

УДК: 519.63

К вопросу об устойчивости численной схемы Патанкара

И. А. Судаков^{1,2,a}, Т. Г. Сукачева²

¹ Университет Юты, департамент математики,
США, 84112-0090, Юта, г. Солт-Лейк-Сити, 155 Юг 1400 Восток, стр. 233

² Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, институт электронных
и информационных систем,

Россия, 173003, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, д. 41

E-mail: ^a sudakov@math.utah.edu

Получено 5 августа 2012 г.

В статье рассматривается устойчивость эффективной численной схемы, предложенной С. В. Патанкаром. Численная схема Патанкара нашла широкое применение в решении разнообразных прикладных задач, поэтому вопросы, связанные с математическим обоснованием этой схемы, являются достаточно актуальными.

Ключевые слова: численные методы, Патанкар, уравнение теплопроводности, дискретный аналог

Issues of Patankar's numerical scheme stability

I. A. Sudakov^{1,2}, T. G. Sukacheva²

¹ University of Utah, Department of Mathematics, 155 S 1400 E, Room 233. Salt Lake City, UT 84112-0090, USA

² Novgorod State University, Institute of Electronic and Information Systems, B.St.-Peterburgskaya str. 41, 173003, Velikiy Novgorod, Russia

Abstract. — In this paper we consider the issues of Patankar's numerical scheme stability. The Patankar's numerical scheme is applied in the most number of the applications. So, the issues of Patankar's numerical scheme stability are very important question for the applications.

Keywords: numerical methods, Patankar, thermal conductivity equation, discrete analog

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 827–835 (Russian).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-90803-мол_рф_нр).

Введение

Практически все актуальные задачи гидродинамики, теплообмена и массообмена, с которыми в настоящее время сталкиваются исследователи и инженеры, не поддаются аналитическому решению, и единственная возможность их теоретического анализа — получение численного решения. В [Патанкар, Сполдинг, 1971; Патанкар, 1984, 2003] был предложен достаточно оригинальный численный метод решения такого рода задач (метод Патанкара). Этот метод относится к классу методов под общим названием «методы контрольных объемов», которые были предложены еще в 60-х годах прошлого века, однако вплоть до 80-х годов не были широко употребимы. Ситуацию изменила работа Патанкара [Патанкар, Сполдинг, 1971], в которой излагался метод конечных объемов для структурированных сеток в одномерном случае и предлагался ясный и удобный алгоритм применения этого метода в задачах теплопроводности, конвекции и диффузии. Однако в этой работе не было приведено никакого математического обоснования данного метода, так как он вводился из физических принципов, хорошо понятных инженерам. Естественно, метод Патанкара получил дальнейшее развитие и достаточно подробно излагался для различных случаев (см., например, [Grossmann, Roos, Stynes, 2007]). С одной стороны, при анализе литературы не было найдено математического обоснования этого метода в традиционном изложении (одномерный случай). С другой стороны, вопрос устойчивости численной схемы возник из предложенной в [Судаков, Бобылёв, Береснев, 2011] модели для описания термического режима вечной мерзлоты. Так как расчеты термического режима проводились для достаточно длительных времен, необходимо было убедиться в устойчивости предложенного Патанкаром алгоритма, который составляет основу указанной модели.

В [Павлов, Перльштейн, Типенко, 2010] замечено, что современному мерзлотоведению требуются более надежные модели термического режима вечной мерзлоты, которые не только решают простейшее уравнение теплопроводности хорошо всем известными разностными методами, но и применяют эффективные и физически понятные численные схемы, оптимизируют процесс вычислений. Видимо, метод Патанкара может быть достаточно полезен для решения данной проблемы; например, он удобен в параллельных вычислениях [Manshoor, Hassan, Alias, 2009], что, несомненно, важно для инкорпорирования моделей вечной мерзлоты в глобальные климатические модели, реализуемые на суперкомпьютерах.

Таким образом, цель настоящей работы состоит в доказательстве устойчивости численной схемы Патанкара. Проведем такое доказательство на примере задачи Стефана промерзания (протаивания) мерзлых грунтов (подробнее о задаче Стефана для мерзлых грунтов см. в [Судаков, 2011, Sudakov & Vakulenko, 2012]).

Сущность схемы Патанкара

Постановка задачи

Влажный грунт находится в талом состоянии и имеет в начальный момент времени некоторое заданное распределение температуры по глубине h . На поверхности грунта реализуется температура $u(0, t) = \varphi(t)$, которая при всех последующих изменениях всегда ниже температуры замерзания u_3 . В результате образуется промерзший слой переменной толщины $\zeta = f(t)$. Его нижняя подвижная граница всегда имеет температуру замерзания. На этой границе происходит переход влаги грунта из одного агрегатного состояния в другое, на что затрачивается теплота перехода Q . Таким образом, верхняя граница ζ талой зоны имеет постоянную температуру замерзания, а нижняя граница l — некоторую постоянную температуру грунта на достаточно большой глубине. Часто нижнюю границу талой зоны принимают лежащей бесконечно глубоко. Различающиеся коэффициенты переноса промерзшей и талой зон кусочно-постоянны

и скачком меняются на границе раздела зон. Предполагается также, что перенос тепла в грунте происходит только вследствие теплопроводности (рис. 1). Тогда математическая формулировка задачи выглядит следующим образом.

Уравнение теплопроводности для мерзлой и талой зоны:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2}; & t > 0; \quad x \in (0, \zeta), \\ \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2}; & t > 0; \quad x \in (\zeta, \infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

граничные и начальные условия:

$$u_m(0,t) = \phi(t), \quad u_m(x,0) = f(x), \quad (1.2)$$

условия на границе замерзания:

$$\begin{aligned} u_m(\zeta,t) = u_m(\zeta,t) = u_s = const \\ \lambda_m \frac{\partial u_m(\zeta,t)}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial u_m(\zeta,t)}{\partial x} = Q \frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отсутствие потока тепла на бесконечности:

$$\frac{\partial u_m(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Здесь a_m, a_m — температуропроводность каждой из зон; λ_m, λ_m — теплопроводность талых и мерзлых грунтов; Q — теплота фазового перехода, пропорциональная объемной влажности грунта.

Таким образом, для грубодисперсных многолетнемерзлых грунтов характерно существование двух зон (таялая и мерзлая зоны), описываемых уравнениями теплопроводности (1.1) с начально-краевыми условиями (1.1)–(1.3). Видно, что задача о промерзании (оттаивании) многолетнемерзлых грунтов может быть сформулирована как задача о сопряжении двух температурных полей при наличии особого граничного условия на подвижной границе раздела.

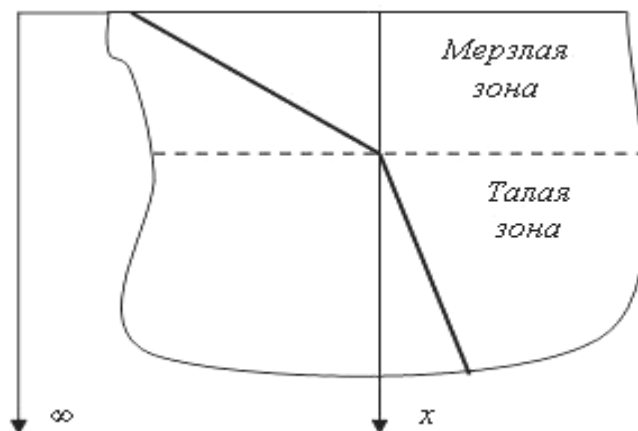


Рис. 1. Схема распределения температуры при промерзании грунта

Нестационарное уравнение теплопроводности (1.1) решается методом Патанкара [Патанкар, Сполдинг, 1971; Патанкар, 1984]. Оригинальная идея метода состоит в том, что иногда в задачах тепломассообмена очень удобно связывать различные сетки с различными неизвестными данной задачи. Каждое неизвестное ассоциируется с каким-либо уравнением, это уравнение интегрируется по элементам (которые и есть контрольные объемы) соответствующей сетки, а затем дискретизируется для каждого контрольного объема (и временного шага). Преимуществом данного метода является то, что такая «естественная» дискретизация следует из физических принципов рассматриваемой задачи. Кроме того, к достоинствам метода относят его одинаково хорошую работу, как при граничных условиях Неймана, так и при граничных условиях Дирихле; применимость к неструктурированным сеткам; возможность распараллеливания, и т. д. (подробности см. в [Grossmann, Roos, Stynes, 2007]).

Опишем суть этого метода более подробно. Фактически здесь выбирается множество точек вдоль оси x и отыскивается значение температуры в них. Это множество называется расчетной сеткой, а точки — «расчетными точками». На рис. 2а. показан набор расчетных точек W , P , E , обозначенных как $i-1$, i , $i+1$ и т. д. Расстояние между соседними точками равно δx . Задача численного метода заключается в определении температур u_{i-1} , u_i , u_{i+1} для любого i .

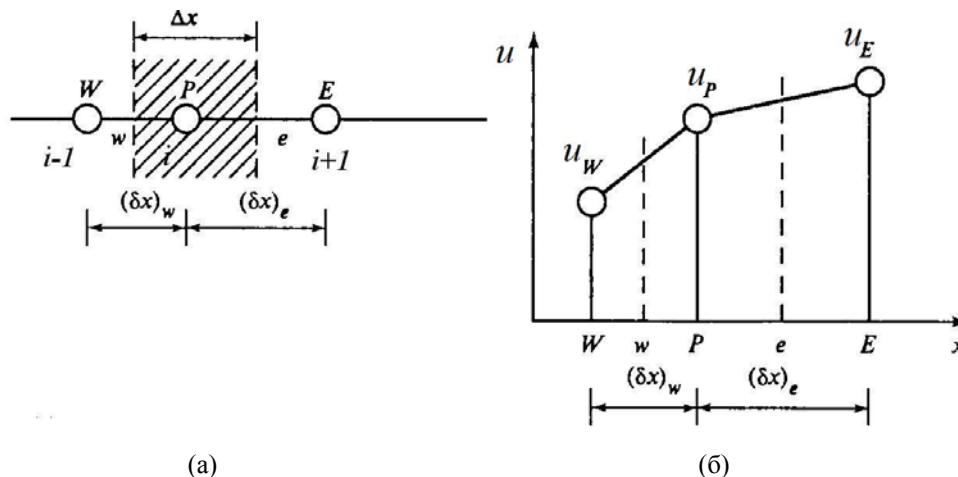


Рис. 2. Иллюстрация метода Патанкара [Патанкар, 2003]: (а) — расчетная сетка, (б) — кусочно-линейный профиль температуры

Численное решение получается в форме численных значений u в конечном числе расчетных точек. Дискретные значения u_{i-1} , u_i , u_{i+1} для любого i находятся из системы алгебраических уравнений, которые называются *дискретными аналогами* дифференциального уравнения (1.1).

Участок, ограниченный штриховыми линиями на рис. 2а, является маленькой частью рассматриваемой одномерной расчетной области. Такой участок называют подобластью, конечным объемом или *контрольным объемом*. Можно получить дискретные уравнения, используя тепловой баланс в контрольном объеме. Дискретные аналоги, полученные этим методом, являются не только формальной математической аппроксимацией, но и имеют ясный физический смысл. Решение, найденное с помощью метода контрольного объема, всегда будет сохранять баланс (энергии, вещества и др.) во всей расчетной области.

При численном решении нестационарных задач время также становится дискретной величиной. Будем использовать большое число шагов по времени и искать поле температуры при различных дискретных значениях t , которые соответствуют завершению каждого шага по времени. Основная задача при решении уравнения (1.1) может быть сформулирована так: задано распределение температуры в момент времени t , найти поле температуры в момент времени $t + \Delta t$, где Δt — шаг по времени. Существуют различные методы получения дискретного аналога из уравнения (1.1), в т.ч. *явный*, *Кранка–Нколсона* и *полностью неявный* [Goodrich,

1978; Самарский, Вабищевич, 2003]. Будем использовать только полностью неявный метод, так как он позволяет использовать любые значения Δt , не получая физически нереальных результатов.

На рис. 2б обозначим расчетные точки сетки: P — рассматриваемая точка, W и E — соответственно соседние точки. Штриховыми линиями показаны грани контрольного объема, содержащего точку P . Расстояние между точками W и P обозначим как $(\delta x)_w$, а между точками P и E — как $(\delta x)_e$. Ширину контрольного объема обозначим через Δx . Пусть u_p^0 обозначает известное значение u_p в момент времени t . Величина u_p соответствует неизвестной температуре в момент времени $t + \Delta t$. Если рассматривать температуру u_p в качестве характерной для всего контрольного объема вокруг точки P , то левый член уравнения (1.1) может быть проинтегрирован по контрольному объему:

$$\int_w^e C \frac{\partial u}{\partial t} dx = a_p^0 (u_p - u_p^0), \quad (1.4)$$

где $a_p^0 = \frac{C_p \Delta x}{\Delta t}$ — коэффициент при температуре u_p^0 , C — объемная теплоёмкость грунта. Таким образом, получаем

$$a_p u_p = a_e u_e + a_w u_w + b. \quad (1.5)$$

Здесь $a_e = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}$; $a_w = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}$; $a_p = a_e + a_w + a_p^0 - (Qv)_p \Delta x$, $b = (Qv)_c \Delta x + a_p^0 u_p^0$, где a_p — коэффициент при температуре u_p ; a_e и a_w — коэффициенты при температурах в соседних узлах E и W ; b — постоянный коэффициент; $(Qv)_c$ — соответствует средней мощности генерации тепла в контрольном объеме, $(Qv)_p$ — полная мощность генерации тепла в контрольном объеме.

Уравнение (1.5) является дискретным аналогом нестационарного уравнения теплопроводности. Методы вычисления коэффициентов уравнения (1.5) приведены в [Патанкар, 2003]. При выводе уравнения (1.5) полностью неявный метод заключался в использовании неизвестных температур в момент времени $t + \Delta t$ для аппроксимации плотности теплового потока на гранях контрольного объема и источникового члена, зависящего от температуры. Другими словами, новые (неизвестные) значения температуры превалируют в течение шага по времени. Нестационарность задачи показывает коэффициент a_p^0 в уравнении (1.4). Так, при $\Delta t \rightarrow \infty, a_p^0 \rightarrow 0$, в результате получаем стационарный случай, который детально рассмотрен в [Патанкар, 1984]. Далее записываются дискретные аналоги для граничных контрольных объемов. Полученная система алгебраических уравнений решается с помощью стандартных алгоритмов. Все другие детали рассмотрены в [Патанкар, 2003].

Для численного решения задачи (1.1)–(1.3) с конечными размерами области предварительно перейдем к ее дискретному аналогу. Для этого область решения равномерно разобьем на элементарные контрольные объемы $[r_{i-1}; r_i], i=1, 2, \dots, n$, центры которых примем в качестве узловых точек x_i , и проинтегрируем уравнение (1.1) по каждому из них. Заметим, что на каждом временном шаге один из контрольных объемов будет содержать поверхность фазового превращения. При интегрировании по контрольному объему, в котором происходит фазовый переход, учитывается условие теплового баланса (1.3). В результате для расчета температурного поля на каждом шаге по времени получаем неявную систему линейных уравнений относительно температур в узловых точках с трехдиагональной матрицей:

$$a_i u_i^{(k+1)} = c_i u_{i+1}^{(k+1)} + d_i u_{i-1}^{(k+1)} + b_i, \quad (1.6)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, $u_i^{(k+1)} = u(x_i, t_{k+1})$;

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{x_{i+1} - x_i}, & i < s \\ \frac{\lambda_{m/m}}{x_{i+1} - x_i}, & i \geq s \end{cases}; \quad d_i = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}}, & i \leq s \\ \frac{\lambda_{m/m}}{x_i - x_{i-1}}, & i > s \end{cases}; \quad b_i = \begin{cases} \frac{r_i - r_{i-1}}{\Delta t}, & i < s \\ \frac{C_{m/m}(r_i - r_{i-1})}{\Delta t}, & i > s \end{cases}; \quad a_i = \begin{cases} c_i + d_i + \frac{r_i - r_{i-1}}{\Delta t}, & i < s \\ c_i + d_i + \frac{C_{m/m}(r_i - r_{i-1})}{\Delta t}, & i > s \end{cases};$$

$$a_s = c_s + d_s + \frac{C_{m/m}(r_s - \zeta^{(k+1)}) + x_s^{(k+1)} - r_{s-1}}{\Delta t}; \quad b_s = \frac{C_{m/m}(r_s - \zeta^{(k+1)}) + x_s^{(k+1)} - r_{s-1}}{\Delta t};$$

$\zeta^{(k+1)} = \zeta^{(k)} + v^{(k)} \Delta t$; $\zeta^{(k)} = \zeta(t_k)$; $v^{(k)} = v(t_k)$; $t_{k+1} = t_k + \Delta t$; $\lambda_{m/m}$ и $C_{m/m}$ — коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости, соответствующих зон, s — индекс контрольного объема, в котором происходит фазовое превращение.

Как видно, кроме температур система (1.6) включает неизвестное значение $v^{(k)}$ скорости фронта фазового превращения. Для его нахождения использовалось соотношение $\zeta = k\sqrt{t}$. Здесь t — время фазового превращения, т. е. время, в течение которого какой-либо из контрольных объемов будет содержать поверхность фазового превращения; ζ — координата фронта фазового превращения; k — параметр, определяемый безразмерной координатой границы раздела фаз. Указанный параметр может быть найден из решения краевой задачи при определенных граничных условиях с применением метода сквозной «прогонки» в сочетании с методом «пристрелки», что позволяет также находить попутно очередную координату поверхности раздела $\zeta^{(k+1)}$.

Доказательство устойчивости схемы Патанкара

Условия аппроксимации не достаточно для того, чтобы результат разностной схемы приближался к точному ответу при стремлении шага к нулю. В случае схем, коэффициенты которых не зависят от решения дифференциального уравнения, нужно выполнение условия устойчивости. В литературе [Самарский, Гулин, 1989; Фадеев, 1998; Самарский, Вабищевич, 2003] рассматриваются разные подходы к проблеме устойчивости разностных схем. Применим принцип замороженных коэффициентов [Самарский, Гулин, 1989]. Предполагая, сначала, что коэффициенты схемы $a_i, b_i, c_i = d_i$ постоянны, стандартным спектральным методом получаем условие устойчивости

$$\max_i \frac{b_i}{a_i - (c_i + d_i)} < 1. \quad (2.1)$$

Действительно, запишем линейный оператор разностной схемы в виде $au_i^{(k+1)} - c(u_{i+1}^{(k+1)} - du_{i-1}^{(k+1)}) = bu_i^k$ и подставляя в него $u_i^k = (\exp(im))\theta_m^k$:

$$a\theta_m - c\theta_m e^{im} - d\theta_m e^{im} - b = 0$$

$$\theta_m (a - ce^{im} - de^{im}) - b = 0$$

$$d = c \Rightarrow \theta(a - 2c \cos im) = b.$$

В итоге получим

$$\theta = \frac{b}{a - (c + d) \cos im},$$

и из того, что $|\theta| < 1$, вытекает справедливость условия (2.1).

Обоснование принципа известно для схем в стационарных задачах, где решение не зависит от времени [Самарский, Гулин, 1989] и может быть получено с помощью принципа максимума для разностных схем. В нашей задаче такой аргумент может быть применен, если скорость фронта не зависит от времени [Патанкар, 2003]. Однако можно существенно улучшить идею Патанкара.

Лемма 1. К схеме Патанкара применим принцип верхних и нижних решений, то есть если некоторое $w_i^{(k+1)}$ удовлетворяет неравенству

$$a_i w_i^{(k+1)} > c_i w_{i+1}^{(k+1)} + d_i w_{i-1}^{(k+1)} + b_i$$

(вместо равенства (1.6.)), то во всех точках сетки

$$w_i^{(k+1)} > u_{i+1}^{(k+1)},$$

притом что если это неравенство было выполнено в первом слое ($k = 0$).

Доказательство. Разностная схема (1.6) является схемой с переменными коэффициентами, поэтому исследуем ее на устойчивость с помощью принципа максимума [Самарский, Гулин, 1989].

Выпишем коэффициенты:

$$a_i u_i^{(k+1)} - c_i u_{i+1}^{(k+1)} - d_i u_{i-1}^{(k+1)} = b_i (u_i^k), \quad (2.2)$$

$$a_i w_i^{(k+1)} - c_i w_{i+1}^{(k+1)} - d_i w_{i-1}^{(k+1)} > b_i (w_i^k). \quad (2.3)$$

Допустим, что $w_i^0 > u_i^0$.

Докажем от противного. Схема доказательства повторяет известные рассуждения для общих нелинейных параболических уравнений второго порядка [Фридман, 1968], однако содержит дополнительную неочевидную тонкость.

Пусть $w_i^{(l)} < u_i^{(l)}$ для некоторого $i_* = i$. Выберем такое i_* , что разность $w_i^{(l)} - u_i^{(l)}$ минимальна (фактически это новая идея по сравнению с описанным выше случаем равенств). Тогда можно предположить, что $\forall k < l$ справедливо, что $w_i^{(k)} \geq u_i^{(k)}$.

Из (2.3) вычтем (2.2) и положим $i_* = i$:

$$a_i (w_{i_*}^{(l)} - u_{i_*}^{(l)}) - c_i (w_{i_*+1}^{(l)} - u_{i_*+1}^{(l)}) - d_i (w_{i_*-1}^{(l)} - u_{i_*-1}^{(l)}) > b_i (w_{i_*}^{(l)} - u_{i_*}^{(l)}).$$

Левая часть последнего неравенства < 0 , а правая часть > 0 , следовательно, наше предположение неверно, и лемма доказана.

Проверим теперь, возможна ли абсолютная устойчивость в схеме Патанкара. В выражении для θ_m при $m \neq 0 \Rightarrow \theta < 1$ — это требует дополнительной проверки, чтобы показать абсолютную устойчивость. Рассмотрим только случай равномерной сетки и граничных условий типа Дирихле (что соответствует постановке нашей задачи). Здесь спектральный оператор

$$u_i^k = \sin(im)\theta_m^k, \quad m = \frac{\pi}{L}k, \quad k \in N, \quad k \neq 0, \quad L \text{ — число узлов сетки.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a u_i^{(k+1)} - c u_{i+1}^{(k+1)} - d u_{i-1}^{(k+1)} - b u_i^k &= 0 \\ \theta (a \sin(im) - c \sin((i+1)m) - d \sin((i-1)m)) - b \sin im &= 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные и учитывая, что $c = d$, получим

$$\begin{aligned} \theta (a \sin(im) - 2c \sin im \cos m) - b \sin im &= 0 \\ \theta (a - 2c \cos m) - b &= 0 \\ \theta &= \frac{b}{a - 2c \cos m}, \quad m \neq 0 \Rightarrow \theta < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, схема Патанкара — абсолютно устойчива, и справедлива теорема.

Теорема 1 (об устойчивости схемы Патанкара). При условии, что $a_i - (c_i + d_i) > 0$, и при выполнении неравенства (2.1) разностная схема (1.6) является абсолютно устойчивой, причем её решение удовлетворяет неравенству $u_i^k < C|Q|$.

Замечание 1. Здесь $|Q|$ обозначает норму источникового члена $Qv^{(k)}$, а C — некоторая положительная константа, зависящая от коэффициентов a_i, b_i, c_i (фактически от структуры численной схемы), но не зависящая от Q .

Замечание 2. Для доказательства можно взять верхнее решение в виде достаточно большой постоянной.

Замечание 3. При условиях данной задачи, согласно [Самарский, Гулин, 1989], устойчивость влечет за собой и сходимость этой численной схемы.

Заключение

Для реализации метода Патанкара в рассматриваемой задаче был создан программный комплекс. Он состоит из двух частей: неизменяемой и адаптируемой. Неизменяемая часть была заимствована из [Патанкар, 2003]. Преимущество неизменяемой части состоит в том, что вычислительный алгоритм и программный код могут быть использованы для решения любого уравнения переноса (теплопроводности, диффузии). Адаптируемая часть разработана авторами в соответствии с задачами настоящего исследования. Программный код реализовывался на языке программирования FORTRAN 90. Комплекс программ зарегистрирован в государственном реестре программ для ЭВМ под № 2012611057 от 25.01.2012.

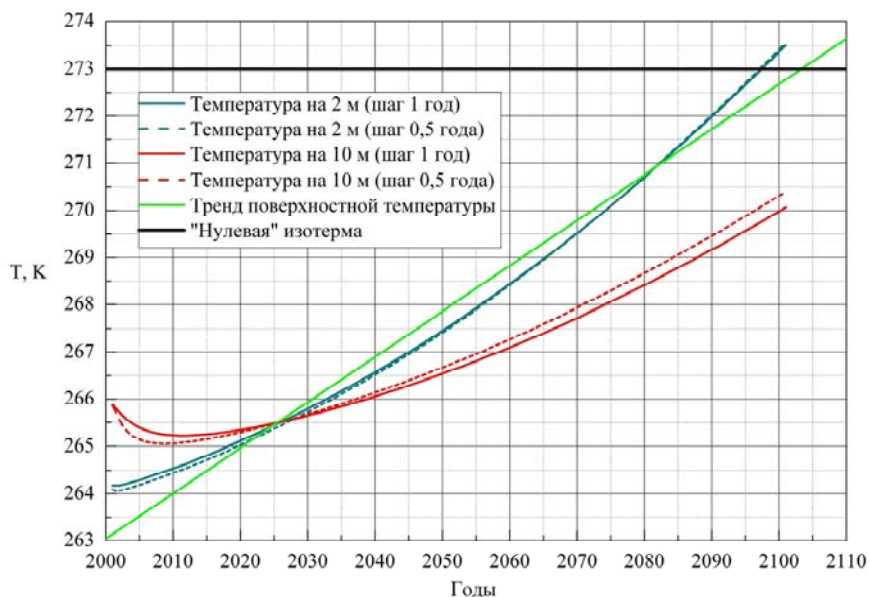


Рис. 3. Расчетное изменение температуры вечной мерзлоты для глубины слоя 2 м, 10 м за период 2001–2100 годов

Описанная выше модель использовалась для расчета состояния термического режима и прогноза изменения температуры вечной мерзлоты п. Ямал (подробнее о постановке и результатах вычислительного эксперимента см. в [Судаков, Бобылёв, Береснев, 2011]). Приведем здесь результаты вычислительного эксперимента, который демонстрирует динамику изменения температуры на разных глубинах вечной мерзлоты на протяжении XXI века (рис. 3). Протаявшим считался слой вечной мерзлоты, для которого расчетная температура достигла значения в 273 К (0 °C); граничное условие (температура на поверхности мерзлых грунтов) задавалось по

данным глобальной климатической модели ЕСНАМ 5 (при разных типах осреднения поверхностной температуры для разных промежутков времени).

Так, если схема не обладает свойством устойчивости, то при меньшем шаге получаются существенно худшие результаты. Рис. 3 наглядно демонстрирует устойчивость схемы Патанкара. Сравнивая результаты при меньшем шаге (в 0.5 года) с результатами при большем шаге (1 год) можно увидеть, что существенного различия между ними нет. Более того, имеющиеся минимальные различия определены специфическим способом задания функции поверхностной температуры (граничного условия) для разных промежутков времени (так как она строится на основе данных глобальной климатической модели, в которой подразумеваются различные способы осреднения температуры для различных промежутков времени).

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент подтверждает справедливость доказанной теоремы об устойчивости численной схемы Патанкара.

Список литературы

- Павлов А. В., Перльштейн Г.З., Тупенко Г.С. Актуальные аспекты моделирования и прогноза термического состояния криолитозоны в условиях меняющегося климата // Криосфера Земли. — 2010. — Т. XIV, № 1. — с. 3–12.
- Патанкар С. В., Сполдинг Д. Б. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. — М.: Энергия, 1971. — 128 с.
- Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
- Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. — М.: Изд-во МЭИ, 2003. — 312 с.
- Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
- Судаков И. А. Динамика протаивания мерзлотных озер и изменения климата // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. — 2011. — № 2. — С. 74–79.
- Судаков И. А., Бобылев Л. П., Береснев С. А. Моделирование термического режима вечной мерзлоты при современных изменениях климата // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 7. — 2011. — №1. — С. 81–88.
- Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.
- Goodrich L. E. Efficient numerical technique for one-dimensional thermal problems with phase change // Int. J. Heat Mass. Transfer. — 1978. — V. 21. — P. 615–621.
- Grossmann C., Roos H.-G., Stynes M. Numerical treatment of partial differential equations. — Springer-Verlag, 2007. — 596 p.
- Manshoor B., Hassan M. N. W., Alias N. Incompressible flow simulation using SIMPLE method on parallel computer // J. of Sc. and Tech. — 2009. — V. 1, № 1. — P. 41–54.
- Sudakov I. & Vakulenko S. Mathematical modelling positive carbon-climate feedback: permafrost lake methane emission case // Earth Syst. Dynam. Discuss. — 2012. — V. 3. — P. 235–257.