УДК: 519.676

О размерности подобия рандомизированной системы итеративных функций

П. В. Москалев^a, А. Г. Буховец^b

Воронежский государственный аграрный университет,
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, д. 1

E-mail: ^a moskalefff@gmail.com, ^b abuhovets@mail.ru

Получено 02 мая 2012 г.

В работе рассматриваются свойства рандомизированной системы итеративных функций (РСИФ), полученной в результате обобщения известного алгоритма «игра в хаос». Для моделирования РСИФ была использована свободная система статистического анализа и визуализации данных R. Показано, что для полигональных протофрактальных множеств $Z = \{z_j\}$, $j = 1, 2, \dots, k$ зависимость размерности подобия от параметров РСИФ $d_S(\mu|k)$ носит немонотонный характер с экстремальным значением $\max_{0 < \mu < \infty} d_S(\mu|k) = -\frac{\ln k}{\ln(1/(1+\mu))}$.

Ключевые слова: размерность подобия, рандомизированная система итеративных функций, многоугольник Серпинского

The similarity dimension of the random iterated function system

P. V. Moskalev, A. G. Buhovets

Voronezh State Agricultural University, 1 Michurin street, Voronezh, 394087, Russia

Abstract. — In this paper we consider the properties of the random iterated function systems (RIFS) obtained using a generalization of the Chaos game algorithm. Used for the RIFS simulation R is a free software environment for statistical computing and graphics. The similarity dimension by the polygonal protofractals $Z = \{z_j\}$, $j = 1, 2, \dots, k$ nonmonotonically depends on the RIFS parameters $d_S(\mu|k)$ with an extreme value $\max_{0 < \mu < \infty} d_S(\mu|k) = -\frac{\ln k}{\ln(1/(1+\mu))}$.

Keywords: similarity dimension, random iterated function system, Sierpinski polygon

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 681–691 (Russian).

Введение

«Все объекты, которые я исследовал и назвал фракталами, в моем представлении обладали свойством быть нерегулярными, но самоподобными», — писал Б. Мандельброт в 1975 году [Mandelbrot, 1975]. При этом процесс построения классических самоподобных фракталов оказался несложен. Задавалась некоторая процедура, которая итеративно применялась к порождающему фрактал компактному множеству. Предельное множество, возникающее при неограниченном повторении заданной итеративной процедуры, и называлось фрактальным. В 1981 году Дж. Хатчинсон предложил рассматривать фракталы как подмножества метрических компактных пространств [Hutchinson, 1981]. В этом случае итеративная процедура построения фрактала оказалась соответствующей непрерывному сжатию в подходящей метрике, а определяющая ее система итеративных функций — сжимающему отображению.

Оператор S называют сжимающим на полном метрическом пространстве $(\mathbf{M}, \rho)$, если он отображает пространство в себя $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}$ и существует такое число $0 < s < 1$, что для двух любых точек $b, c \in \mathbf{M}$ будет верно неравенство $\rho(Sb, Sc) \leq s\rho(b, c)$. Можно показать, что для любого сжимающего оператора S на $\mathbf{M}$ будет существовать единственная неподвижная точка e^* такая, что $Se^* = e^*$. Системой итеративных функций называют конечное множество сжимающих отображений на полном метрическом пространстве: $\{f_i : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}\}$ при $i = 1, 2, \dots, n$, где каждая функция f_i является сжимающим отображением. Тогда аттрактором A системы итеративных функций $\{f_i\}$ будет предел суперпозиции:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} H^{\circ m}(X) = A, \quad H(X) = \bigcup_{i=1}^n f_i(X), \quad (1)$$

где $H^{\circ 1}(X) = H(H(X))$ — единичная суперпозиция операторов Хатчинсона–Барнсли [Barnsley, 1988]. При этом определение аттрактора (1) не накладывает никаких существенных ограничений ни на порядок, ни на полноту выбора элементов $\{f_i\}$, что позволяет использовать для построения аттрактора системы итеративных функций рандомизированный алгоритм, названный М. Барнсли игрой в хаос. Заметим, что первоначальные идеи построения подобных алгоритмов имеют обширную предысторию и восходят к одной работе румынских математиков [Onicescu, Mihos, 1935], посвященной анализу марковских цепей.

Рандомизированные системы итеративных функций

Проиллюстрируем основные особенности рандомизированного алгоритма на примере процедуры построения треугольника Серпинского: а) в качестве исходных данных задаются требуемое число итераций n , а также координаты вершин треугольника z_A, z_B, z_C и стартовой точки x_0 ; б) на каждой итерации производится построение отрезка от текущей точки x_i до случайно выбранной вершины треугольника с заданными вероятностями: $p_A = p_B = p_C = \frac{1}{3}$, где $p_A = \mathbf{P}\{z_A\}$; $p_B = \mathbf{P}\{z_B\}$; $p_C = \mathbf{P}\{z_C\}$; в) в качестве следующей точки выбирается середина отрезка, соединяющего текущую точку с выбранной вершиной порождающего треугольника: $x_{i+1} = \frac{x_i + z_j}{2}$, где $i = 1, 2, \dots, n$; $j \in \{A, B, C\}$; г) распределение точек, формирующееся в результате достаточно большого числа итераций $n \gg 10$, будет соответствовать структуре фрактального множества, известного как треугольник Серпинского.

На рис. 1, а показаны множества точек $X_1 = \{x_i\}$ после $i = 1, 2, \dots, 10^4$ итераций для множества $Z_1 = \left\{\left(-\frac{9}{10}, -\frac{1}{2}\right), (0, 1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)\right\}$ с равномерным распределением вероятностей $P_1 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$. На рис. 1, б–в показаны множества точек X_2 и X_3 при том же множестве $Z_3 = Z_2 = Z_1$ и неравномерных распределениях вероятностей $P_2 = \left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right\}$ и $P_3 = \left\{\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$. Сопоставление полученных реализаций X_1, X_2 и X_3 показывает, что структура формируемого множества точек

Рис. 1. Реализации неравностороннего треугольника Серпинского ABC с различными распределениями вероятностей: а) $p_A = p_B = p_C = \frac{1}{3}$; б) $p_A = p_C = \frac{1}{5}$; $p_B = \frac{3}{5}$; в) $p_A = \frac{3}{5}$; $p_B = p_C = \frac{1}{5}$

определяется составом множества $Z = \{z_j\}$ и распределением вероятностей выбора его вершин $P = \{p_j\}$.

Обобщение вышеизложенного алгоритма может быть построено на основе формулы деления в заданном отношении μ отрезка, соединяющего текущую итерационную точку $x_i \in X$ с элементом множества $z_j \in Z$, выбираемого с заданной вероятностью $p_j \in P$. В результате получим предложенную в работе [Буховец, 2008] рандомизированную систему итеративных функций, некоторые приложения которой были исследованы в наших совместных работах [Буховец и др., 2010; Буховец и др., 2012]:

$$x_{i+1} = \frac{x_i + \mu z_j}{1 + \mu}, \quad (2)$$

где $\mu > 0$ — вещественный параметр рандомизированной системы итеративных функций, соответствующий коэффициенту разбиения итерационных отрезков; z_j — случайная точка протофрактального¹ множества $Z = \{z_j\}$, выбранная согласно заданному распределению вероятностей $P = \{p_j\}$, где $p_j = \mathbf{P}\{z_j\}$ при $j = 1, 2, \dots, k$.

Рассмотрим основные свойства системы (2). Неподвижные точки данного отображения можно найти, исходя из равенства:

$$x^* = \frac{x^* + \mu z_j}{1 + \mu}.$$

Очевидно, что в качестве неподвижной точки при $\mu \neq 0$ может выступать любая точка протофрактала $x^* = z_j$. Нетрудно видеть, что эти точки будут устойчивыми при $\mu > 0$.

Асимптотическое поведение аттрактора системы (2) можно проанализировать, рассмотрев соответствующие пределы. При убывании абсолютной величины параметра $\mu \rightarrow 0$ аттрактор системы $X = \{x_i\}$ будет сходиться к начальной точке x_0 :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x_n = \lim_{\mu \rightarrow 0} x_{n-1} = \dots = \lim_{\mu \rightarrow 0} x_1 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{x_0 + \mu z_j}{1 + \mu} = x_0. \quad (3)$$

При неограниченном возрастании параметра $\mu \rightarrow \infty$ аттрактор системы $X = \{x_i\}$ будет сходиться к протофрактальному множеству $Z = \{z_j\}$:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_{i+1} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{x_i + \mu z_j}{1 + \mu} = z_j, \quad (4)$$

для любых $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, k$.

¹ Протофракталом будет называться дискретное или непрерывное множество Z , порождающее в результате итераций системы реализацию аттрактора системы (2). Тогда фракталом будет называться предельное множество точек, соответствующее всем возможным реализациям аттрактора системы (2).

Четырехугольные протофрактальные множества

Нетрудно проверить, что формируемые системой (2) реализации будут зависеть как от величины параметра μ , так и от топологической структуры протофрактального множества Z . В связи с этим вначале рассмотрим несколько простейших случаев с дискретными протофрактальными множествами на основе правильного четырехугольника Z_4 с равновероятным распределением $p_j = \text{const}$ при $j = 1, 2, \dots, k$.

Для статистического моделирования и анализа свойств системы (2) использовалась свободная система программирования, статистического анализа и визуализации данных R [www.r-project.org]. Листинг функции “rifs2d()”, выполняющей построение реализаций аттрактора системы (2), приведен ниже. Аргументы функции: вещественная переменная “mu”, соответствующая одноименному параметру системы (2); целочисленная переменная “n”, соответствующая числу точек генерируемой реализации аттрактора системы (2); двумерный вещественный массив “Z” размерности $k \times 2$, содержащий координаты точек протофрактального множества; вещественный вектор “P”, содержащий распределение вероятностей для точек протофрактального множества. Локальные переменные функции: целочисленный вектор “z”, содержащий индексы соответствующей распределению “P” выборки точек протофрактального множества “Z”. Возвращаемым значением функции является двумерный вещественный массив “X” размерности $n \times 2$, содержащий координаты точек реализации аттрактора системы (2).

```

1 | rifs2d <- function(mu=1, n=10000,
2 |                   Z=cbind(c(-1,-1,1,1), c(-1,1,1,-1)),
3 |                   P=rep(1/nrow(Z), times=nrow(Z)))
4 | {
5 |   z <- sample.int(nrow(Z), size=n, prob=P, replace=TRUE)
6 |   X <- array(data=0, dim=c(length(z),2))
7 |   X[1,] <- colMeans(Z)
8 |   for(i in 2:length(z))
9 |     X[i,] <- (X[i-1,] + mu*Z[z[i],])/(1 + mu)
10 |   return(X)
11 | }
```

Если взять в качестве протофрактального множества $Z = Z_{41}$ вершины вписанного в единичную окружность правильного четырехугольника с равномерным законом распределения: $Z_{41} = \{(-k_{41}, -k_{41}), (-k_{41}, k_{41}), (k_{41}, k_{41}), (k_{41}, -k_{41})\}$, где $k_{41} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $p_j = \frac{1}{4}$ при $j = 1, 2, \dots, 4$, то при малых значениях μ множество точек $X = X_{41}$ реализации аттрактора системы (2) будет близко к выборке двумерного нормального распределения (в верхнем ряду слева на рис. 2), а при $\mu = 1$ — выборке двумерного равномерного распределения (в нижнем ряду слева на рис. 2).

Для иллюстрации последних утверждений проверим статистические гипотезы о соответствии выборочных данных X_{41} : а) при $\mu = \frac{1}{4}$ — нормальному закону распределения с помощью критерия Лиллиефорса; б) при $\mu = 1$ — равномерному закону распределения с помощью критерия Колмогорова–Смирнова. Требуемые для проверки вышеуказанных гипотез алгоритмы описаны в работах [Thode, 2002; Marsaglia et al., 2003] и реализованы в функциях “lillie.test()” из пакета “nortest” и “ks.test()” из пакета “stats” системы R.

Ввиду расходимости используемых критериев по достижимому уровню значимости (p-value) при значительных объемах выборки для проверки статистических гипотез были использованы x и y координаты первых 300 точек реализаций X_{41} аттрактора системы (2), показанных на рис. 2. Результаты проверки статистических гипотез приведены в следующем листинге.

```

1 | mu = 0.25
2 |   lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
```

Рис. 2. Реализации $X = X_{41}$ рандомизированной системы итеративных функций (2) для $x_0 = (0, 0)$ и $Z = Z_{41}$ после $n = 10^4$ итераций при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ (слева направо, сверху вниз)

```

3      data: X[1:300, 1]
4      D = 0.0341, p-value = 0.5401
5      Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test
6      data: X[1:300, 2]
7      D = 0.036, p-value = 0.4493
8  mu = 1.00
9      One-sample Kolmogorov-Smirnov test
10     data: X[1:300, 1]
11     D = 0.0498, p-value = 0.446
12     alternative hypothesis: two-sided
13     One-sample Kolmogorov-Smirnov test
14     data: X[1:300, 2]
15     D = 0.03, p-value = 0.9502
16     alternative hypothesis: two-sided

```

Как показывает проведенная проверка значения достижимых уровней, значимости (p-value) в обоих случаях превышают величину 0.44, что позволяет говорить о хорошем согласовании выдвинутых гипотез о виде распределений с выборочными данными.

Если в протофрактальном множестве $Z = Z_{42}$ к вершинам квадрата Z_{41} добавить середины его сторон с равномерным законом распределения: $Z_{42} = Z_{41} \cup \{(-k_{41}, 0), (0, k_{41}), (k_{41}, 0), (0, -k_{41})\}$; $p_j = \frac{1}{8}$ при $j = 1, 2, \dots, 8$, то при малых значениях μ множество точек X_{42} реализации аттрактора системы (2) по-прежнему будет близко к двумерному нормальному распределению (в верхнем ряду слева на рис. 3), а при $\mu = 2$ распределение точек X_{42} образует фрактальную структуру, известную как квадрат Серпинского (в нижнем ряду в центре на рис. 3).

Если же в протофрактальном множестве $Z = Z_{43}$ к вершинам квадрата Z_{41} добавить границы третьих долей его сторон с равномерным законом распределения: $Z_{43} = Z_{41} \cup \{(-k_{41}, -k_{43}),$

Рис. 3. Реализации $X = X_{42}$ рандомизированной системы итеративных функций (2) для $x_0 = (0, 0)$ и $Z = Z_{42}$ после $n = 10^4$ итераций при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ (слева направо, сверху вниз)

$(-k_{41}, k_{43}), (-k_{43}, k_{41}), (k_{43}, k_{41}), (k_{41}, k_{43}), (k_{41}, -k_{43}), (k_{43}, -k_{41}), (-k_{43}, -k_{41})$ }, где $k_{43} = \frac{\sqrt{2}}{6}$; $p_j = \frac{1}{12}$ при $j = 1, 2, \dots, 12$, то при $\mu = 3$ распределение точек X_{43} образует фрактальную структуру, которую можно назвать квадратом Серпинского старшего порядка (в нижнем ряду справа на рис. 4).

Трех- и шестиугольные протофрактальные множества

В качестве протофрактального множества для рандомизированной системы итеративных функций (2) могут быть использованы и другие многоугольники. Например, если в качестве протофрактального множества $Z = Z_{31}$ использовать вершины вписанного в единичную окружность правильного треугольника с равномерным законом распределения: $Z_{31} = \{(-k_{311}, -k_{312}), (0, 1), (k_{311}, -k_{312})\}$, где $k_{311} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $k_{312} = \frac{1}{2}$; $p_j = \frac{1}{3}$ при $j = 1, 2, 3$, то при малых μ достигаемый уровень значимости для гипотезы о близости X_{31} к выборке нормального распределения резко падает, а при $\mu = 1$ распределение точек образует фрактальную структуру, известную как треугольник Серпинского (в нижнем ряду слева на рис. 5).

Если же в протофрактальном множестве $Z = Z_{32}$ к вершинам треугольника добавить середины его сторон с равномерным законом распределения: $Z_{32} = Z_{31} \cup \{(-k_{321}, k_{322}), (0, -k_{312}), (k_{321}, k_{322})\}$, где $k_{321} = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $k_{322} = \frac{1}{4}$; $p_j = \frac{1}{6}$ при $j = 1, 2, \dots, 6$, то при малых μ достигаемый уровень значимости для гипотезы о близости X_{32} к выборке нормального распределения по-прежнему остается низким, а при $\mu = 2$ распределение точек образует фрактальную структуру, которую можно назвать треугольником Серпинского второго порядка (в нижнем ряду в центре на рис. 6).

Если в качестве протофрактального множества $Z = Z_{62}$ использовать вершины вписанного в единичную окружность правильного шестиугольника с равномерным законом распределения:

Рис. 4. Реализации $X = X_{43}$ рандомизированной системы итеративных функций (2) для $x_0 = (0, 0)$ и $Z = Z_{43}$ после $n = 10^4$ итераций при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ (слева направо, сверху вниз)

$Z_{62} = \{(-k_{311}, -k_{312}), (-k_{311}, k_{312}), (0, 1), (k_{311}, k_{312}), (k_{311}, -k_{312}), (0, -1)\}$; $p_j = \frac{1}{6}$ при $j = 1, 2, \dots, 6$, то при малых значениях μ распределение X_{62} будет снова близко к выборке двумерного нормального распределения, а при $\mu = 2$ распределение точек образует фрактальную структуру, которую можно назвать шестиугольником Серпинского (в нижнем ряду в центре на рис. 7).

Анализ размерности подобия

Один из классических подходов к определению размерности фрактальных объектов основан на использовании преобразования подобия [Hutchinson, 1981]. Так, если некоторое множество может быть представлено в виде разбиения на $(\frac{1}{s})^{d_S}$ частей, подобных целому с коэффициентом s , то показатель степени d_S будет соответствовать размерности подобия данного множества. В более общем случае размерность подобия можно выразить через отношение логарифма числа элементов разбиения k к логарифму коэффициента подобия s :

$$d_S = -\frac{\ln k}{\ln s}. \quad (5)$$

Оценим размерность подобия d_S в соответствии с (5) для распределений Серпинского, показанных на рис. 2–7. Размерность подобия четырехугольного распределения Серпинского первого порядка X_{41} (нижний ряд слева на рис. 2) будет равна $d_{S_{41}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$, так как при разбиении ребер квадрата с коэффициентом $s_{41} = \frac{1}{2}$ число элементов разбиения будет равно $k_{41} = 4$.

Тогда размерности подобия для четырехугольных распределений Серпинского второго X_{42} и третьего X_{43} порядков (нижний ряд в центре на рис. 3 и нижний ряд справа на рис. 4) будут равны $d_{S_{42}} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.893$ и $d_{S_{43}} = \frac{\ln 12}{\ln 4} \approx 1.792$ соответственно, так как при разбиении ребер

Рис. 5. Реализации $X = X_{31}$ рандомизированной системы итеративных функций (2) для $x_0 = (0, 0)$ и $Z = Z_{31}$ после $n = 10^4$ итераций при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ (слева направо, сверху вниз)

квадрата с коэффициентами $s_{42} = \frac{1}{3}$ и $s_{43} = \frac{1}{4}$ число элементов разбиения будет равно $k_{42} = 8$ и $k_{43} = 12$.

Заметим, что получение с помощью системы (2) различных множеств X_{41} – X_{43} , размерность подобия которых меняется от целочисленной $d_{S_{41}} = 2$ до дробной $d_{S_{43}} = \frac{\ln 12}{\ln 4}$ может служить в качестве контрпримера к одному из первых определений, сформулированных Б. Мандельбротом для фракталов как множеств с дробной размерностью [Mandelbrot, 1975].

Аналогично, размерности подобия для трех- и шестиугольных распределений Серпинского X_{31} , X_{32} , X_{62} (см. на рис. 5–7) будут равны $d_{S_{31}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$ и $d_{S_{32}} = d_{S_{62}} = \frac{\ln 6}{\ln 3} \approx 1.631$, соответственно, так как при разбиении ребер треугольника с коэффициентами $s_{31} = \frac{1}{2}$ и $s_{32} = \frac{1}{3}$ число элементов разбиения будет равно $k_{31} = 3$ и $k_{32} = 6$. Причина совпадения размерностей подобия $d_{S_{32}} = d_{S_{62}}$ состоит в том, что порождающие множества у трех- и шестиугольных распределений Серпинского второго порядка X_{32} и X_{62} оказываются гомеоморфными друг другу, а следовательно и их свойства должны быть идентичны друг другу с точностью до гомеоморфизма.

Сравнительный анализ вышеприведенных результатов приводит к гипотезе о связи показателей k и s из (5) с параметрами рандомизированной системы итеративных функций (2). Для всех рассмотренных выше примеров параметр $\mu = \frac{1}{s} - 1$, а число элементов порождающего множества k совпадает с числом элементов разбиения. Как это было показано в свойствах (3) и (4), при фиксированном протофрактальном множестве Z и предельных значениях параметра μ реализации аттрактора X системы (2) будут вырождаться к начальной точке $X \rightarrow x_0$ при $\mu \rightarrow 0$, либо к протофрактальному множеству $X \rightarrow Z$ при $\mu \rightarrow \infty$ с убыванием абсолютной величины размерности подобия $d_S \rightarrow 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда максимальное значение размерности подобия d_S для формируемой системой (2) фрактальной структуры может быть определено

Рис. 6. Реализации $X = X_{32}$ рандомизированной системы итеративных функций (2) для $x_0 = (0, 0)$ и $Z = Z_{32}$ после $n = 10^4$ итераций при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ (слева направо, сверху вниз)

в виде:

$$\max_{0 < \mu < \infty} d_S(\mu|k) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_c} d_S(\mu|k) = -\frac{\ln k}{\ln \frac{1}{1+\mu}}. \quad (6)$$

Заключение

Сравнительный анализ распределений для четырехугольных протофрактальных множеств Z_4 на рис. 2–4 с учетом значений параметра μ системы (2) показывает, что реализацию с равномерным распределением точек X_{41} (нижний ряд слева на рис. 2) можно считать четырехугольным распределением Серпинского первого порядка. В таком случае классический квадрат Серпинского X_{42} в центре нижнего ряда на рис. 3 будет соответствовать четырехугольному распределению Серпинского второго порядка, а реализация X_{43} в нижнем ряду справа на рис. 4 — четырехугольному распределению Серпинского третьего порядка.

Для трех- и шестиугольных протофрактальных множеств Z_3 и Z_6 реализаций с равномерным распределением точек по нашим данным не формируется. При этом показанный в нижнем ряду слева на рис. 5 классический треугольник Серпинского X_{31} будет соответствовать трехугольному распределению Серпинского первого порядка, а реализации X_{32} и X_{62} , показанные в центре нижнего ряда на рис. 6 и рис. 7, — трех- и шестиугольным распределениям Серпинского второго порядка. Заметим, что ребра протофрактального шестиугольника Z_{62} не содержат дополнительных точек разбиения и с формальной точки зрения шестиугольное распределение Серпинского следовало бы отнести к распределениям первого порядка, но соответствующее более упорядоченной структуре значение параметра $\mu = 2$, говорит о том, что это распределение второго порядка.

Рис. 7. Реализации $X = X_{62}$ рандомизированной системы итеративных функций (2) для $x_0 = (0, 0)$ и $Z = Z_{62}$ после $n = 10^4$ итераций при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ (слева направо, сверху вниз)

Обобщая рассмотренные примеры отметим, что при фиксированном протофрактальном множестве Z и малых значениях параметра μ большинство итерационных точек x_i концентрируется в окрестности точки x_0 , формируя распределения, близкие к выборкам двумерного нормального распределения. По мере роста μ в распределении точек x_i формируются неоднородности, а наиболее однородное распределение достигается, судя по нашим данным, при единственном критическом значении μ_c , после превышения которого точки x_i начинают стягиваться к элементам протофрактального множества Z . Как было показано выше для множества Z_{41} при $\mu_c = 1$ это соответствует выборке равномерного закона распределения непрерывной двумерной случайной величины, а для остальных множеств Z при $\mu = \mu_c$ — распределениям Серпинского различных порядков.

Кроме того, при значениях параметра системы (2), превышающих указанное критическое значение $\mu \geq \mu_c$, каждая точка протофрактального множества z_j является основанием для некоторого изолированного подмножества итерационных точек, отображающих структуру всего множества Z . Причем данная протофрактальная точка z_j занимает в указанном подмножестве то же самое положение, которое z_j занимала в исходном протофрактальном множестве Z , что отражает самоподобие фрактальной структуры аттрактора системы (2).

Список литературы

- Буховец А. Г., Буховец Е. А. Моделирование фрактальных структур данных // Системы управления и информационные технологии. — 2008. — Т. 33, № 3. — С. 4–7.
- Буховец А. Г., Москалев П. В., Бирючинская Т. Я. Использование систем итеративных функций в решении прикладных задач // Актуальные проблемы прикладной математики, информа-

- тики и механики: сборник трудов международной конференции. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. — С. 84–87.
- Буховец А. Г., Бирючинская Т. Я., Москалев П. В. Оценка точности аппроксимации многомерных данных рандомизированной системой итеративных функций // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2012: Материалы международной научной конференции. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2012. — С. 39–41.
- Barnsley M. *Fractals Everywhere*. — New York: Academic Press, 1988. — 534 p.
- Hutchinson J. Fractals and self similarity // *Indiana University Mathematics Journal*. — 1981. — Vol. 30, no. 5. — Pp. 713–747.
- Mandelbrot B. B. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. — Paris: Flammarion, 1975. — 192 p.
- Marsaglia G., Tsang W. W., Wang J. Evaluating Kolmogorov's distribution // *Journal of Statistical Software*. — 2003. — Vol. 8, no. 18. — Pp. 1–4.
- Onicescu O., Mihoc G. Sur les chaînes de variables statistiques // *Bulletin des Sciences Mathématiques*. — 1935. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 174–192.
- The R Project for Statistical Computing: [сайт]. — URL: <http://www.r-project.org/> (дата обращения: 25.04.2012).
- Thode Jr., H. C. *Testing for Normality*. — New York: Marcel Dekker, 2002. — 479 p.