

УДК: 519.254

Об исследовании плазменной турбулентности на основе анализа спектров

А. К. Горшенин^{1,a}, В. Ю. Королев^{2,b}, Д. В. Малахов^{3,c},
Н. Н. Скворцова^{3,d}

¹Институт проблем информатики Российской академии наук,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор.2

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 19991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК

³Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН,
Россия, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 38

E-mail: ^a agorshenin@ipiran.ru, ^b vkorolev@cmc.msu.ru, ^c malakhov@fpl.gpi.ru, ^d nina@fpl.gpi.ru

Получено 5 ноября 2012 г.

В статье рассмотрены примеры анализа спектров экспериментальных данных для выявления характерных структур процессов, формирующих турбулентность в плазме. Основу метода составляет использование оригинального алгоритма, идеологически близкого к бутстреп-процедуре для одновыборочной задачи. В качестве базовой модели для описания тонкой структуры стохастических процессов предлагаются конечные сдвиг-масштабные смеси нормальных законов. Для отыскания статистических оценок (максимального правдоподобия) предполагается использование широко известного ЕМ-алгоритма. Для нескольких серий спектров, полученных для разных режимов низкочастотной плазменной турбулентности, демонстрируется эффективность использования предложенного метода исследования.

Ключевые слова: бутстреп-анализ, спектр, турбулентная плазма, ЕМ-алгоритм

On the investigation of plasma turbulence by the analysis of the spectra

A. K. Gorshenin¹, V. Yu. Korolev², D. V. Malakhov³, N. N. Skvortsova³

¹Institute of Informatics Problems, Russian Academy of Sciences,
Russia, 119333, Moscow, Vavilova street, 44/2

²Lomonosov Moscow state university, Russia, 19991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory

³Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
Russia, 119333, Moscow, Vavilova street, 38

Abstract. — The article describes the examples of the analysis of the experimental data spectra for identifying typical structures of processes forming plasma turbulence. The method is based on the original algorithm which is close to the one-sample bootstrap. The base model for description of the fine structure of stochastic processes is finite local-scale normal mixtures. For finding the statistical estimates (maximum likelihood estimates) well known EM algorithm is used. The efficiency of the proposed research technique is demonstrated for a number of spectra's set obtained in different modes of low-frequency plasma turbulence.

Keywords: bootstrap analysis, spectrum, turbulence plasma, EM algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 793–802 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-07-31267.

© 2012 Андрей Константинович Горшенин, Виктор Юрьевич Королев, Дмитрий Валерьевич Малахов, Нина Николаевна Скворцова

Введение

Спектральный анализ является одним из самых мощных инструментов обработки сигналов экспериментов (см., например, книгу [Макс, 1983]). По характеру распределения значений физической величины спектры могут быть дискретными (линейчатыми), непрерывными (сплошными), а также представлять комбинацию (наложение) дискретных и непрерывных спектров. Для выделения параметров тех или иных процессов спектр, измеренный в эксперименте при помощи спектрометра, спектрографа, или оцененный по временной выборке аналого-цифрового преобразователя (АЦП), необходимо разделить на составляющие, т.е. выделить сплошной спектр, полосы, отдельные компоненты. Задача является некорректной из-за неполноты данных и имеет однозначное решение только при дополнительных предположениях о природе изучаемого объекта. Например, в оптической спектроскопии для определения компонент в спектрах излучения (поглощения) нужно описать форму уширения спектральной линии. В простейшем случае для ансамбля одинаковых осцилляторов линия может иметь лоренцовскую форму, если введено предположение о радиационном затухании колебаний (число световых импульсов подчиняется распределению Пуассона), гауссовскую форму, если излучатели участвуют в тепловом (броуновском) движении, лоренцовскую форму, если добавлены столкновения (плотный газ), смешанную форму Фойгта, в случае одновременного действия нескольких механизмов (см., например, работы [Seshadri, Jones, 1965; Ахманов, Никитин, 2004]). Для неоднородной системы нелинейных осцилляторов задача идентификации спектральных компонент еще более осложняется.

Спектральный анализ является также одним из традиционных инструментов обработки сигналов экспериментов по исследованию плазменной турбулентности (см., например, работы [Batanov, Bening, Korolev et al., 2003; Skvortsova, Korolev, Gorshenin, Malakhov, 2012]). Как известно, плазма является состоянием вещества с большим числом степеней свободы, поэтому расшифровка спектров плазменной турбулентности также является некорректной задачей. В этом случае спектр может быть приближен и моделью дробового шума, и моделью Колмогорова–Обухова (см. рис. 1, на котором представлен типичный спектр ионно-звуковой плазменной турбулентности). Очевидно, что при таком подходе никакой спектральной информации о механизмах турбулентности получено быть не может.

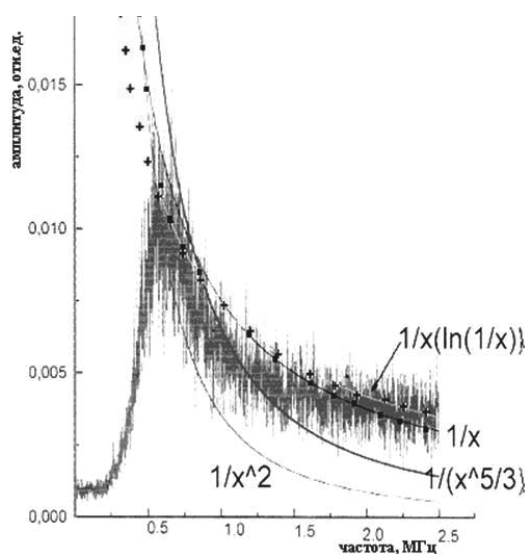


Рис. 1. Фурье-спектр флуктуаций структурной ионно-звуковой турбулентности

В последнее десятилетие в ходе исследований низкочастотных (до 100 МГц) пульсаций плазмы было обнаружено состояние сильной структурной низкочастотной турбулентности (см., например, работу [Korolev, Skvortsova, 2006]). Такое состояние возникает в стационарной плазме в открытой термодинамической системе с постоянным притоком и стоком энергии в результате развития переходных процессов: нарастания и насыщения неустойчивостей разной степени нелинейности и возникновения стохастических плазменных структур. Сильная структурная турбулентность описывается математической моделью неоднородного случайного блуждания с непрерывным временем — дважды стохастическим пуассоновским процессом, иначе называемым обобщенным процессом Кокса (см. работу [Skvortsova, Korolev et al., 2005]). На следующем этапе исследований (см., например, работу [Gorshenin, Malakhov, 2012]) необходимо перейти к анализу спектров, поскольку именно спектр дает возможность определить тип неустойчивости, механизм формирования турбулентности, доли ионно-звуковых солитонов и дрейфовых вихрей и т. д. Однако ранее идентификация спектра не могла быть проведена, потому что при известном числе процессов форма гармоник в амплитудном спектре осталась неизвестной.

Исследования низкочастотной структурной турбулентности проводятся на стеллараторе Л-2М методами доплеровской рефлектометрии [Pshenichnikov, Kolik, Malykh, Petrov et al., 2005] и рассеянием излучения второй гармоники гиротрона на флуктуациях [Skvortsova, Akulina, Batanov et al., 2010]. Комплексные фурье-спектры, измеренные рефлектометром на краю плазмы, изменяются разительно в интервале стационарных макропараметров плазмы. Не сохраняется форма и полуширина спектра. Доплеровский сдвиг, который связан с полоидальным вращением флуктуаций (и плазмы), изменяется в течение разряда в стационарных условиях более чем в четыре раза. Если бы мы оценивали скорость флуктуаций по этим данным, то скорость также должна была бы изменяться в четыре раза, то есть в стационарных условиях не сохраняется либо фазовая скорость колебаний, либо полоидальная скорость вращения плазмы (или радиальное электрическое поле), либо обе скорости. Также в течение разряда плазмы в стеллараторе Л-2М изменяется фурье-спектр коротковолновой турбулентности, измеренной методом рассеяния излучения гиротрона в центре плазмы. Было установлено, что структурная турбулентность в области измерения доплеровским рефлектометром описывается лишь тремя процессами, которые были определены по разложению гистограммы амплитуд приращений флуктуаций (см., например, работу [Batanov, Gorshenin, Korolev, Malakhov, Skvortsova, 2012]). В работе [Горшенин, Королев, Малахов, Скворцова, 2011] для изучения комплексных частотных спектров флуктуаций для оценки скорости их движения (суммарной фазовой и полоидальной) по частотному сдвигу, а также выделения стохастических процессов была предложена специальная бутстреп-процедура. Настоящая статья посвящена эмпирическому исследованию эффективности разработанного подхода на сериях спектров, полученных для двух типов низкочастотной плазменной турбулентности на краю и в центре плазменного шнура в стеллараторе Л-2М.

Метод анализа тонкой структуры процесса с помощью спектров

Приведем описание предложенной в работе [Горшенин, Королев, Малахов, Скворцова, 2011] бутстреп-процедуры. Для разложения спектра на гауссовские компоненты был использован следующий алгоритм. Спектр интерпретируется как плотность некоторого неизвестного вероятностного распределения (используется интерполяция кусочно-линейной функцией). Проинтегрировав данную функцию с точностью до нормировочного коэффициента получим функцию распределения, которую обозначим через \mathcal{F} . Затем находим квантиль x_α порядка α для функции распределения \mathcal{F} , то есть решаем уравнение (возможно, численно)

$$\mathcal{F}(x_\alpha) = \alpha.$$

Поступая так необходимое число раз, можно сформировать выборку \mathcal{X} из неизвестного распределения \mathcal{F} заранее заданного (и при этом сколь угодно большого) объема. Для этой выборки используем базовое предположение о том, что распределение \mathcal{F} представляет собой смесь нормальных законов (см., например, книгу [Королев, 2011]) с неизвестными параметрами, то есть

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^k p_i \Phi\left(\frac{x - a_i}{\sigma_i}\right), \quad (1)$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

— соответственно функция распределения и плотность стандартного нормального закона, $k \geq 1$ — известное натуральное число, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, k$. Величины Φ_1, \dots, Φ_k называются компонентами смеси, параметры p_1, \dots, p_k — весами соответствующих компонент. Задачей разделения смеси (1) принято называть задачу статистического оценивания неизвестных параметров p_i , a_i и σ_i по выборке. Для отыскания неизвестных параметров можно использовать различные методы. В данной работе будет использоваться классический ЕМ-алгоритм (см., например, работу [Dempster, Laird, Rubin, 1977]).

Применение бутстреп-процедуры к реальным данным

На встроенном языке программирования пакета MATLAB была создана программа бутстреп-анализа спектров [Горшенин, 2012], реализующая описанный в предыдущем разделе алгоритм. На вход программе подается ряд, соответствующий спектру. Далее в полностью автоматическом режиме осуществляется разложение данного спектра на компоненты. После проведения вычислений программа сохраняет на жесткий диск файл с параметрами компонент (веса, математические ожидания и дисперсии), рисует график (в черно-белом или цветном варианте по выбору пользователя), содержащий исходный спектр, приближающую кривую и каждую из компонент. В этом разделе будут рассмотрены примеры применения реализованного алгоритма к реальным данным.

На рис. 2 изображена эволюция во времени характерного для диагностики доплеровской рефлектометрии сглаженного полного комплексного спектра спектра для одной серии 58515 с 54 мс по 58 мс. Для уменьшения шумовых спектральных компонент спектр вычисляется с помощью метода Велча (см. книгу [Марпл-мл., 1990]). Исходные данные представляют набор выборок одинакового объема — 4096 элементов (такое количество наблюдений обеспечивает хорошее разрешение по частоте). Каждый такой ряд отвечает за определенный момент времени в работе диагностики и представляет собой двухсторонний спектр с нулевой частотой, эквивалентной несущей частоте специализированного сверхвысокочастотного (СВЧ) генератора. На рис. 2 приводятся спектры, соответствующие стационарному режиму по макропараметрам плазмы (то есть сохраняются неизменными такие величины как плотность, электронная температура и некоторые другие).

ЕМ-алгоритм запускался с 6 возможными компонентами в смеси на выборке из 30000 элементов. В качестве критерия останова использовалось соотношение

$$\max |\theta^{(m)} - \theta^{(m-1)}| < \varepsilon,$$

где $\theta^{(m)}$ — вектор всех оцениваемых параметров на m -м итерационном шаге, а ε — точность вычислений (многочисленные эксперименты с ЕМ-алгоритмом показали, что в качестве разумной точности, обеспечивающей корректные результаты и одновременно приемлемое время работы, удобно использовать значение 10^{-8}). На рис. 2 видно, что из шести компонент в каждом случае значимыми оказались лишь три, при этом их форма и положение сохраняются для каждого из рассмотренных временных интервалов. Вклад остальных компонент в итоговую кривую незначителен (их уровень лежит ниже значения экспериментальной ошибки измерения).

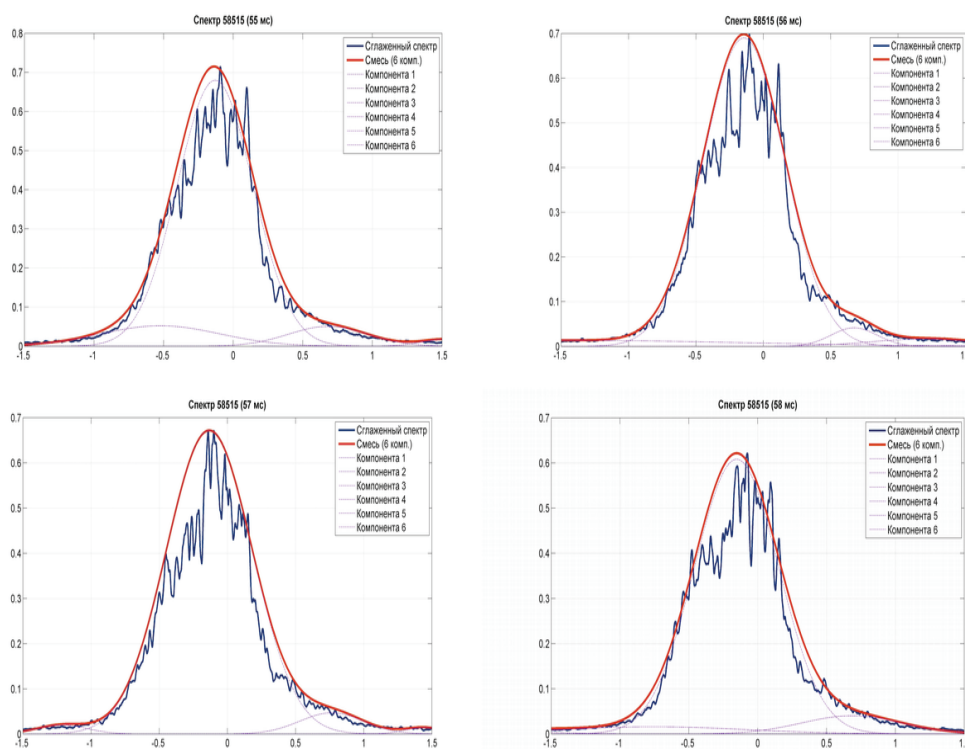


Рис. 2. Спектры 58515

Приближающая спектр кривая (смесь из шести компонент на рис. 2) сохраняет относительно стационарное положение относительно оси частот. Максимальная компонента в данном разложении спектра интерпретируется как доплеровский сдвиг, который в свою очередь прямо пропорционален скорости полоидального вращения плазмы в области работы диагностики доплеровского рефлектометра в тороидальной установке стелларатора Л-2М. Такое поведение максимальной компоненты соответствует физическим данным и позволяет вычислять полоидальную скорость вращения плазмы более точно, чем это дают другие методы обнаружения максимума в спектре. Остальные две значимые компоненты, вероятно, связаны с фазовыми скоростями флуктуаций.

Кроме данных с диагностики доплеровской рефлектометрии, дополнительно обрабатывались данные с диагностики рассеяния излучения на второй гармонике гиротрона (см. набор спектров, измеренных в разряде стелларатора 59 287 (51 мс — 56 мс) на рис. 3). Данная диагностика измеряет коротковолновые флуктуации плазмы вблизи центра плазменного шнура. Процедура анализа принципиально не отличается от анализа данных диагностики доплеровской рефлектометрии. Исходные данные представляют собой односторонний несимметричный фурье-спектр, убывающий с увеличением частоты (количество точек анализа, как и ранее, 4 096). Размер те-

стовых выборок в этом случае составлял также 30 000 элементов, ЕМ-алгоритм запускался с шестью возможными компонентами, точность расчетов 10^{-8} . Разложение спектра на компоненты в данном случае дает представление о поведении различных типов колебаний, существующих и эволюционирующих во времени в плазме. Из рис. 3 видно, что выделяются три доминирующие компоненты, у которых меняется пропорциональный состав. Это соответствует перекачке энергии между турбулентностями различного типа. Также после разложения получаются компоненты с малыми весами. С физической точки зрения их можно отнести к шумам, недостаточному отношению сигнал/шум в измерительном тракте и относительно низкому разрешению по амплитуде исходной временной выборки.

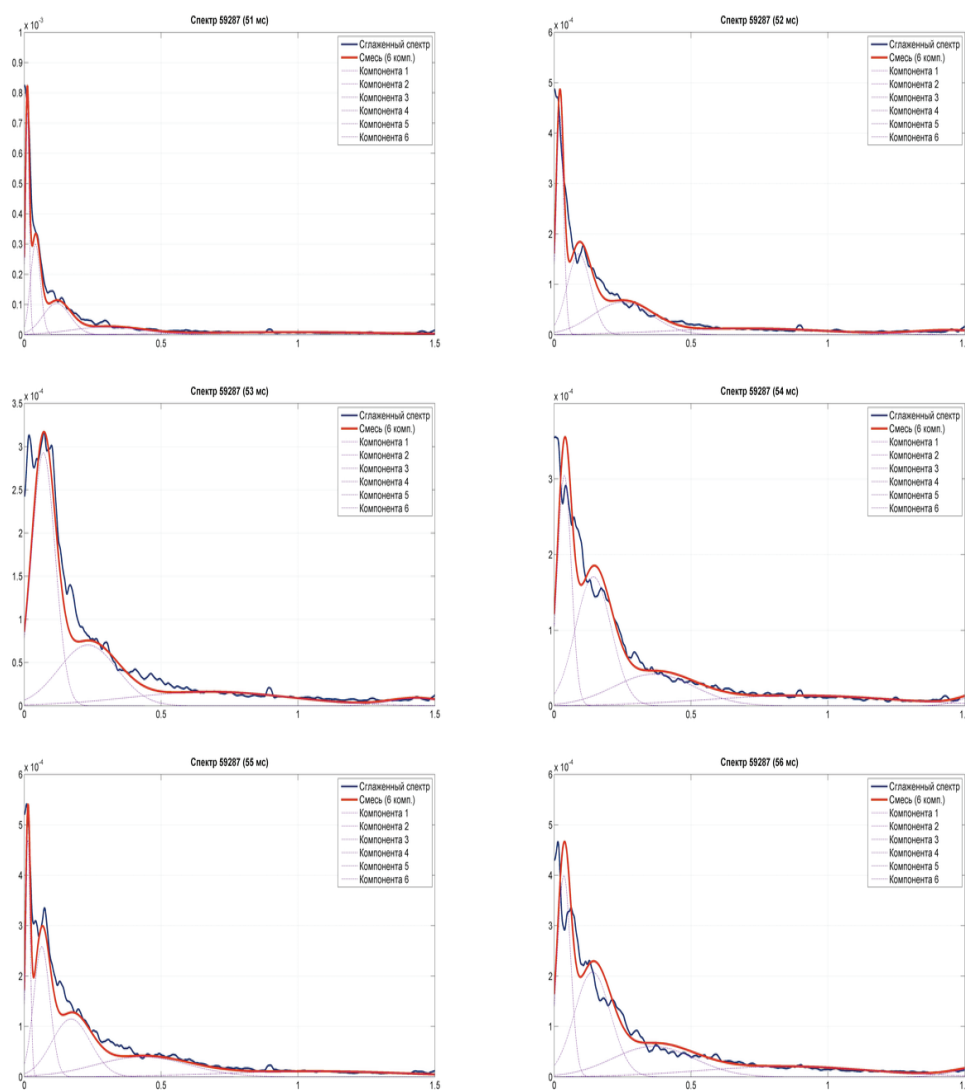


Рис. 3. Спектры 59287

Отметим, что подобные результаты получаются и для других серий диагностик, полученных в аналогичном режиме. Для сравнения рассмотрим (см. рис. 4) еще одну серию для набора спектров 59 679 (51 мс–56 мс), для которой размер тестовых выборок также составлял также 30 000 элементов, ЕМ-алгоритм запускался с шестью возможными компонентами, точ-

ность расчетов — 10^{-8} . Результаты и их интерпретация близки к упомянутой выше для серии 59 287.

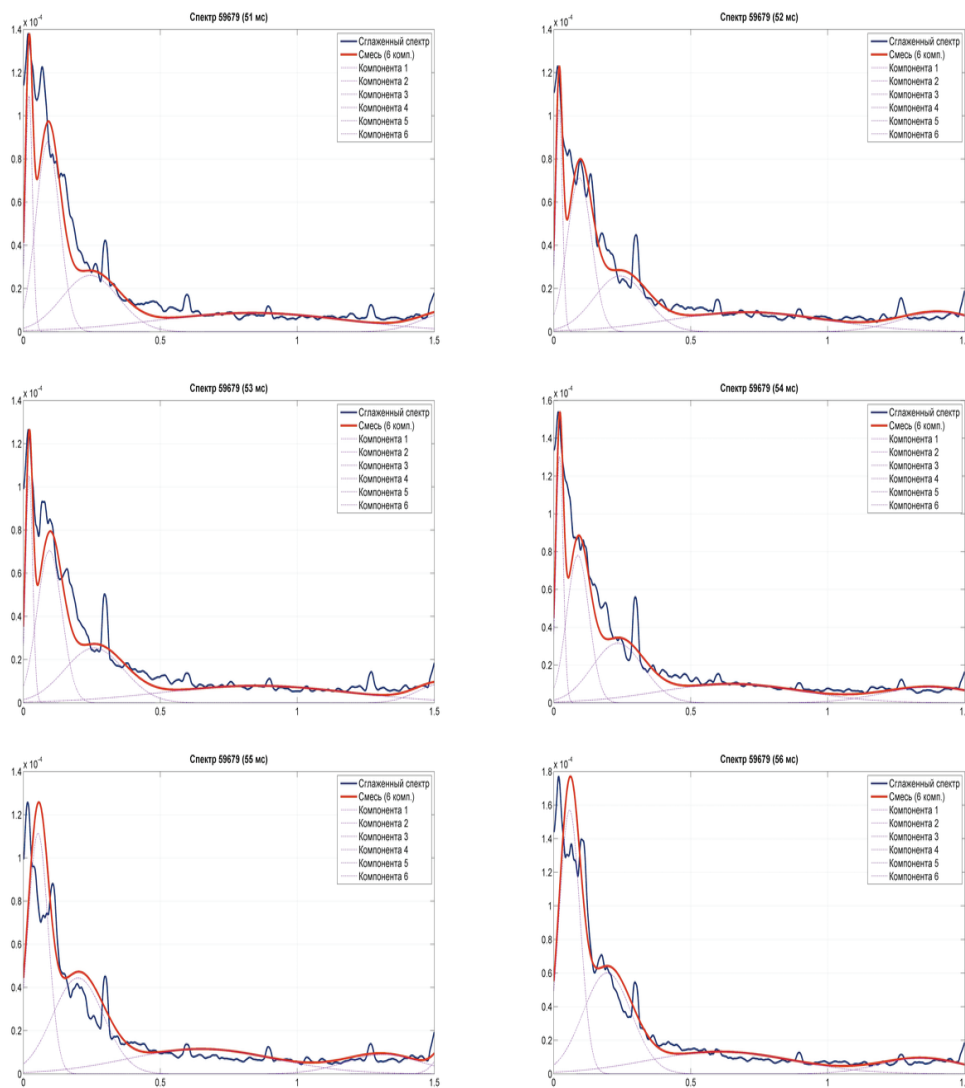


Рис. 4. Спектры 59 679

Для исследования структуры стохастического процесса возможно применение и другого подхода, основанного на непосредственной обработке временного ряда с помощью одного из видов интеллектуального анализа данных, называемого методом скользящего разделения смесей (СРС-метод, см., например, книгу [Королев, 2011]). Основной принцип этого подхода заключается в том, что мы разбиваем исходную выборку на некоторые подвыборки, обычно существенно меньшего размера, называемые окнами, и проводим анализ состояния системы на каждом из этих окон. Данный подход позволяет отследить динамическое изменение состояния системы во времени. Пример такого исследования для выборки, по которой строился спектр 59 287 (56 мс), представлен на рис. 5 для диффузионной компоненты и на рис. 6 для динамической компоненты.

В качестве метода расчетов также использовался классический ЕМ-алгоритм, размер окна составлял 200 элементов, точность вычислений — 10^{-7} . Вдоль оси абсцисс откладывается время (сдвиги окна). Вдоль оси ординат — значение параметра (среднеквадратического отклонения

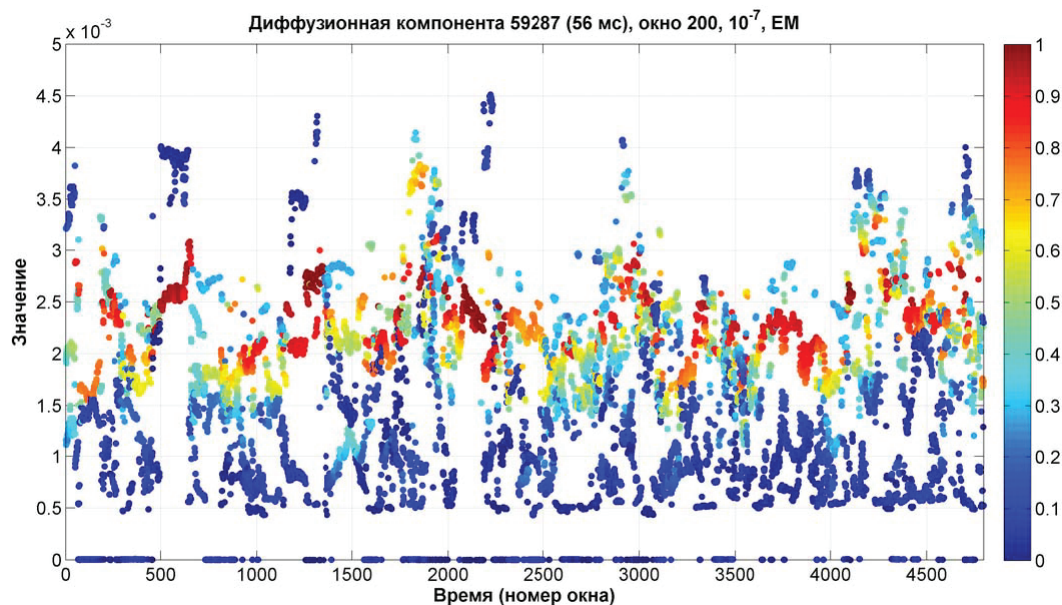


Рис. 5. Динамическая компонента для выборки, по которой был построен спектр 59287 (56 мс)

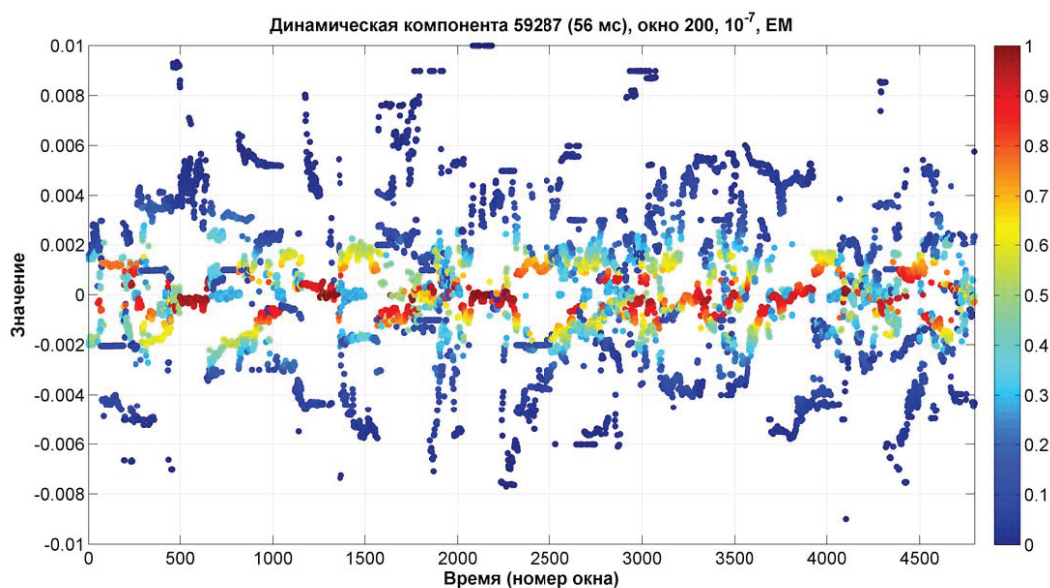


Рис. 6. Диффузионная компонента для выборки, по которой был построен спектр 59287 (56 мс)

и математического ожидания для диффузионной и динамической компоненты соответственно). Градация цвета согласно шкале в правой части графиков обозначает величину веса каждой оценки. На графиках четко выделяются 3–4 компоненты, что хорошо согласуется с уже упоминавшимися ранее полученными результатами для выборок, полученных в различных режимах на экспериментальных установках (см. работу [Batanov, Gorshenin, Korolev, Malakhov, Skvortsova, 2012]).

Заключение

Как видно из проведенных расчетов, предложенная методология весьма успешно справляется с задачей приближения спектра и разделения его на компоненты, при этом их число и форма сохраняются внутри характерных областей в серии. Полученное число значимых компонент в разложении спектра хорошо согласуется с физической сутью изучаемых процессов, так как в реальных данных количество формирующих процессов хоть и велико, но значимыми оказываются как раз не более 3–4 компонент. Таким образом, исследования в данной области представляют значительный интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения. С помощью физической интерпретации компонент появляется возможность построения более точных моделей функционирования турбулентной плазмы.

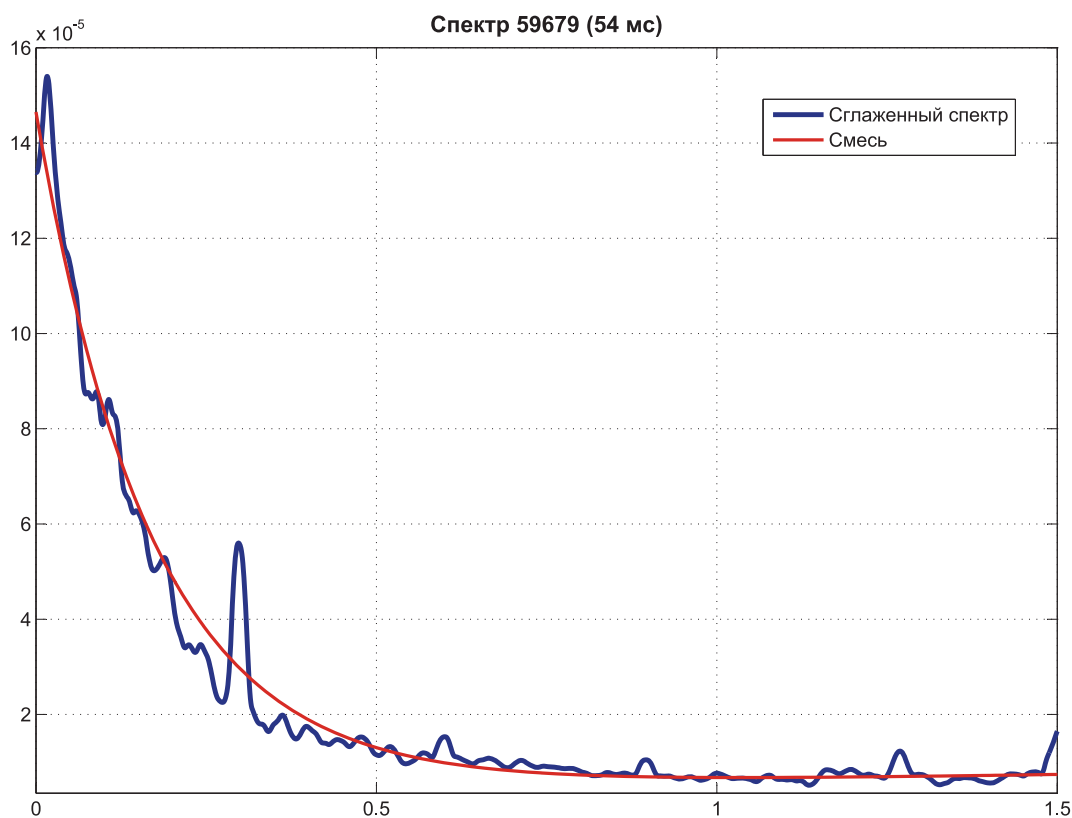


Рис. 7. Приближение спектра 59679 (54 мс) с помощью смеси гамма-распределений

Помимо модели, основанной на смесях нормальных законов, достаточно разумным представляется использование и смесей гамма-распределений. Кроме успешного опыта применения такой модели для анализа информационных потоков (см., например, работу [Gorshenin, Doynikov, Korolev, Kuzmin, 2012]), отметим энтропийные свойства гамма-распределения и визуальную схожесть формы одностороннего спектра с видом плотности соответствующего распределения. Небольшая иллюстрация применения смесей гамма-распределений для одного из спектров с 59 679 для 54 мс приведена на рис. 7. В таком варианте результирующая кривая может интерпретироваться как некоторое *сглаживание* для спектра. Отметим, что дальнейшая работа по исследованию данных может проводиться и с помощью других методов, не только использованного в настоящей статье классического ЕМ-алгоритма, но и различных его модификаций (см., например, статью [Gorshenin, Korolev, Kuzmin, 2012]).

Список литературы

- Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. — М.: Наука, 2004.
- Горшенин А. К. Программа бутстреп-анализа спектров. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012617918 от 31.08.2012.
- Горшенин А. К., Королев В. Ю., Малахов Д. В., Скворцова Н. Н. Анализ тонкой стохастической структуры хаотических процессов с помощью ядерных оценок // Математическое моделирование, 2011. — Т. 23. № 4. — С. 83–89.
- Королев В. Ю. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 512 с.
- Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. — М.: Мир, 1983. — Т. 1, 2.
- Марпл-мл. С. П. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1990.
- Batanov G. M., Bening V. E., Korolev V. Yu. et al. G. M. Low-Frequency Structural Plasma Turbulence in the L-2M Stellarator // JETP Letters, 2003. — Vol. 78 (8). — P. 502–510.
- Batanov G. M., Gorshenin A. K., Korolev V. Yu., Malakhov D. V., Skvortsova N. N. The evolution of probability characteristics of low-frequency plasma turbulence // Mathematical Models and Computer Simulations, 2012. — Vol. 4, No. 1. — P. 10–25.
- Dempster A., Laird N. and Rubin D. Maximum likelihood estimation from incompleated data // Journal of the Royal Statistical Society, 1977. — Series B. — Vol. 39(1). — P. 1–38.
- Gorshenin A., Doynikov A., Korolev V. and Kuzmin V. Statistical Properties of the Dynamics of Order Books: Empirical Results // VI International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems» (Autumn Session, 2012). Book of Abstracts. M.: Institute of Informatics Problems, RAS, 2012. — P. 31–51.
- Gorshenin A., Korolev V. and Kuzmin V. Coordinate-Wise Versions of the Grid Method for Separation of Mixtures of Two-Parameter Distributions // VI International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems» (Autumn Session, 2012). Book of Abstracts. M.: Institute of Informatics Problems, RAS, 2012. — P. 51–57.
- Gorshenin A. K., Malakhov D. V. Evolution of histograms and Fourier spectra in structural plasma turbulence in L-2M stellarator // XXX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VI International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems». Book of Abstracts. M.: Institute of Informatics Problems, RAS, 2012. — P. 26–27.
- Korolev V. Yu., Skvortsova N. N. (Eds) Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence. Utrecht: VSP, 2006.
- Pshenichnikov A. A., Kolik L. V., Malykh N. I., Petrov A. E. et al. The Use of Doppler reflectometry in the L-2M stellarator // Plasma Phys. Rep, 2005. — Vol. 31 (7). — P. 554–561.
- Seshadri K., Jones R. The shapes and intensities of infrared absorption bands // Physics-Uspekhi, 1965. — Vol. 85, No. 1. — P. 87–145.
- Skvortsova N. N., Akulina D. K., Batanov G. M. et al. Effect of ECRH Regime on Characteristics of Short-Wave Turbulence in Plasma of the L-2 // Plasma Phys. Control. Fusion, 2010. Vol. 52. 055008.
- Skvortsova N. N., Korolev V. Yu., Gorshenin A. K., Malakhov D. V. Investigation of harmonics of Fourier spectra of non-Gaussian processes of structural plasma turbulence // XXX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VI International Workshop «Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems». Book of Abstracts. M.: Institute of Informatics Problems, RAS, 2012. — P. 75–76.
- Skvortsova N. N., Korolev V. Yu., Maravina T. A., Batanov G. M. et al. New Potentialities of Mathematical Simulation of Turbulent Transport Processes in Plasma // Plasma Physics Reports, 2005. — Vol. 31 (1). — P. 64–83.