

УДК: 519.688

## Метод формирования тестовых сигналов для корреляционной идентификации нелинейных систем

Д. Ю. Дунюшкин

Международный университет природы, общества и человека «Дубна», Филиал ДИНО  
Россия, 141800, Московская обл., г. Дмитров, мкрн. ДЗФС, д. 23.

E-mail: dima.dunya@gmail.com

Получено 12 октября 2012 г.

Разработан и протестирован новый метод формирования тестовых сигналов для корреляционной идентификации нелинейных динамических систем методом Ли–Шетцена. Для коррекции моментных функций тестовых сигналов применен численный алгоритм оптимизации Гаусса–Ньютона. В экспериментах получены тестовые воздействия длиной до 40 000 точек, позволяющие определять ядра Винера 2-го порядка с линейным разрешением до 32 точек, ядра Винера 3-го порядка с линейным разрешением до 12 точек, ядра Винера 4-го порядка с линейным разрешением до 8 точек.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, подход Винера–Вольтерра, корреляционные методы идентификации, метод Ли–Шетцена, тестовые сигналы, белый шум

### Test-signals forming method for correlation identification of nonlinear systems

D. Yu. Dunyushkin

*Dmitrov branch of Dubna International University for Nature, Society, and Man,  
23 DZFS str., Dmitrov, Moscow Region, 141800, Russia*

**Abstract.** — The new test-signals forming method for correlation identification of a nonlinear system based on Lee–Shetzen cross-correlation approach is developed and tested. Numerical Gauss–Newton algorithm is applied to correct autocorrelation functions of test signals. The achieved test-signals have length less than 40 000 points and allow to measure the 2nd order Wiener kernels with a linear resolution up to 32 points, the 3rd order Wiener kernels with a linear resolution up to 12 points and the 4th order Wiener kernels with a linear resolution up to 8 points.

Keywords: nonlinear dynamic systems, Volterra–Wiener approach, system identification, cross-correlation approach, Lee–Shetzen method, test-signals, white noise

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 721–733 (Russian).

## Введение

Моделирование реальных систем требует учета их нелинейных динамических свойств и уникальных особенностей. Для выполнения этих требований может быть применен подход Винера–Вольтерра, предполагающий построение макромоделей исследуемой системы на основе экспериментальных данных [Винер, 1961]. Макромодель — это формальное описание взаимосвязи входа и выхода системы без учета ее внутренней структуры и законов функционирования. Известно, что данный подход имеет определенные преимущества при исследовании и моделировании сложных систем, таких как:

- аналоговые электронные схемы [Музыкаин, Родионова, 1984];
- нелинейные объекты управления [Пупков, Егупов и др., 2004].

В работах [Музыкаин, Родионова, 1984; Пупков, Капалин, Ющенко, 1976] также продемонстрирована возможность использования подхода Винера–Вольтерра для моделирования систем человеко-машинного взаимодействия, а в работе [Marmarelis, 2004] — для моделирования нейронных сетей в физиологии.

Использование этого подхода на практике связано с серьезными трудностями организации эксперимента, обработки экспериментальных данных, а также идентификации и расчета используемых макромоделей. При использовании макромоделей Винера–Вольтерра наиболее сложным этапом является их идентификация по экспериментальным данным. Для идентификации модели в виде отрезка функционального ряда Винера (далее просто модели Винера) обычно применяется метод взаимной корреляции входа и выхода, предложенный Ю. В. Ли и М. Шетценом [Ли, Шетцен, 1986]. Практическая ценность корреляционного подхода проявляется в уменьшении ошибок идентификации исследуемой системы, вызванных наличием аддитивного шума и погрешности измерений. Такой подход также позволяет проводить идентификацию в рабочем режиме функционирования системы путем добавления тестовых воздействий к полезному сигналу [Волков, 2001]. Проблема заключается в том, что корреляционные методы требуют использования специальных тестовых воздействий и предъявляют очень серьезные требования к их статистическим характеристикам. Сложность получения воздействий с заданными характеристиками является одной из основных причин того, что многие исследователи отказываются от использования подхода Винера–Вольтерра.

В книге [Музыкаин, Родионова, 1984] показано, что для корреляционной идентификации модели Винера  $n$ -го порядка необходимо, чтобы моментные функции тестового воздействия до порядка  $2n$  включительно совпадали с теоретическими значениями соответствующих моментных функций белого гауссова шума. Получить такие тестовые воздействия с помощью стандартных генераторов белого шума (как физических, так и алгоритмических) не возможно. Поэтому для повышения качества тестовых воздействий их подвергают специальным процедурам коррекции. В [Музыкаин, Родионова, 1984] и [Штыкин, 1991] для этого используются разностные ядра и ортогональные функционалы. В работах [Волков, 2001] и [Волкова, 2003] разработан подход, основанный на использовании метода взаимно обратных систем, и показано, что дополнительные сложности, вносимые применением подхода, порождают существенно более эффективные результаты. Кроме того, в [Волкова, 2003] и [Волков, Волкова, 2008] предложены методы коррекции не только моментных функций, но и других статистических и спектральных характеристик сигналов.

В данной статье разработан новый метод коррекции моментных функций. Идея метода заимствована из работ [Булычев, 2004] и [Штыкин, Труфанов, 2012], но реализация сильно отличается. Также предложен новый способ получения нулевых моментных функций нечетных порядков (в ограниченной области индексов), не требующий численной коррекции. Для демонстрации эффективности разработанных методов приведены результаты их тестирования.

### Постановка задачи

Развитие вычислительной техники привело к тому, что моделирование, в основном, стало осуществляться с помощью компьютеров, а используемые на практике модели и сигналы стали дискретными. Дискретная модель Винера описывает преобразование дискретного сигнала  $x(k)$  на входе системы в сигнал  $y(k)$  на ее выходе. Это преобразование описывается разложением по ортогональным функционалам Винера  $G_m[x(k)]$ :

$$y(k) = \sum_{m=0}^p G_m[h_m; x(k)],$$

где  $p$  — это порядок модели Винера, а  $h_m$  — многомерные ядра Винера, полностью определяющие свойства модели. Более подробное описание модели Винера можно найти в работах, указанных в списке литературы.

Идентификация модели Винера заключается в оценивании всех ядер, входящих в ее функционалы. В случае идентификации стационарной динамической системы, ядра модели Винера  $h_m(i_1, \dots, i_m)$  характеризуют динамические свойства исследуемой системы, но сами не зависят от времени.

Базовым методом корреляционной идентификации является метод Ли–Шетцена, который требует наблюдения реакции  $y(k)$  исследуемой системы на белый гауссов шум  $x(k)$  [Ли, Шетцен, 1986]. При этом для определения ядра  $m$ -го порядка используется выражение:

$$h_m(i_1, \dots, i_m) = \frac{1}{m! A^m} \overline{[y(k) - \sum_{j=0}^{m-1} G_j[h_j, x(k)]] \cdot y(k)}, \quad (1)$$

где черта сверху означает усреднение всего выражение под ней по времени  $k$  по всей длительности эксперимента, а  $A = \overline{x^2(k)}$  — интенсивность белого шума. Выражение (1) позволяет получать достаточно точные статистические оценки ядер только при использовании специальных тестовых воздействий. Решаемая в данной статье задача заключается в разработке эффективного метода формирования таких тестовых воздействий  $x(k)$  с помощью компьютера.

Для идентификации модели Винера  $p$ -го порядка необходимо получить сигнал  $x(k)$  с заданными моментными функциями до порядка  $2p$  включительно [Музыкин, Родионова, 1984]. При этом требуется, чтобы эти моментные функции тестового сигнала были близки (в идеале совпадали) с теоретическими значениями соответствующих моментных функций белого гауссова шума.

Согласно терминологии [Музыкин, Родионова, 1984] моментная функция  $n$ -го порядка сигнала  $x(k)$  равна

$$R_n(i_1, \dots, i_n) = \overline{\prod_{q=1}^n x(k - i_q)}. \quad (2)$$

Пусть длина сигнала  $x(k)$  равна  $N$  и  $x(k) = 0$  для всех  $k < 0$ . Тогда в качестве операции усреднения можно использовать операцию получения среднего арифметического по всем значениям  $k$ :

$$R_n(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{q=1}^n x(k - i_q). \quad (3)$$

Заметим, что выбор операции усреднения не однозначен. При выборе той или иной оценки среднего необходимо помнить, что операции усреднения в формулах (1) и (2) должны быть одинаковы. Сформированные тестовые воздействия оказываются «привязаны» к выбранной операции усреднения. То есть тестовые воздействия, полученные одними исследователями, могут плохо подходить для процедур идентификации, написанных другими исследователями, если они используют различные операции усреднения.

Кроме расчета моментных функций корректируемого тестового воздействия требуется знать теоретические значения моментных функций белого гауссова шума. Выражения, позволяющие их рассчитывать, приведены в [Музыкин, Родионова, 1984]. Для белого гауссова шума единичной интенсивности теоретические значения моментной функции  $n$ -го порядка равны

$$V_n(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 2k - 1, \\ \sum \prod \delta(i_r - i_s), & \text{if } n = 2k. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $k$  — натуральное число, сумма берется по всем способам разбиения индексов  $(i_1, \dots, i_n)$  на пары  $\{i_r, i_s\}$ , а произведение — по всем парам данного разбиения, функция  $\delta(i_r - i_s)$  описывает единичный импульс:

$$\delta(i_r - i_s) = \begin{cases} 1, & \text{if } i_r = i_s, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

Например, первые четыре моментные функции дискретного белого шума равны

$$\begin{aligned} V_1(i_1) &= 0, \\ V_2(i_1, i_2) &= \delta(i_1 - i_2), \\ V_3(i_1, i_2, i_3) &= 0, \\ V_4(i_1, i_2, i_3, i_4) &= \delta(i_1 - i_2)\delta(i_3 - i_4) + \delta(i_1 - i_3)\delta(i_2 - i_4) + \delta(i_1 - i_4)\delta(i_2 - i_3). \end{aligned}$$

Далее будем формировать тестовые воздействия с единичной интенсивностью. Это не ограничивает общности, так как тестовый сигнал другой интенсивности может быть получен масштабированием сигнала с единичной интенсивностью по амплитуде.

На практике получить сигнал, моментные функции которого  $R_n(i_1, \dots, i_n)$  совпадают с теоретическими значениями моментных функций белого гауссова шума  $V_n(i_1, \dots, i_n)$  для всех значений индексов  $i_1, \dots, i_n \in Z$ , невозможно. Поэтому производится коррекция только тех точек, которые попали в некоторую область моментных функций, задаваемую пользователем. Размер этой области зависит от памяти исследуемой системы и используемой модели Винера. Чтобы установить взаимосвязь между требуемым размером корректируемой области и памятью модели, необходимо детальнее рассмотреть саму модель Винера.

Структурно модель Винера  $p$  порядка может быть представлена в виде параллельного соединения  $p+1$  блоков (рис. 1). Каждый блок модели Винера, кроме нулевого, обладает определенной конечной памятью  $M_m$ . Чем больше эта память, тем больше прошлых значений входного воздействия влияют на выход блока в текущий момент времени.

Если отдельный блок  $G_m$  модели Винера обладает памятью  $M_m$ , то для определения его ядра Винера методом Ли–Шетцена необходимо подать на вход этого блока тестовое воздействие, в котором моментная функция порядка  $2m$  скорректирована во всех точках  $2m$ -мерного куба с линейным размером  $M_m$ . То есть в каждой точке  $(i_1, \dots, i_{2m})$ , принадлежащей многомерному кубу  $0 \leq i_1, \dots, i_{2m} < M_m$ , значение моментной функции  $R_{2m}(i_1, \dots, i_{2m})$  тестового сигнала должно совпадать с теоретическим значением  $V_{2m}(i_1, \dots, i_{2m})$  соответствующей моментной функции белого гауссова шума.

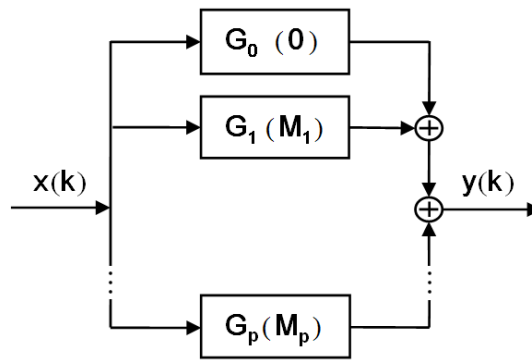


Рис. 1. Структура модели Винера  $p$ -го порядка

Если для идентификации используется модель Винера порядка  $p$  (рис. 1), все блоки которой имеют одинаковую память  $M$ , то в тестовом воздействии должны быть скорректированы все моментные функции порядка  $n = 1, 2, \dots, 2p$  во всех точках соответствующих многомерных кубов:  $0 \leq i_1, \dots, i_n < M$ .

На практике также используются модели, в которых память блоков старших порядков значительно меньше, чем память блоков первого и второго порядка. Если память блока  $G_m$  равна  $M_m$ , то для идентификации модели Винера, включающей этот блок, необходимо, чтобы моментные функции порядка  $2m$  и порядка  $2m - 1$  были скорректированы соответственно в  $2m$ -мерном и  $2m - 1$ - мерном кубе с линейным размером не менее  $M_m$  точек. Это обеспечит отсутствие влияния реакции данного блока  $G_m$  на оценку ядер Винера младших порядков  $0, \dots, m - 1$ . В свою очередь влияние блоков младших порядков на оценку ядра блока  $G_m$  исключается за счет вычитания из реакции системы суммарного вклада блоков всех младших порядков в формуле (1).

Для упрощения описания метода формирования тестовых воздействий будем считать, что все блоки модели имеют одинаковую память  $M$ . Тогда более строго задачу коррекции можно сформулировать следующим образом: необходимо получить сигнал  $x(k)$  такой, чтобы его моментные функции  $R_n(i_1, \dots, i_n)$  были близки (в идеале — совпадали) с соответствующими моментными функциями белого гауссова шума  $V_n(i_1, \dots, i_n)$  во всех точках  $n$ -мерных кубов с линейным размером  $M$ . Если потребовать, чтобы для всех  $n = 1, \dots, 2p$  и всех  $i_m = 0, \dots, M - 1$ , где  $1 \leq m \leq n$ , выполнялись точные равенства

$$R_n(i_1, \dots, i_n) = V_n(i_1, \dots, i_n), \tag{5}$$

то после подстановки формул (3,4) в (5) образуется система нелинейных алгебраических уравнений степени  $2p$ . Число неизвестных  $x(k)$  в этой системе, как правило, больше числа уравнений, соответствующих различным точкам. В такой постановке задача является некорректной (задача недоопределена). Если же отказаться от точного выполнения равенств (5), то можно перейти к задаче нелинейной оптимизации и использовать для ее решения численные методы.

### Описание метода

Моментные функции белого гауссова шума удобно разделить на две группы: моментные функции нечетных и четных порядков. Теоретические значения моментных функций нечетных порядков белого гауссова шума тождественно равны нулю во всех точках:

$$V_{2n-1}(i_1, \dots, i_{2n-1}) = 0,$$

где  $n$  — натуральное число. Поэтому для идентификации требуется сигнал, моментные функции нечетных порядков которого равны нулю для всех индексов, меньших размера памяти системы:

$$R_{2n-1}(i_1, \dots, i_{2n-1}) = 0, \text{ для всех индексов } 0 \leq i_1, \dots, i_{2n-1} < M. \quad (6)$$

Это условие является необходимым для обеспечения ортогональности функционалов Винера относительно используемого тестового воздействия.

В доступных публикациях коррекция моментных функций нечетных порядков производится с помощью численных методов, несмотря на то, что существует достаточно простые приемы, позволяющие этого избежать. Для этого достаточно произвольный сигнал  $x(k)$  последовательно соединить с тем же самым инвертированным по знаку сигналом  $-x(k)$ , оставив между ними интервал из нулевых значений, не менее размера памяти системы  $M$ . В данной работе этот прием условно называется «симметризацией сигнала» (рис. 2).

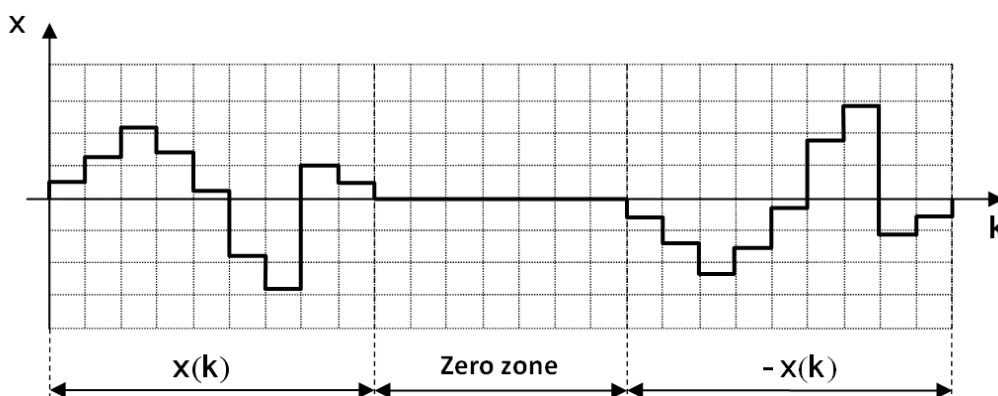


Рис. 2 Пример симметризации сигнала

При этом для всех неотрицательных индексов  $i_n$ , меньших размера нулевой зоны, моментные функции всех нечетных порядков составного сигнала станут нулевыми. Для всех индексов  $i_n$ , меньших размера нулевой зоны, все моментные функции четных порядков составного сигнала будут такие же, как для исходного сигнала  $x(k)$ .

К достоинствам симметризации сигнала можно отнести простоту реализации этого приема и то, что в результате все моментные функции нечетных порядков, а не только корректируемые, будут нулевыми для рассматриваемых индексов. Недостатком является увеличение длины сигнала, полученного в результате симметризации. В данной статье исследована возможность формирования тестовых воздействий, как с использованием симметризации, так и с помощью только численной коррекции всех моментных функций.

Моментные функции четных порядков корректировать можно только с помощью численных методов. В данной работе предлагается использовать для коррекции алгоритм оптимизации Гаусса–Ньютона. Для приближения моментных функций четных порядков имеющегося сигнала  $R_{2n}(i_1, \dots, i_n)$  к требуемым моментным функциям  $V_{2n}(i_1, \dots, i_n)$  будем минимизировать функционал

$$F[x(k)] = \sum_{n=1}^p F_{2n}[x(k)], \quad (7)$$

где

$$F_n[x(k)] = \frac{1}{M^n} \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=0}^{M-1} \dots \sum_{i_n=0}^{M-1} [R_n(i_1, i_2, \dots, i_n) - V_n(i_1, i_2, \dots, i_n)]^2. \quad (8)$$

Функционал  $F_n[x(k)]$  — это нормированный квадрат евклидовой нормы невязки уравнений (5) по всем точкам  $n$ -мерного куба отдельной моментной функции  $R_n$ ,  $M^n$  — это число корректируемых точек в этом кубе. Минимизация функционала (7) обеспечивает уменьшение абсолютной величины невязок по всем корректируемым точкам моментных функций четных порядков  $n = R_2, R_4, \dots, R_{2p}$ . Если же необходима численная коррекция моментных функций как четных так и нечетных порядков, то функционал (7) должен иметь вид

$$F[x(k)] = \sum_{n=1}^{2p} F_n[x(k)].$$

При этом все остальное в методе коррекции остается без изменений.

Нормирование в (8) необходимо для обеспечения равномерного улучшения моментных функций разных порядков и ускорения сходимости метода. Для эффективного вычисления функционала (8) необходимо использовать алгоритм, учитывающий его симметричность по перестановкам аргументов. Для этого можно производить суммирование только по области упорядоченных индексов  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ , однако при этом необходимо учитывать весовые коэффициенты  $c_n(i_1, \dots, i_n)$ :

$$F_n[x(k)] = \frac{1}{M^n} \sum_{i_1=0}^{M-1} \sum_{i_2=i_1}^{M-1} \dots \sum_{i_n=i_{n-1}}^{M-1} [R_n(i_1, \dots, i_n) - V_n(i_1, \dots, i_n)]^2 \cdot c_n(i_1, \dots, i_n). \quad (9)$$

Для определения коэффициента  $c_n(i_1, \dots, i_n)$  необходимо найти число перестановок с повторениями:

$$c(i_1, \dots, i_n) = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}, \quad (10)$$

где  $k_s$  — это количество повторяющихся индексов, равных некоторому значению  $s$ , а  $r$  — число групп повторяющихся индексов, причем  $k_1 + \dots + k_s + \dots + k_r = n$ .

Чтобы дополнительно ускорить расчет функционалов  $F_n$ , введем искусственное ограничение на формируемый сигнал. Пусть до начала эксперимента сигнал на входе системы равен нулю и его последние  $M$  значений равны нулю:

$$x(k) = 0 \text{ при } k < 0 \text{ и } x(k) = 0 \text{ при } N - M \leq k \leq N - 1. \quad (11)$$

Обозначения те же:  $k$  — время,  $N$  — длина тестового воздействия,  $M$  — линейный размер корректируемой области. Данные ограничения не влияют на качество получаемого решения, однако при выполнении этих ограничений функционал  $F_n[x(k)]$  может быть точно рассчитан только по одному сечению  $i_1 = 0$   $n$ -мерного куба. При этом в расчет добавляется множитель  $(M - i_n)$ , учитывающий влияние остальных сечений:

$$F_n[x(k)] = \frac{1}{M^n} \sum_{i_2=0}^{M-1} \sum_{i_3=i_2}^{M-1} \dots \sum_{i_n=i_{n-1}}^{M-1} [R_n(0, i_2, \dots, i_n) - V_n(0, i_2, \dots, i_n)]^2 \cdot (M - i_n) \cdot c_n(0, i_2, \dots, i_n). \quad (12)$$

Эквивалентность (9) и (12) при условии (11) доказывается заменой  $k' = k - i_1$  в (3) и последующим переходом к (9) и (12) с учетом условия (11) и последующей заменой  $k'$  на  $k$ . Этот прием сокращает время расчета значения функционала  $F_n$  еще в  $(M + n - 1) / n$  раз. Если теперь все множители в (12) внести под знак квадрата, то получим

$$F_n[x(k)] = \sum_{i_2=0}^{M-1} \dots \sum_{i_n=i_{n-1}}^{M-1} \left[ [R_n(0, i_2, \dots, i_n) - V_n(0, i_2, \dots, i_n)] \cdot W(n, M, i_2, \dots, i_n) \right]^2, \quad (13)$$

где через  $W(n, M, i_2, \dots, i_n)$  обозначен общий весовой коэффициент, равный

$$W(n, M, i_2, \dots, i_n) = \sqrt{(M - i_n) \cdot c_n(0, i_2, \dots, i_n) / M^n}. \quad (14)$$

Каждой точке корректируемого сечения многомерного куба индексов  $(0, i_2, \dots, i_n)$  соответствует некоторая невязка (разница моментной функции корректируемого сигнала и моментной функции белого шума в данной точке). Согласно (13) эти невязки равны

$$r_n(0, i_2, \dots, i_n) = [R_n(0, i_2, \dots, i_n) - V_n(0, i_2, \dots, i_n)] \cdot W(n, M, i_2, \dots, i_n). \quad (15)$$

Для применения классических методов оптимизации необходимо чтобы все невязки были компонентами одного вектора. Это значит, что все невязки по всем корректируемым точкам моментных функций, необходимо проиндексировать общим индексом  $i$ . Обозначим невязку с индексом  $i$  символом  $\Delta_i$ :

$$\Delta_i = r_n(0, i_2, \dots, i_n). \quad (16)$$

Для применения процедуры Гаусса–Ньютона необходимо вычислить матрицу Якоби, компоненты которой определяются стандартным образом:

$$J_{i,j} = \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j}. \quad (17)$$

Дифференцируя (16), получаем

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j} = \frac{\partial r_n(0, i_2, \dots, i_n)}{\partial x_j}. \quad (18)$$

Так как  $V_n$  — это заданные моментные функции, не зависящие от значений  $x_j$ , то из формул (18) и (15) получаем

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j} = \frac{\partial R_n(0, i_2, \dots, i_n)}{\partial x_j} \cdot W(n, M, i_2, \dots, i_n). \quad (19)$$

Производную от моментной функции в заданной точке можно найти, продифференцировав равенство (3)

$$\frac{\partial R_n(i_1, i_2, \dots, i_n)}{\partial x(j)} = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^n \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n x(j + i_p - i_q). \quad (20)$$

В формуле (20) существуют индексы отсчетов сигнала, большие его длины. Поэтому рассчитывать производные можно только по переменным  $x_j$ , где  $j = 0, \dots, N - M - 1$ . Это не является проблемой, так как с учетом ограничения (11) последние  $M$  отсчетов сигнала фиксированы (равны нулю). А раз их нельзя корректировать, то и производные по ним не нужны.

Заметим, что при необходимости численной коррекции моментных функций четных и нечетных порядков производные моментной функции первого порядка не стоит помещать в первую строку матрицы Якоби, потому что тогда алгоритм Гаусса–Ньютона не будет сходиться. В этом случае лучше сначала рассчитать производные по моментной функции второго порядка, затем по моментной функции первого порядка, а уже затем все остальные. Эта особенность выявлена экспериментально и связана с тем, что в общем случае алгоритм Гаусса–Ньютона чувствителен к перестановке строк матрицы Якоби. Имея способ расчета матрицы Якоби, можно применить для оптимизации процедуру Гаусса–Ньютона.



Метод Гаусса–Ньютона является одним из основных методов решения задач о наименьших квадратах. Он строится на предположении, что невязки в отдельных уравнениях достаточно малы. В этом случае ньютоновское направление  $p_K$  на  $K$ -м шаге может быть аппроксимировано решением линейной системы

$$J^T J p_K = -J^T \Delta,$$

где  $\Delta$  — вектор невязки,  $J$  — матрица Якоби. Решение СЛАУ можно приближенно получить с помощью итерационного метода сопряженных градиентов. Так как вектор  $p_K$  является лишь аппроксимацией оптимального направления спуска, то получения особо точного решения СЛАУ не требуется и можно ограничиться некоторым небольшим числом итераций. Для реализации метода сопряженных градиентов достаточно иметь возможность вычислять выражения вида  $Az$ , где  $z$  — произвольный вектор. В случае матрицы  $A = J^T J$  эти выражения могут быть вычислены без явного перемножения матриц  $J^T$  и  $J$ , что позволяет обойтись менее трудоемкой операцией умножения матрицы на вектор:

$$Az = J^T Jz = J^T u, \text{ где } u = Jz.$$

Асимптотическая вычислительная сложность одной итерации метода сопряженных градиентов определяется количеством  $Q$  всех корректируемых точек моментных функций и длиной  $N$  корректируемого сигнала и имеет оценку  $O(Q \cdot N)$ . Число итераций  $I_{CG}$  метода сопряженных градиентов на  $K$ -м шаге ( $K = 1, 2, 3, \dots$ ) метода Гаусса–Ньютона определяется правилом

$$I_{CG} = \begin{cases} 5, & \text{if } K \leq 5 \\ 10K, & \text{else.} \end{cases}$$

Количество  $Q$  корректируемых точек рассчитывается на основе линейных размеров корректируемых областей моментных функций. При расчете функционалов по формуле 12 количество корректируемых точек в моментной функции  $n$  порядка при корректировке куба линейным размером  $M$  равно

$$q_n(M) = \begin{cases} 0, & \text{if } M = 0, \\ \frac{1}{(n-1)!} \prod_{p=0}^{n-2} (M + p), & \text{else.} \end{cases} \quad (21)$$

Общее количество корректируемых точек  $Q$  определяется суммой числа корректируемых точек по всем корректируемым численно моментным функциям.

В качестве критерия окончания процесса коррекции был выбран критерий максимальной абсолютной величины отклонения значений моментной функции от ее требуемых теоретических значений по всем точкам корректируемой области. Для моментной функции  $n$  порядка данный критерий имеет вид

$$\max_{0 \leq i_1, \dots, i_n < M} |R_n(i_1, \dots, i_n) - V_n(i_1, \dots, i_n)| < \varepsilon, \quad (22)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность коррекции, одинаковая для всех корректируемых моментных функций. Критерий (22) проверяется на каждом шаге процесса Гаусса–Ньютона для всех корректируемых моментных функций до порядка  $2p$  включительно. При выполнении этого критерия численная коррекция завершается.

Заметим, что при необходимости коррекции различных моментных функций с разной точностью в весовые коэффициенты функционалов (14) под знак корня можно добавить дополнительные

множители  $a_n$ , которые будут влиять на скорость коррекции отдельных моментных функций. Выбор оптимальных коэффициентов  $a_n$  в этом случае требует дополнительного исследования.

Перед началом коррекции необходимо сформировать начальное приближение  $x^0 = x^0(k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Относительно хорошим начальным приближением является любая последовательность чисел с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. При этом согласно ограничению (11) последние  $M$  значений сигнала  $x^{(0)}(k)$  полагаются равными нулю. При тестировании использовались начальные приближения вида

$$x^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^{12} r(i) - 6, \text{ при } 0 \leq k \leq N - M - 1,$$

$$x^{(0)}(k) = 0, \text{ при } N - M - 1 < k < N,$$

где  $r(i)$  — псевдослучайные величины, равномерно распределенные на интервале  $(0;1)$ .

## Тестирование метода

Для тестирования метода произведено несколько групп экспериментов по коррекции моментных функций и определено количество итераций метода Гаусса–Ньютона и время, требуемое для коррекции с заданной точностью. Эксперименты проводились на компьютере с процессором AMD Athlon™ 64 2800+ с тактовой частотой 1.80 ГГц и 2 Гб оперативной памяти. Программа коррекции реализована в среде программирования Dev-C++. Числа с плавающей точкой представляются с двойной точностью (64 бита).

В экспериментах общее количество численно корректируемых точек  $Q$  рассчитывается на основе линейного размера  $M$  корректируемых областей с помощью формулы (21). Длина сигнала  $x(k)$ , который корректируется численно, обозначена символом  $N$ .

Во всех экспериментах точность коррекции по критерию (22) задавалась равной  $\varepsilon = 10^{-6}$  по всем корректируемым моментным функциям. При большом числе корректируемых точек  $Q$  длина корректируемого сигнала  $N$  увеличивалась по эмпирическому правилу  $N \geq 2Q$ . Это правило получено экспериментально при коррекции моментных функций до 6-го порядка включительно. Корректировать более короткие тестовые сигналы и достигать точности порядка  $10^{-6}$  по критерию (22) оказалось невозможно. Неизвестно, является это ограничение недостатком использованного метода или свойством самой задачи, этот вопрос требует дополнительного исследования.

Результаты численной коррекции всех моментных функций до 2, 4, 6 и 8-го порядков без использования симметризации сигнала представлены в таблице 1. Обозначения в таблице:  $I$  — число выполненных итераций метода Гаусса–Ньютона;  $T$  — полное время коррекции (если больше 1 секунды, то в формате «часы:минуты:секунды», иначе — в десятичной записи долей секунды с буквой «с» после значения). Каждая строка таблицы соответствует одному эксперименту по формированию тестового сигнала.

Во второй группе экспериментов осуществлялась численная коррекция только моментных функций четных порядков, а коррекция моментных функций нечетных порядков выполняется с помощью симметризации сигнала. В результате симметризации корректируются все моментные функции нечетных порядков. Причем корректируются они в многомерных кубах одинакового линейного размера, который равен размеру нулевой зоны, использованной при симметризации (рис. 2). Подобного результата невозможно добиться при численной коррекции. Коррекция всех моментных функций нечетных порядков методом симметризации теоретически может

уменьшить погрешности, вызванные влиянием неучтенных (старших) членов ряда Винера, и таким образом повысить точность идентификации.

Результаты численной коррекции моментных функций только четных порядков представлены в таблице 2. Отметим, что символом  $N$  в таблице 2 обозначена длина корректируемого численно тестового сигнала. Полная длина полученных в результате симметризации тестовых воздействий ровно в два раза больше, то есть равна  $2N$ . Это связано с тем, что согласно ограничению (11) последние значения сигнала  $x(k)$  равны нулю, то есть в конце самого сигнала  $x(k)$  уже содержится нулевая зона и добавлять еще одну (как на рис. 2) нет необходимости.

Таблица 1

№	Линейный размер корректируемой области в моментных функциях 1–8 порядка								$Q$	$N$	$I$	$T$
	1	2	3	4	5	6	7	8				
1	32	32							33	256	8	0,02 с
2	64	64							65	256	8	0,05 с
3	128	128							129	512	8	0,22 с
4	256	256							257	1024	9	00:00:02
5	16	16	8	8					173	256	12	00:00:01
6	24	24	12	12					457	1024	10	00:00:08
7	32	32	16	16					985	2048	10	00:00:34
8	40	40	20	20					1791	4096	10	00:02:09
9	60	60	30	30					5486	8192	14	01:21:14
10	32	32	32	32					6545	14000	12	02:01:39
11	16	16	8	8	4	4			264	512	22	00:00:09
12	12	12	6	6	6	6			468	1024	22	00:00:46
13	24	24	12	12	6	6			845	2048	17	00:01:35
14	32	32	16	16	8	8			2107	4096	22	00:14:27
15	10	10	10	10	10	10			3003	6000	21	00:26:55
16	40	40	20	20	10	10			4508	10000	18	01:58:07
17	12	12	12	12	12	12			6188	16000	14	03:29:30
18	10	10	8	8	6	6	4	4	749	2048	101	00:57:00
19	32	32	16	16	8	8	4	4	2311	6000	71	03:58:11
20	6	6	6	6	6	6	6	6	1726	8000	33	01:00:30
21	24	24	12	12	6	6	6	6	2099	8000	48	02:35:40

Таблица 2

№	Линейный размер корректируемых областей в моментных функциях четных порядков				$Q$	$N$	$I$	$T$
	2	4	6	8				
1	128				128	130	7	< 0.01 с
2	512				512	520	15	0.12 с
3	16	8			136	256	10	0.32 с
4	32	16			848	1024	15	00:00:33
5	40	20			1580	2048	14	00:01:52
6	64	32			6048	12000	12	01:35:33
7	24	12	6		640	1024	29	00:01:43
8	32	16	8		1640	3200	20	00:06:53
9	10	10	10		2232	5000	17	00:11:25

№	Линейный размер корректируемых областей в моментных функциях четных порядков				$Q$	$N$	$I$	$T$
	2	4	6	8				
10	40	20	10		3582	7500	18	00:41:04
11	48	24	12		7016	14000	20	07:13:57
12	10	8	6	4	502	2048	46	00:07:17
13	32	16	8	6	2432	8000	53	03:50:59
14	20	14	10	8	6014	20000	56	31:58:13

При численной коррекции моментных функций четных порядков размер нулевой зоны в конце сигнала полагался равным линейному размеру корректируемой области в моментной функции 2-го порядка. К примеру, в результате симметризации сигнала, полученного в эксперименте 11 таблицы 2, все моментные функции нечетных порядков были скорректированы в многомерных кубах одинакового линейного размера, равного 48 отсчетам.

## Заключение

Эксперименты показали, что разработанный метод эффективно решает задачу формирования тестовых сигналов при необходимости коррекции небольших областей моментных функций до 8-го порядка включительно (таблицы 1 и 2).

Использование при коррекции матрично-векторных операций приводит к тому, что итерации предложенного метода имеют большую вычислительную сложность. Только для выполнения матрично-векторных операций на  $K$ -ой итерации метода Гаусса–Ньютона необходимо выполнить порядка  $20K \cdot Q \cdot N$  операций умножения вещественных чисел, где  $Q$  — общее количество корректируемых точек моментных функций,  $N$  — длина корректируемого сигнала. Поэтому при коррекции большого числа точек, несмотря на быструю сходимость метода по числу итераций, процесс коррекции требует много времени. Кроме того, данный метод критичен к размеру оперативной памяти компьютера, так как требует хранения плотной матрицы Якоби размером  $Q \cdot N$ . Например, в процессе выполнения эксперимента 14-й таблицы 2-я программа коррекции постоянно использовала около 1 Гб оперативной памяти.

Экспериментально установлено, что при коррекции моментных функций только четных порядков сходимость предложенного метода значительно лучше, чем при численной коррекции моментных функций и четных и нечетных порядков. Поэтому применение метода симметризации сигнала для получения требуемых моментных функций нечетных порядков позволяет значительно сократить время формирования тестовых сигналов. Недостатком метода симметризации является увеличение длины тестового сигнала в 2 раза.

В работе экспериментально выявлены ограничения на соотношение длины корректируемого сигнала  $N$  и общего числа корректируемых точек  $Q$ , однако не определено, чем они обусловлены. Например, для коррекции кубов одинаковых линейных размеров во всех моментных функциях до 6-го порядка включительно требуется, чтобы выполнялось условие  $N \geq 2Q$ . Данные ограничения могут быть связаны как с самой задачей коррекции, так и с предложенной реализацией метода Гаусса–Ньютона. Выяснить характер этих ограничений пока не удалось, однако это сделать необходимо. Если это неявные ограничения самой задачи, то их необходимо изучить подробнее и в дальнейшем учитывать при формировании тестовых воздействий.

## Список литературы

Булычев Е. С. Метод формирования тестирующих сигналов для белозумовой идентификации сложных систем: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.13.01 / Булычев Евгений Сергеевич; Москва, МГАПИ, 2004.

- Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961.
- Волков Н. В.* Разработка методов и средств для исследования динамики нелинейных автоматизированных машиностроительных систем на основе функциональных разложений Вольтерра–Винера с целью повышения достоверности контроля их эксплуатации: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук: 05.13.06 / Николай Васильевич Волков; Москва, МГТУ «Станкин», 2001.
- Волков Н. В., Волкова О. Р.* Применение внешнего описания для конструирования математических моделей динамических систем // Вестник МГТУ «Станкин», № 2, 2008.
- Волкова О. Р.* Повышение эффективности испытаний автоматизированных систем на основе конструирования моделей случайных процессов с заданными статистическими характеристиками: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.13.06 / Волкова Ольга Рудольфовна; Москва, МГТУ «Станкин», 2003.
- Ли Ю. В., Шетцен М.* Определение ядер Винера–Хопфа для нелинейных систем методом взаимной корреляции / Техническая кибернетика за рубежом. Сб. переводов ред. проф. В. В. Солодовникова. М.: «Машиностроение», 1986.
- Музыкин С. Н., Родионова Ю. М.* Моделирование динамических систем. — Ярославль: Верх.-Волж. кн. изд-во, 1984.
- Музыкин С. Н., Родионова Ю. М.* Функциональные разложения Винера–Вольтерра в задачах проектирования. — Ярославль: Верх.-Волж. кн. изд., 1992.
- Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М: Наука, 1976.
- Пупков К. А., Егунов Н. Д. и др.* Методы классической и современной теории автоматического управления; Т.2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 г.
- Штыкин М. Д.* Разработка программно-математического комплекса белозумовой идентификации динамических объектов в системах автоматизации технологических процессов: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. — Москва, МГАПИ, 1991.
- Штыкин М. Д., Труфанов В.А.* Создание сигналов с заданными моментными функциями // Вестник Амурского государственного университета, № 57, 2012.
- Marmarelis V. Z.* Nonlinear Dynamic Modeling of Physiological Systems (IEEE Press Series on Biomedical Engineering). Wiley-IEEE Press, 2004.