. — Т. 6, № 1. — С. 70–75.

Зарубин А. Г. О методе моментов для одного класса нелинейных уравнений // Сибирский математический журнал. — 1978. — Т. 19, № 3. — С. 575– 586.

Зарубин А. Г. Исследование проекционной процедуры Галёркина–Петрова методом дробных степеней // Доклады АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 4. — С. 780–784.

Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

Петров Г. И. Применение метода Галёркина–Петрова к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. — 1940. — Т. 4. — С. 1–13.