

УДК: 532.5

Компьютерное моделирование тепломассообменных процессов в микроканалах с использованием CFD-пакета σ Flow

А.С. Лобасов^{1,а}, А.В. Минаков^{1,2}

¹ ФГОАУ ВПО «Сибирский федеральный университет»,
Россия, 660074, г. Красноярск, ул. Ак. Киренского, 28

² Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, 1
E-mail: ^аperpetuityrs@mail.ru

Получено 9 августа 2012 г.,
после доработки 31 октября 2012 г.

Данная работа посвящена численному моделированию тепломассообменных процессов в микроканалах. Микроканалы — каналы, характерный диаметр которых порядка 100 мкм, интерес к изучению процессов в которых растёт с каждым годом, в связи с бурным развитием микрофлюидной техники. Исследование проводилось с помощью программного комплекса σ Flow. Были рассмотрены изотермические и неизотермические течения в микроканалах различной конфигурации. Полученные результаты сравнивались с имеющимися экспериментальными или аналитическими данными и в целом для всех задач получено хорошее их согласование.

Ключевые слова: микроканалы, CFD, микрофлюидная техника, численное моделирование

Numerical simulation of heat and mass transfer processes in microchannels using CFD-package σ Flow

A.S. Lobasov¹, A.V. Minakov^{1,2}

¹ Siberian federal university, Kirenskogo str. 28, Krasnoyarsk, 660074, Russia

² Institute of thermal physics SB RAS, Lavrentiev av. 1, Novosibirsk, 630090, Russia

Abstract. — This article is dedicated to numerical modeling of heat and mass transfer processes in microchannels. Microchannels are channels, that characteristic diameter is about 100 μm . Interest to the study of processes in them is growing every year, due to the rapid development of microfluid technique. The study was conducted using the software package σ Flow. Isothermal and nonisothermal flows in microchannels of various configurations were considered. The obtained results were compared with available experimental and analytical data. In general for all problems a good agreement was obtained.

Keywords: microchannels, CFD, microfluid technique, numerical modelling

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, pp. 781–792 (Russian).

Введение

На сегодняшний день в настоящих и будущих теплообменных приложениях становится всё более и более важным применение микромасштабных охлаждающих устройств, таких как микроканальные теплоприёмники, которые обеспечивают высокие значения коэффициента теплопередачи при течении жидкостей в относительно небольших объёмах. В особенности течение хладагента через большое число вырезанных или вытравленных микроканалов, с целью теплоотведения и поддержания постоянной температуры в микроэлектромеханических системах, интегрированных электрических цепях, лазерно-диодных массивах, высокоэнергетических отражателях и других микроустройствах, подверженных кратковременным высоким тепловым нагрузкам, охлаждение электроники, управление температурными режимами в аэрокосмической индустрии, МЭМС устройства для биологических и химических исследований и т. д. По мере развития микро- и нанотехнологий и внедрения их в различные отрасли человеческой деятельности (электроника, химическая, биологическая, пищевая индустрии) все чаще возникают задачи о течении жидкости в микро- и наноканалах. Микроканалы — каналы, характерный диаметр которых порядка 100 мкм, в настоящее время получили очень широкое распространение в различных приложениях. Их применяют для транспорта наночастиц, бактерий, молекул ДНК, охлаждения микроэлектронных устройств, в качестве химических реакторов для микроскопических количеств вещества и многого другого.

Одно из бурно развивающихся направлений микросистемной техники — микрофлюидные системы. Согласно современной терминологии, флюидное микроустройство обеспечивает выполнение функций за счет локализации, течения, разделения, хранения микро- и нанокolicеств жидкости или газа, а также их физико-химических превращений под действием внешних электрических, магнитных, оптических, механических, тепловых и химических воздействий.

В соответствии с этим определением к микрофлюидной технике можно отнести, во-первых, все микромасштабные устройства, являющиеся прямыми аналогами макромасштабного оборудования современных технологий обработки жидких и газообразных веществ, а во-вторых — принципиально новые микрофлюидные устройства, не имеющие аналогов в макромире в связи с особыми, специфическими условиями протекания процессов в микроразмерных элементах микрофлюидных систем.

Эти особые условия связаны с качественным скачком при переходе к размерам менее 100 мкм, когда обрабатываемые среды еще могут рассматриваться как непрерывные континуумы, но за счет малых поперечных размеров каналов микрофлюидных систем радикальным образом изменяется соотношение силовых, энергетических и массовых потоков. В частности, ослабевают роль массовых (объемных) факторов (гравитационные, центробежные, инерционные силы) и возрастает роль поверхностных сил (капиллярных, вязких). Во многих случаях это смещение баланса потоков поддается управлению и может использоваться в целях многократной интенсификации процессов, для создания комбинации технологических условий, не достижимых в обычном оборудовании, а также для получения уникальных продуктов и материалов.

Развитие новых приложений, для которых главным требованием является возможность охлаждения различных жидких и газообразных веществ в ограниченном пространстве, заставляет многих исследователей сфокусироваться на изучении и предсказании тепло- и гидродинамических процессов в мини- и микроканалах. Одним из методов исследования таких процессов является использование численного моделирования, в частности, CFD-пакета SigmaFlow, возможность применения которого показана в работе [Minakov, Rudyak, Gavrilov, Dekterev, 2010]. Несмотря на микронные, а в некоторых случаях даже нанометровые размеры каналов, течения в них описываются в рамках классической гидродинамики.

Математическая модель и основные моменты численной методики

Как известно, в обычных условиях течения жидкостей и не слишком разреженных газов вполне можно описывать методами механики сплошной среды. Однако в микроканалах ситуа-

ция существенно меняется. В этих условиях течения жидкости и газа, как правило, следует описывать по-разному. Действительно, если газ не слишком плотный (до давлений примерно 10–20 атм) соответствующее число Кнудсена Kn таких микротечений изменяется в пределах $10^{-2} \leq Kn \leq 10^2$. В этом диапазоне чисел Кнудсена течение уже не описывается уравнениями гидродинамики. Точнее, на нижнем пределе все еще можно использовать уравнения Навье–Стокса, но с граничными условиями скольжения. Затем примерно до чисел Кнудсена $Kn \sim 10^{-1}$ необходимо применять уравнения Барнетта, а потом — кинетическое уравнение Больцмана. При этом стоит иметь в виду, что к использованию уравнений Барнетта необходимо относиться с осторожностью. Строго говоря, они не полные и не учитывают эффектов памяти.

Таким образом, начиная примерно с 50 мкм, для моделирования микротечений газа нельзя применять обычные гидродинамические методы. Для моделирования течений газа в таких условиях можно использовать метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (ПСМ). Однако скорости течений в микроканалах обычно не велики, а в этих условиях метод ПСМ работает неудовлетворительно. Реального продвижения можно добиться, решая для данных задач полное уравнение Больцмана или применяя метод молекулярной динамики. Для использования последнего необходимо порядка $10^5 \div 10^6$ молекул в ячейке. Вычислительные затраты при этом будут колоссальными.

С микротечениями жидкостей ситуация немного проще, поскольку приближение сплошной среды здесь работает для каналов гораздо меньших размеров, чем для газов.

В рамках гидродинамического подхода, использованного в данной работе, микротечения моделируются посредством решения уравнений Навье–Стокса. Многочисленные натурные эксперименты [1] показывают, что для жидкостей такое описание адекватно для микроканалов с минимальным характерным размером порядка 1 мкм. Сегодня известно немало алгоритмов, позволяющих решить такую задачу. Это и различные модификации метода Галеркина, включая спектральные методы и методы конечных элементов и конечных объемов, различные бессеточные методы (см. [Karnidakis, 2005] и цитированную там литературу).

В данной работе для моделирования течений и теплообмена в микроканалах использовался CFD пакет SigmaFlow – универсальный некоммерческий программный продукт для решения широкого класса задач гидродинамики, тепломассообмена и горения, развиваемый специалистами Красноярского филиала Института теплофизики СО РАН и кафедры теплофизики Сибирского федерального университета [Rudyak, 2008; А. А. Гаврилов, 2010; А. А. Гаврилов, 2010]. В работе рассматриваются несжимаемые течения ньютоновских жидкостей, которые описываются уравнениями Навье–Стокса.

Уравнение неразрывности:

$$\nabla v = 0, \quad (1)$$

где v — вектор скорости м/с.

Уравнение переноса импульса:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \cdot v) = -\nabla p + \nabla \tau, \quad (2)$$

где ρ — плотность, кг/м³; t — время, с; p — давление, Па. Тензор вязких напряжений равен

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где μ — молекулярная вязкость, Па·с.

Уравнение сохранения энергии рассматривается в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla(\rho v h) = \nabla(\lambda \nabla T) + S_h, \quad (3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, T — температура среды, S_h — источниковый член, отвечающий за приток (отток) энергии в процессе химического реагирования, излучения или каких-либо других процессах.

Энтальпия среды вычисляется как

$$h(T) = \int_{T_0}^T C_p(T) dT. \quad (4)$$

Удельная теплоемкость компонент задается в виде полинома 4-й степени от температуры:

$$C_p(T) = Z_2 + \sum_{m=2}^5 Z_{m+1} T^{m-1}.$$

Температура среды T в каждой точке рассчитывается из уравнения (4) по вычисленному из уравнения (3) значению энтальпии h .

В качестве граничных условий на стенках каналов для компонент вектора скорости во всех случаях использовались условия прилипания.

Детальное описание численного алгоритма программы SigmaFlow приведено в работах [Rudyak, 2008; А. А. Гаврилов, 2010; А. А. Гаврилов, 2010]. Здесь же отметим основные моменты численной методики. Разностный аналог конвективно-диффузионных уравнений находится с помощью метода конечного объема [Патанкар, 1984; Быстров, 2005; Ferziger, 2002] для неструктурированных сеток. В этом случае полученная схема автоматически оказывается консервативной. Суть метода заключается в разбиении расчетной области на контрольные объемы и интегрировании исходных уравнений сохранения по каждому контрольному объему для получения конечно-разностных соотношений. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса осуществляется соответственно с помощью противопоточных схем второго порядка QUICK [Leonard, 1979]. Для аппроксимации нестационарных слагаемых уравнений гидродинамики применяется неявная схема второго порядка. Диффузионные потоки и источниковые члены аппроксимируются конечно-объемными аналогами центрально-разностных соотношений со вторым порядком точности. Связь между полями скорости и давления, обеспечивающая выполнение уравнения неразрывности, реализуется при помощи SIMPLE-C процедуры на совмещенных сетках [Патанкар, 1984; Быстров, 2005]. Для устранения осцилляций поля давления используется подход Рхи-Чоу, заключающийся во введении монотонизатора в уравнения для поправки давления [Рхи, 1984]. Полученные в результате дискретизации исходной системы дифференциальных уравнений разностные уравнения решаются итерационным способом с применением алгебраического многосеточного решателя AMG [Trottenberg, 2001].

Разработанный алгоритм применялся при решении широкого круга задач внешнего и внутреннего обтекания [Rudyak, 2008; А. А. Гаврилов, 2010; А. А. Гаврилов, 2010]. Вместе с тем его применимость для описания микротечений требовала специального тестирования.

Моделирование изотермических течений в микроканалах

Было рассмотрено установившееся ламинарное течение жидкости в микроканале круглого и треугольного сечения. На рис. 1 представлены расчётные сетки для моделируемых микроканалов и распределение модуля скорости в поперечном сечении канала. Длина каждого из них — 1 000 мкм, число Рейнольдса равно единице. Расчетные сетки: для круглого микроканала $10 \times 10 \times 10$ узлов и $40 \times 40 \times 10$ узлов, диаметр канала был равен 100 мкм; для треугольного микроканала $20 \times 20 \times 10$ узлов и $100 \times 100 \times 10$ узлов, длина стороны — 100 мкм. Задачи о установившемся ламинарном течении жидкости в прямолинейных трубах имеют аналитические решения, которые описаны в литературе [Лойцянский, 1987]. Согласно аналитике, связь расхода жидкости G с перепадом давления Δp на участке трубы длины l определяется следующим

образом: $G = \frac{a^4 \sqrt{3} \Delta p}{320 \mu l}$ — для трубы треугольного сечения с длиной стороны равной a ;

$G = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu l}$ — для трубы круглого сечения радиуса r .

Установившееся распределение скорости в трубе:

$w(x, y) = \frac{\Delta p \cdot y}{2\sqrt{3}\mu a l} \cdot \left(y - \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(y + \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$ — для трубы треугольного сечения;

$w(x, y) = \frac{r^2 \Delta p}{4\mu l} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right)$ — для трубы круглого сечения.

Эти решения были сопоставлены с численными расчётами, и получено хорошее согласование по величине перепадов давления, представленных в таблице 1, и по форме профилей скорости, проведённых через центральное сечение канала, представленных на рис. 2.

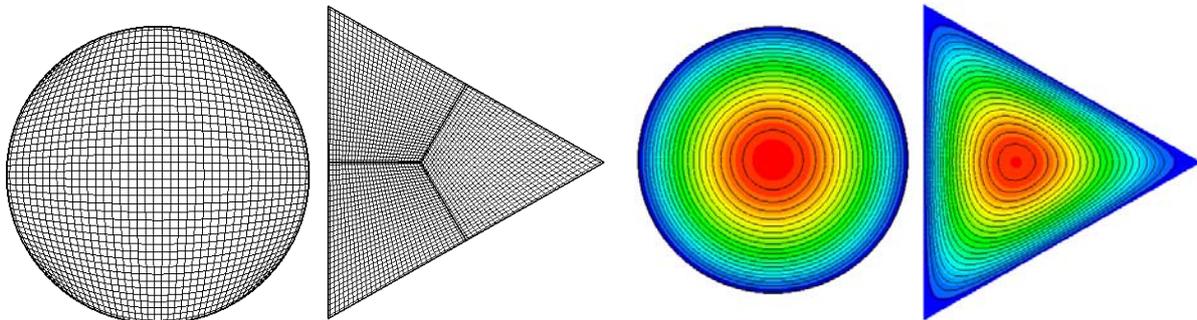


Рис. 1

Таблица 1

Re	$\Delta p_{\text{аналит.}}$, Па	$\Delta p_{\text{расчёт.}}$, Па	$\varepsilon = \Delta p_{\text{аналит.}} - \Delta p_{\text{расчёт.}} / \Delta p_{\text{аналит.}}$, %
Круглый микроканал			
1	3.2	3.199	0.018
10	32	31.995	0.017
100	320	319.994	0.018
1000	3200	3199.559	0.014
Треугольный микроканал			
1	8	7.997	0.036
10	80	79.968	0.039
100	800	799.68	0.04
1000	8000	7996.777	0.04

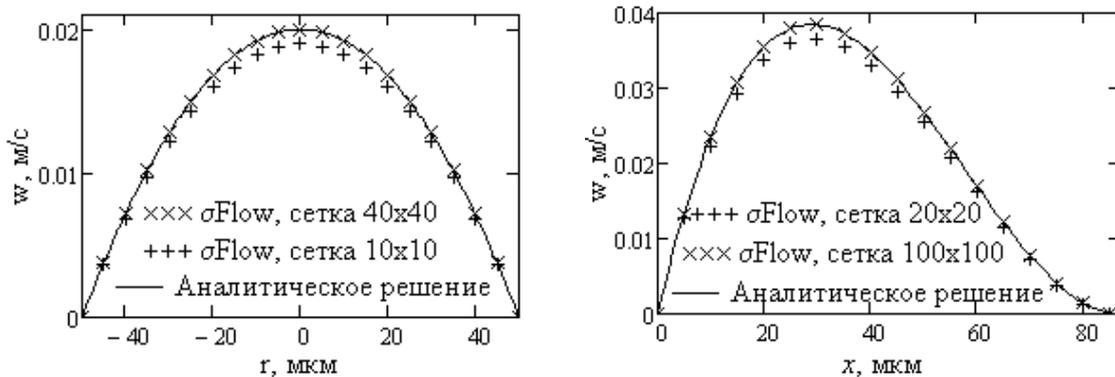


Рис. 2

Как видно из таблицы и графиков, отклонение численного решения от аналитического не превышает десятых долей процента.

Также рассмотрено ламинарное течение ньютоновской жидкости в микродиффузоре, микрофотография которого приведена на рис. 3. Ширина узкой части канала — 150 мкм, ширина широкой части — 750 мкм, толщина канала — 100 мкм. Жидкость движется из узкой части канала в широкую часть. На твердых стенках заданы условия прилипания. На входе фиксирован расход жидкости, соответствующий значению числа Рейнольдса, равному 1.

На рис. 3, так же, в виде изолиний модуля скорости и давления, приведена качественная картина течения в диффузоре.

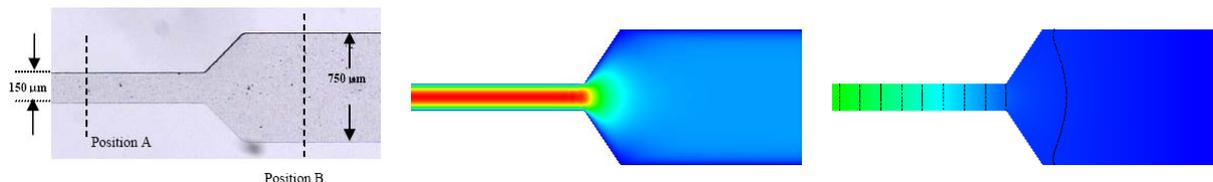


Рис. 3

На рис. 4 приведено количественное сопоставление расчета с данными MicroPIV измерений из работы [Ferziger, 2002]. Сопоставление проведено по профилю осевой компоненты скорости в сечении В на рис. 3. Обезразмеривание проведено на величину максимальной в этом сечении скорости.

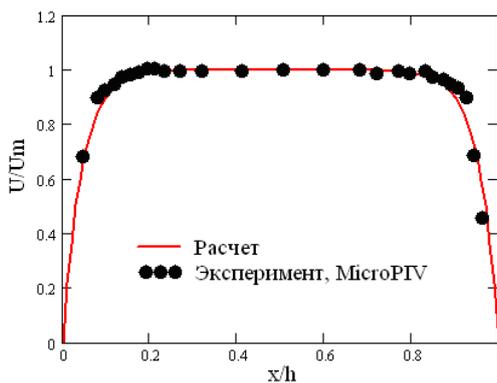


Рис. 4

Кроме того, было рассмотрено ламинарное течение ньютоновской жидкости в микротройнике, микрофотография которого приведена на рис. 5. Ширина канала всюду равна — 100 мкм, толщина канала также равна — 100 мкм. Жидкость движется по каналу слева направо, так, как это показано на рис. 5. На твердых стенках заданы условия прилипания. На входе в тройник фиксирован расход жидкости, соответствующий значению числа Рейнольдса, равному 1. Также, на рисунке 5 в виде изолинии модуля скорости и давления приведена качественная картина течения в тройнике.

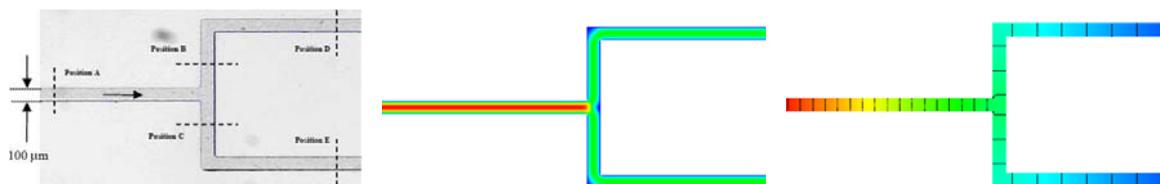


Рис. 5

На рис. 6 приведено количественное сопоставление расчета с данными MicroPIV измерений из работы [Ferziger, 2002]. Сопоставление проведено по профилям осевой компоненты

скорости в сечениях А и В на рис. 5. Обезразмеривание проведено на величину среднерасходной скорости.

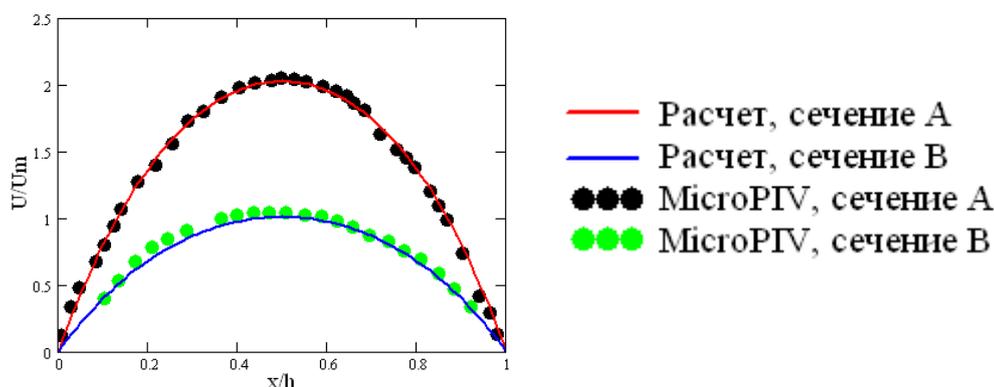


Рис. 6

Моделирование теплообменных процессов в микроканалах

С помощью пакета *σFlow* было проведено моделирование процесса теплообмена в прямом канале круглого сечения. Канал представляет собой круглую трубу длиной $l = 2000$ мкм и диаметром $d = 100$ мкм. Теплофизические свойства среды представлены в таблице 2.

Таблица 2

Молекулярная вязкость, μ	0.001 Па·сек
Коэффициент теплопроводности, λ	1.4 Вт/(м·К)
Теплоёмкость, C_p	4200 Дж/(кг·К)
Плотность, ρ	1000 кг/м ³
Число Прандтля, Pr	3
Массовый расход, G	0.7854 мг/с
Среднемассовая скорость, v	0.1 м/с

В первом граничном случае на стенках канала задавалась постоянная температура $T_c = 293$ К. Площадь боковой поверхности канала равна 0.3141 мм². Температура среды на входе в канал $T_{ж} = 283$ К. Также на входе в канал задавался параболический профиль скорости. Расчёт производился на трёхмерной пятиблочной сетке со сгущением к стенкам канала, каждый блок которой содержал $30 \times 30 \times 150$ ячеек, всего 675 000 ячеек. Количественной характеристикой, которая вычислялась в результате расчёта, было локальное число Нуссельта на стенке. Число Нуссельта вычислялось при помощи температуры ядра потока [Цветков, 2005]:

$$T_b(x) = T_{ж} + \frac{P}{G \cdot c_p} \cdot \int_0^x q_c(x) dx = T_{ж} + \frac{4}{Re \cdot \mu \cdot c_p} \cdot \int_0^x q_c(x) dx,$$

где P — периметр поперечного сечения, q_c — плотность теплового потока на стенке, и коэффициента теплоотдачи на стенке [Цветков, 2005]:

$$Nu(x) = \frac{d \cdot q_c(x)}{\lambda \cdot (T_c - T_b(x))}.$$

На рис. 7 показано распределение профиля температуры по длине канала. На рис. 8 показано изменение числа Нуссельта по длине канала. Как видно из этого рисунка, местное число

Нуссельта асимптотически стремится к интегральному значению, которое для ламинарного режима и постоянной температуре стенки является константой, равной 3.66.

Эмпирическая зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рейнольдса (Re):

$$\text{Nu}(\text{Re}) = 1,55 \cdot \left(\text{Re} \cdot \text{Pr} \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}},$$

в данной постановке справедлива для $\text{Re} \geq 250$.

На рис. 9 показана зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рейнольдса.

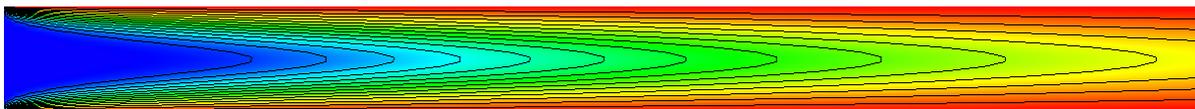


Рис. 7

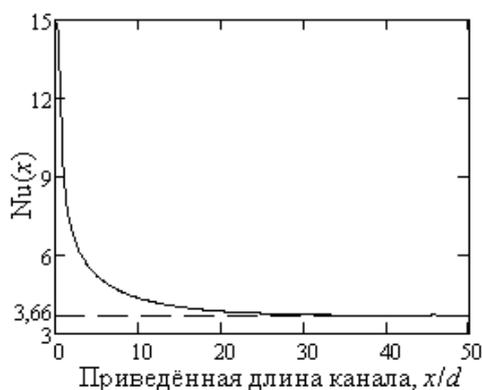


Рис. 8

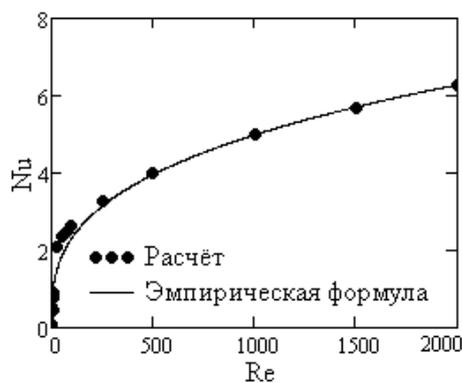


Рис. 9

Во втором граничном случае на стенках канала задавалась постоянная плотность теплового потока, равная 10 МВт/м^2 . Количественной характеристикой, которая вычислялась в результате расчёта, также было локальное число Нуссельта на стенке.

Для данного случая температура ядра потока вычисляется следующим образом [Цветков, 2005]:

$$T_b(x) = T_{\text{ж}} + \frac{q_c \cdot P \cdot x}{G \cdot c_p} = T_{\text{ж}} + \frac{4 \cdot q_c \cdot x}{\text{Re} \cdot \mu \cdot c_p},$$

а коэффициент теплоотдачи на стенке:

$$\text{Nu}(x) = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{q_c}{T_c(x) - T_b(x)}.$$

На рис. 10 показано распределение профиля температуры по длине канала.

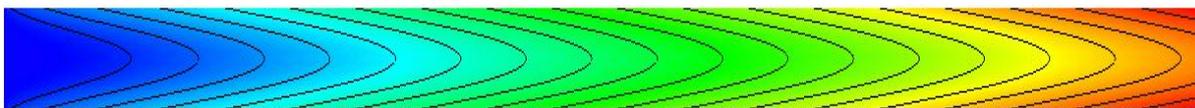


Рис. 10

При постоянной плотности теплового потока на стенке круглого канала среднемассовая температура жидкости линейно изменяется по длине трубы [Цветков, 2005]:

$$\bar{\Theta} = \frac{(\bar{T} - T_{\text{ж}}) \lambda}{q_c \cdot d} = \frac{4}{\text{Re}} \cdot \frac{x}{d},$$

где $\bar{\Theta}$ — безразмерная среднemasсовая температура жидкости, \bar{T} — среднemasсовая температура жидкости, Re — число Пекле.

На начальном термическом участке $0 \leq x \leq l_{нт.}$ ($l_{нт.} = 0.07 \cdot d \cdot Pe$) местное значение коэффициента теплоотдачи падает с ростом x . Результаты теоретического расчёта на этом участке приближённо описываются уравнением [Цветков, 2005]:

$$Nu = 1.31 \cdot \left(\frac{1}{Pe} \cdot \frac{x}{d} \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Сопоставление результатов расчёта с аналитическим решением, полученным по данной формуле, показано на рис. 11.

Выражение для числа Нуссельта, справедливое для всего участка теплообмена [Цветков, 2008]:

$$Nu = 4.36 + 1.31 \left(\frac{1}{Pe} \cdot \frac{x}{d} \right)^{-\frac{1}{3}} e^{-13 \sqrt{\frac{1}{Pe} \cdot \frac{x}{d}}}.$$

На рис. 12 представлена зависимость местного числа Нуссельта от числа Рейнольдса и сопоставление результатов расчёта с аналитическим решением, полученным по данной формуле. Как видно из этого рисунка, местное число Нуссельта асимптотически стремится к интегральному значению, которое для ламинарного режима и постоянной плотности теплового потока на стенке является константой, равной 4.364.



Рис. 11

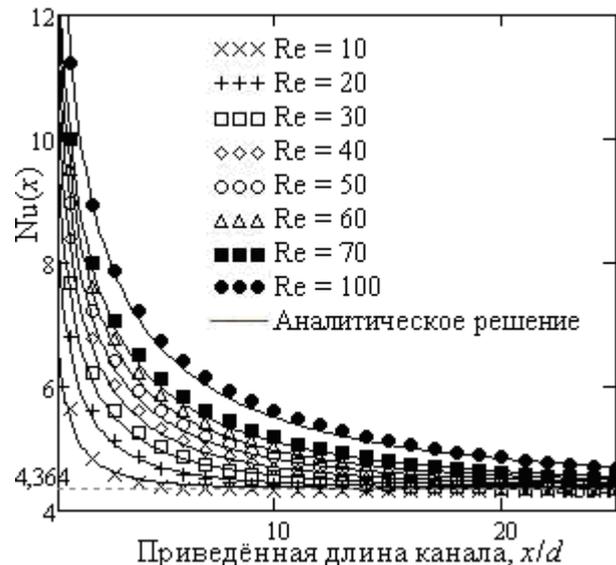


Рис. 12

Таким образом, анализ сопоставления результатов численного моделирования с аналитическими решениями показал хорошее согласование данных как качественно, так и количественно.

Также было проведено моделирование теплообмена в Т-образном микроканале. Геометрия канала показана на рис. 13: ширина канала — 0.5 мм, высота — 1 мм, длина канала смешения — 3 мм, длина входных каналов — 1.25 мм. Рабочей жидкостью являлась вода. Во входных каналах задавался постоянный массовый расход в 1.5 г/ч. Температура жидкости на одном входе была равна 27 °С, на другом — 55 °С.

Для корректного описания процессов теплообмена в прямоугольном Т-образном микромиксере тепловое смешение делится на зону Т-образного соединения (a-b-c-d) и канал смешения, как

это показано на рис. 13. В зоне Т-образного соединения горячая и холодная деионизованная вода течёт соосно по двум входным рукавам. Тепловое перемешивание начинается при их контакте. Число Рейнольдса меньше единицы, поток ламинарный. В процессе теплового перемешивания в канале смешения преобладает теплопроводность. Для расчета использовалась декартова двух-блочная сетка, состоящая из 245 000 узлов и сгущенная к области слияния потоков.

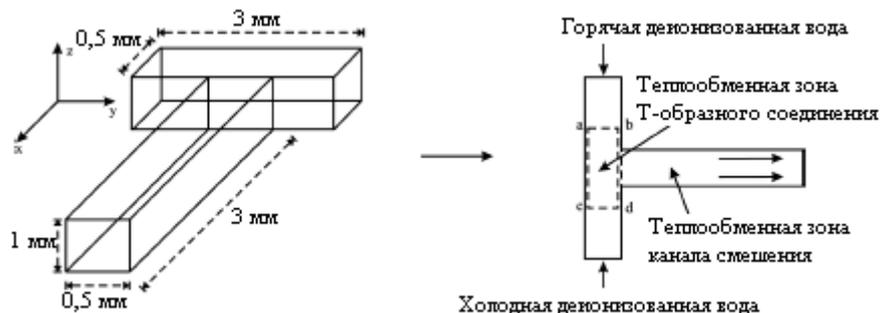


Рис. 13

Результаты численного моделирования сопоставлялись с экспериментальными данными [Ху, 2010]. На рис. 14 показано качественное сравнение расчётного и экспериментального профиля температуры в центральном сечении Т-образного канала. На рис. 15 показано распределение температуры жидкости в сечении, перпендикулярном каналу смешения, на расстояниях от входа в этот канал, равных 0 мкм, 25 мкм, 50 мкм и 75 мкм соответственно, и приведены экспериментальные значения температур для этих сечений. Осью абсцисс на этих рисунках является безразмерная координата y^* — приведённая ширина канала ($y^* = y/W$, где W — полуширина канала, равная 0.25 мм).

Как видно из графиков, численное моделирование качественно и количественно описывает результаты эксперимента.

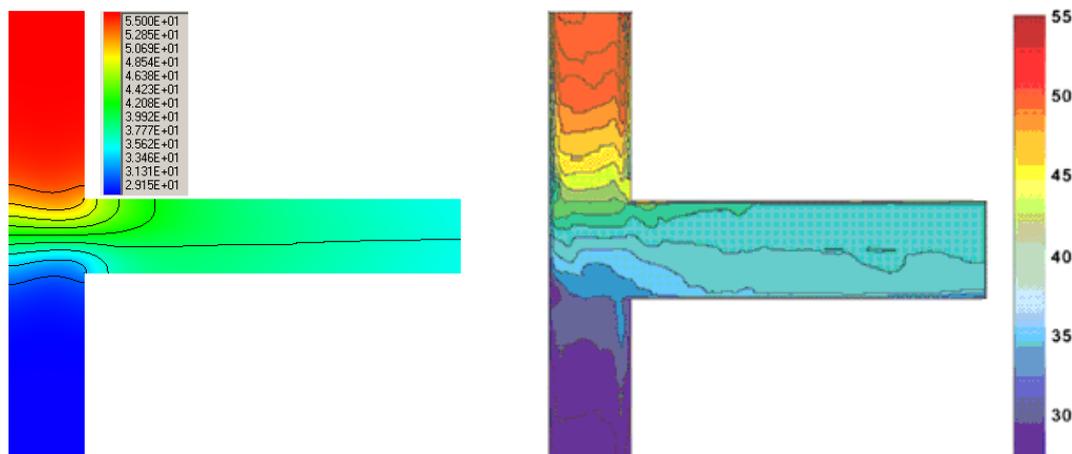


Рис. 14

Заключение

На основе универсального программного комплекса SigmaFlow разработана численная методика моделирования гидродинамики и теплообмена в микроканалах. Математическая модель построена на гидродинамическом описании микротечений и теплообмена, основанном на численном решении уравнений Навье–Стокса и переноса энергии в пространственной

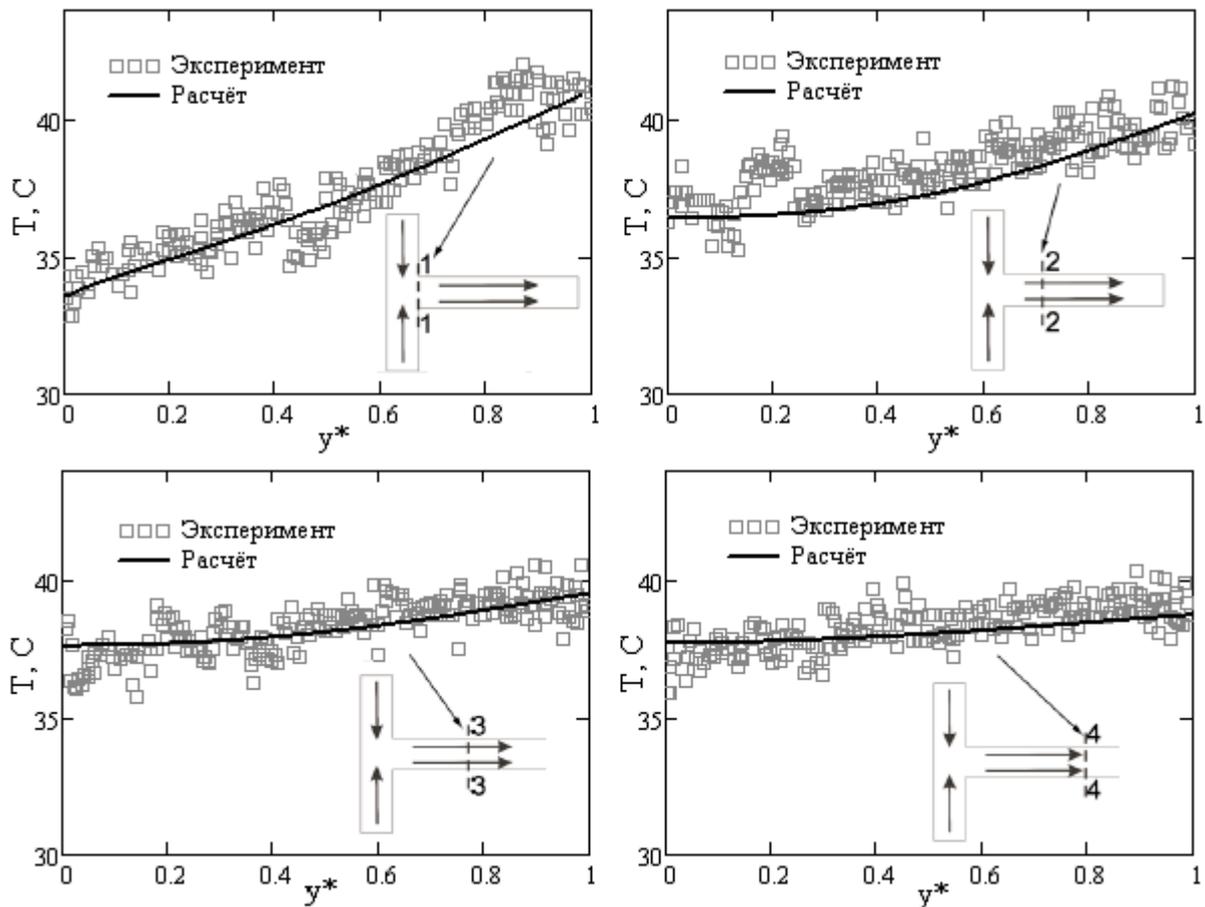


Рис. 15

и нестационарной постановке. Многочисленные вычислительные эксперименты, проведенные в рамках данной работы, подтвердили справедливость такого подхода для жидкостей с граничными условиями прилипания на стенках для размеров каналов порядка 10 мкм, а с граничными условиями скольжения для еще более мелких каналов. Тестирование и адаптация математической модели и численного алгоритма проведены на имеющихся экспериментальных данных по течениям и теплообмену в микроканалах. В целом по результатам проведенного тестирования получено хорошее согласование с имеющимися экспериментальными данными как по локальным характеристикам течения (формы профиля скорости и температуры, полученные *micro-PIV* и *LIF* измерениями), так и по интегральным параметрам (коэффициенты сопротивления и теплоотдачи) в широких диапазонах чисел Рейнольдса и размеров микроканалов. Для большинства рассмотренных задач расхождение с экспериментом составило порядка нескольких процентов. Данное обстоятельство еще раз подтверждает тот факт, что для жидкостей, вплоть до каналов микронного размера, гидродинамика и теплообмен описываются классическими соотношениями механики сплошных сред.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 12-08-33061) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (№№ 16.740.11.0642, 14.А18.21.0344, 14.132.21.1750 и 8756).

Список литературы

Быстров Ю. А., Исаев С. А., Кудрявцев Н. А., Леонтьев А. И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб — СПб.: Судостроение, 2005. — 392 с.

- Гаврилов А. А., Минаков А. В., Дектерев А. А., Рудяк В. Я.* Численный алгоритм для моделирования ламинарных течений в кольцевом канале с эксцентриситетом. Сиб. журн. индустр. матем. 2010. — Том. 13:4. — С. 3–14.
- Гаврилов А. А., Минаков А. В., Дектерев А. А., Рудяк В. Я.* Численный алгоритм для моделирования установившихся ламинарных течений неньютоновских жидкостей в кольцевом зазоре с эксцентриситетом // Вычислительные технологии, 2012. — Т. 17, № 1. — С. 44–56.
- Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 840 с.
- Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
- Рхи С. М.* Численный расчет турбулентного обтекания профиля с отрывом у задней кромки. Пер. с англ. / С. М. Рхи, У. Л. Чоу // Аэрокосмическая техника, 1984. — Т. 2, № 7. — С. 33–43.
- Цветков Ф. Ф.* Задачник по тепломассообмену. уч. пособие / Ф. Ф. Цветков, Р. В. Керимов, В. И. Величко. — М.: Издательский дом МЭИ, 2008. — 196 с.
- Цветков Ф. Ф.* Тепломассообмен: Учебное пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство МЭИ, 2005. — 550 С.
- Ferziger J.H. and Peric M.* Computational methods for fluid dynamics. Springer Verlag, Berlin, 2002. — P. 423.
- Ferziger J. H.* Computational Methods for Fluid Dynamics / J. H. Ferziger, M. Peric. — Berlin, Germany, 2002.
- Karnidakis G., Beskok A., Aluru N.* Microflows and nanoflows. Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 29, Springer Science+Business Media, Inc., 2005. — 817 p.
- Leonard B. P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. Vol. 19 — 1979. — P. 59–98.
- Minakov A. V., Rudyak V. Ya., Gavrilov A. A., Dekterev A.A.* On Optimization of Mixing Process of Liquids in Microchannels // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2010. — 3(2). — С. 146–156.
- Rudyak V. Ya., Minakov A. V., Gavrilov A. A., Dekterev A. A.* Application of new numerical algorithm of solving the Navier–Stokes equations for modeling the work of a viscometer of the physical pendulum type // Thermophysics & Aeromechanics. Vol. 15. — 2008. — P. 333–345.
- Trottenberg U., Cornelis W. Oosterlee, Anton Schüller.* Multigrid, Academic Press, 2001. — P. 631.
- Xu, Bin.* Thermal mixing of two miscible fluids in a T-shaped microchannel / Bin Xu, Teck Neng Wong, Nam-Trung Nguyen, Zhizhao Che, John Chee Kiong Chai // Biomicrofluidics 4, 044102 (2010).