

УДК: 519.8

О механизме переключения стоячей волны в бегущую, сопровождающегося делением длины волны пополам

М. Ю. Борина, А. А. Полежаев^а

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53

E-mail: ^аapol@lpi.ru

Получено 21 июня 2012 г.

В данной работе предложен возможный механизм перехода из режима стоячих волн с длиной волны λ_{sw} в режим бегущих волн с половинной длиной волны: $\lambda_{tw} \equiv \lambda_{sw} / 2$. Такой переход был обнаружен в пространственно распределенной реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля OT [Kaminaga et al., 2005]. Задача решалась в пространственно одномерном случае с использованием аппарата амплитудных уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Показано, что переход возможен при выполнении определенных условий. Выведены условия на силы связи между взаимодействующими модами, при выполнении которых в модели реализуется сценарий перехода от стоячей к бегущей волне половинного периода, наблюдаемый в эксперименте. Результат теоретического анализа подтверждается численным моделированием.

Ключевые слова: бифуркация, стоячие волны, бегущие волны, амплитудные уравнения

About the mechanism of switching between standing and traveling waves is accompanied by a halving of the wavelength

M. Yu. Borina, A. A. Polezhaev

P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
Russia, 119991, Moscow, Leninskiy prospekt, 53

Abstract. — We suggest a possible mechanism for the transition from standing waves with a wavelength λ_{sw} to traveling waves with a half wavelength: $\lambda_{tw} \equiv \lambda_{sw} / 2$. This phenomenon was observed in the Belousov–Zhabotinsky reaction dispersed in a water-in-oil aerosol OT/Span-20 microemulsion. The problem is solved in a spatially one-dimensional case using amplitude equations approach. We demonstrate that a transition is possible under certain conditions. We obtain conditions for the mode coupling strength parameters, under which the scenario of transition from a standing wave to a half-period traveling wave, observed experimentally, is realized. The result of theoretical analysis is confirmed by numerical simulations.

Keywords: bifurcation, standing waves, traveling waves, amplitude equations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 673–679 (Russian).

Введение

Волновая бифуркация является причиной возникновения разнообразных пространственно-временных структур в активных средах различной природы [Jakubith et al., 1990; Bertram et al., 2003; Epstein et al., 2008; Zhabotinsky et al., 2000]. Чаще всего возникают либо стоячие, либо бегущие волны. Иногда наблюдается переключение между этими двумя режимами, что было предметом изучения ряда экспериментальных и теоретических работ. Так, переход между стоячими и бегущими волнами наблюдали в терморастворимой конвекции [Deane, Knobloch, Toomre, 1987] и в цилиндрической конвекции Рэлея–Бенара [Boronska, Tuckerman, 2006]. Также переключение наблюдалось в периодически возбуждаемых колебательных системах, например, в конвекции бинарной смеси или в нематических жидких кристаллах [Rehberg, 1988]. Недавно такой переход был индуцирован в реакции Белоусова–Жаботинского внешним периодическим возмущением [Marts, 2008]. Важно, однако, что во всех приведенных случаях длина волны оставалась неизменной.

В работе [Kaminaga et al., 2005] приведено первое экспериментальное наблюдение перехода от стоячей к бегущей волне, в котором волновое число удваивается. Это явление наблюдали в реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля OT/Span-20 (в так называемой BZ-AOT/Span системе [Ванаг, 2004]). На рис. 1 приведены экспериментальные результаты, полученные этими авторами.

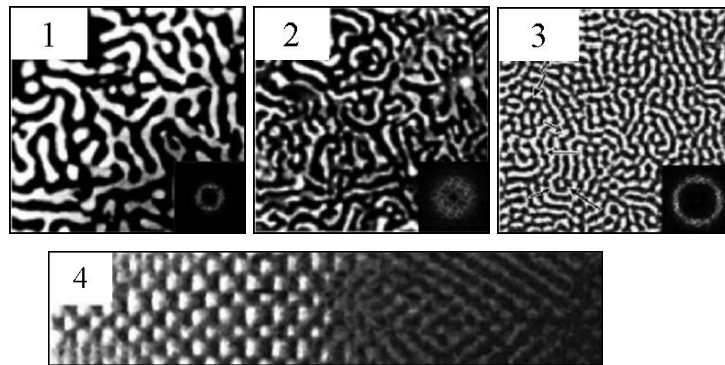


Рис. 1. Снимки стоячих волн (1), переходных структур (2) и бегущих волн (3), обнаруженных в BZ-AOT/Span системе. (4) Пространственно-временной график перехода из режима стоячих волн в режим бегущих, сопровождающийся делением длины волны пополам (из работы [Kaminaga et al., 2005])

В настоящей работе предлагается возможный механизм экспериментально наблюдаемого переключения стоячей волны в бегущую, сопровождающегося делением длины волны пополам. Задача решается в пространственно-одномерном случае с помощью построения и последующего исследования амплитудных уравнений [Kuramoto, 1984; Nicolis, 1995]. Результат теоретического анализа подтвержден численным моделированием.

Математическая модель

Математическая модель, объясняющая вышеописанный феномен, основана на нескольких предположениях относительно процессов, происходящих в одномерной активной среде, которые перечислены ниже.

1. Стоячая волна есть результат волновой бифуркации. Волна описывается некоторой переменной u_1 , которую можно представить в виде $u_1(r, t) = \tilde{A}_1 e^{i(\omega t + k r)} + \tilde{A}_2 e^{i(\omega t - k r)}$.

Здесь $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ — комплексные амплитуды мод, ставших неустойчивыми в результате бифуркации и соответствующих одинаковым по модулю, но разным по направлению волновым векторам $\pm \vec{k}$ и частоте ω .

Если предположить, что бифуркация является суперкритической, то вблизи неё динамика системы взаимодействующих мод может быть описана при помощи амплитудных уравнений типа Гинзбурга–Ландау следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{A}}_1 = \tilde{A}_1 - (1 - ic_1)\tilde{A}_1|\tilde{A}_1|^2 - h_1(1 - ic_2)\tilde{A}_1|\tilde{A}_2|^2, \\ \dot{\tilde{A}}_2 = \tilde{A}_2 - (1 - ic_1)\tilde{A}_2|\tilde{A}_2|^2 - h_1(1 - ic_2)\tilde{A}_2|\tilde{A}_1|^2. \end{cases} \quad (1)$$

В этих уравнениях не учитывается пространственная дисперсия мод, и поэтому в них отсутствуют производные амплитуд по координате. Это оправдано, если рассматривается ограниченная область [Nicolis, 1995].

В системе (1) вблизи волновой бифуркации в зависимости от величины параметра h_1 , соответствующего силе связи между конкурирующими модами, возможны лишь два режима — стоячая или квазиодномерная бегущая волна. Для того чтобы в системе (1) формировалась стоячая волна $u_1(r, t)$ необходимо, чтобы сила связи взаимодействующих мод h_1 была мала, $h_1 \in (0, 1)$ [Борина, Полежаев, 2012]. В этом случае моды сосуществуют друг с другом, имея при этом одинаковые амплитуды, равные $|A_0| = 1 / \sqrt{1 + h_1}$.

2. Допустим, что в той же системе волна $u_2(r, t) = \tilde{B}_1 e^{i(\omega_2 t + 2kr)} + \tilde{B}_2 e^{i(\omega_2 t - 2kr)}$ с удвоенным по сравнению со стоячей волной волновым числом $2k$ и частотой ω_2 устойчива, но может быть возбуждена жестким образом вследствие субкритической волновой бифуркации.

Соответствующие амплитудные уравнения в случае субкритической бифуркации имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{B}}_1 = -\alpha\tilde{B}_1 + (1 - id_1)\tilde{B}_1|\tilde{B}_1|^2 - (1 - id_3)\beta \cdot \tilde{B}_1|\tilde{B}_1|^4 - h_2(1 - id_2)\tilde{B}_1|\tilde{B}_2|^2, \\ \dot{\tilde{B}}_2 = -\alpha\tilde{B}_2 + (1 - id_1)\tilde{B}_2|\tilde{B}_2|^2 - (1 - id_3)\beta \cdot \tilde{B}_2|\tilde{B}_2|^4 - h_2(1 - id_2)\tilde{B}_2|\tilde{B}_1|^2, \end{cases} \quad (2)$$

где α, β — некоторые положительные константы. Коэффициент h_2 — сила связи взаимодействующих мод. Нетрудно показать, что если h_2 достаточно велико: $h_2 > \gamma$, где $\gamma = (1 - 4\alpha\beta)$, то вблизи волновой бифуркации одна из мод подавит остальные и сформируется бегущая волна. В противном случае, когда h_2 мало — $h_2 \in (0, \gamma)$, моды сосуществуют друг с другом, причем имеют одинаковые амплитуды, что соответствует стоячей волне.

3. Предположим, что имеет место резонанс между первой и второй волной, заключающийся в том, что у волны $u_2(r, t)$ не только волновое число, но и частота в два раза больше, чем у первой волны: $\omega_2 = 2\omega$. Дисперсионные кривые системы, в которой выполнено условие резонанса, проиллюстрированы на рис. 2.

Если построить амплитудные уравнения, описывающие все четыре взаимодействующие моды, то для модулей амплитуд A_i и B_i , где $A_i = |\tilde{A}_i|$, $B_i = |\tilde{B}_i|$, $i = 1, 2$, мы получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = A_1 - A_1^3 - h_1 A_2^2 A_1 - \delta_1 (B_1^2 + B_2^2) A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} = A_2 - A_2^3 - h_1 A_1^2 A_2 - \delta_1 (B_1^2 + B_2^2) A_2, \\ \frac{dB_1}{dt} = -\alpha B_1 + B_1^3 - \beta B_1^5 - h_2 B_2^2 B_1 - \delta_2 (A_1^2 + A_2^2) B_1 + \sigma \cos \psi_1(t) A_1^2, \\ \frac{dB_2}{dt} = -\alpha B_2 + B_2^3 - \beta B_2^5 - h_2 B_1^2 B_2 - \delta_2 (A_1^2 + A_2^2) B_2 + \sigma \cos \psi_2(t) A_2^2, \end{cases} \quad (3)$$

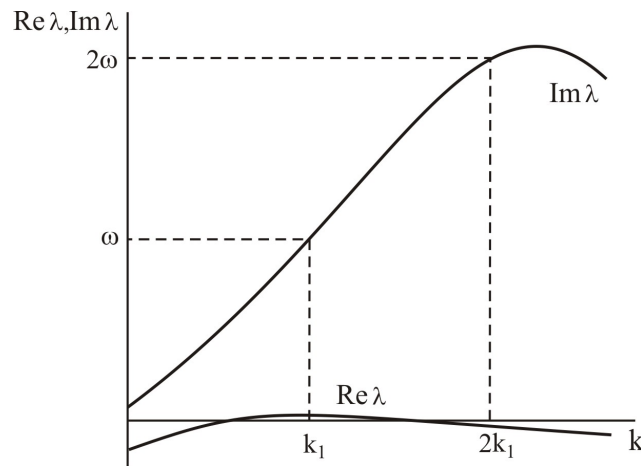


Рис. 2. Дисперсионные кривые системы, для которой выполняется условие резонанса: у волны с удвоенным волновым числом частота также в два раза больше

Во второй паре уравнений системы (3) последние слагаемые в правой части обусловлены резонансом. ψ_i — разность фаз комплексных амплитуд $\tilde{A}_i$ и $\tilde{B}_i$, медленно меняющаяся со временем, δ_i — силы связи соответствующих взаимодействующих мод, $i = 1, 2$.

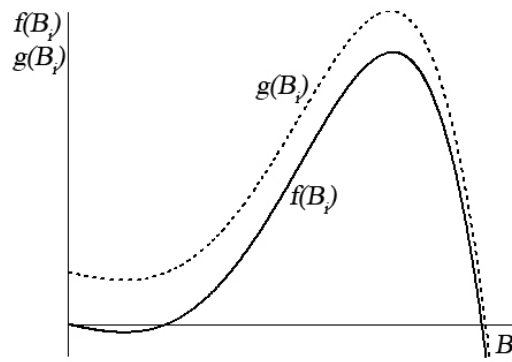


Рис. 3. Корни функции $f(B_i) = -\alpha B_i + B_i^3 - \beta B_i^5$ соответствуют стационарным состояниям моды B_i при условии, что остальные амплитуды равны нулю, при этом имеется два устойчивых состояния — нулевое и возбужденное. Когда амплитуды A_1 и A_2 станут равными $1/\sqrt{1+h_1}$, а $\cos \psi_i(t) = 1$, стационарные состояния моды B_i будут определяться корнями функции $g(B_i) = -\left(\alpha + 2\frac{\delta_2}{1+h_1}\right)B_i + B_i^3 - \beta B_i^5 + \frac{\sigma}{1+h_1}$. При достаточно большом значении σ остается только один корень, соответствующий возбужденному состоянию данной моды

Покажем теперь, основываясь на уравнениях (3), каким образом осуществляется переход от стоячей волны к бегущей волне с половинной длиной. В результате случайного начального возмущения амплитуды A_i начнут расти, амплитуды же B_i останутся нулевыми, так как для них исходное состояние является устойчивым. В результате сформируется стоячая волна, при этом амплитуды A_1 и A_2 станут равными $1/\sqrt{1+h_1}$. В свою очередь это приведет к тому, что кривая, определяющая состояния равновесия во второй паре уравнений будет сдвигаться вверх. После этого в некоторый момент времени, когда $\cos \psi_i(t)$ ($i = 1$ или 2) станет равным единице, при условии, что $\sigma > \frac{1+h_1}{25\beta} \left(20\beta\alpha' - 3 + \sqrt{9 - 20\beta\alpha'}\right) \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 20\beta\alpha'}}{10\beta}}$, где $\alpha' = \alpha + 2\delta_2 / (1 + h_1)$, у соответствующей амплитуды B_i исчезнет нулевое устойчивое состояние (см. рис. 2), что приведет

к переключению в возбужденное состояние. В силу достаточно сильной конкуренции эта мода подавит три остальные, что будет означать переход системы в состояние бегущей волны с половинной длиной.

С учетом полученных оценок было найдено численное решение системы (3). В начальный момент времени амплитуды имели нулевые значения и возмущались случайным шумом. На рис. 4 приведено изменение во времени амплитуд A_1 , B_1 и B_2 для случая $h_2 > 1 - 4\alpha\beta$ (амплитуда A_2 ведет себя аналогично A_1).

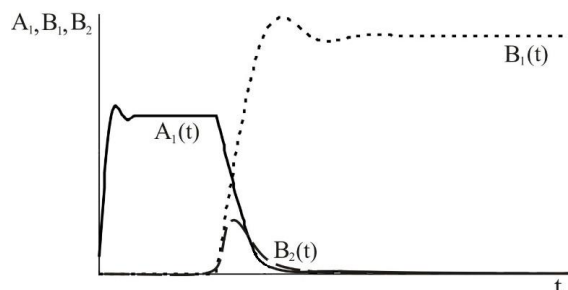


Рис. 4. Временная эволюция амплитуд A_1 , B_1 и B_2 для случая перехода «стоячая волна (λ_{SW}) — бегущая волна ($\lambda_{TW} \equiv \lambda_{SW} / 2$)»

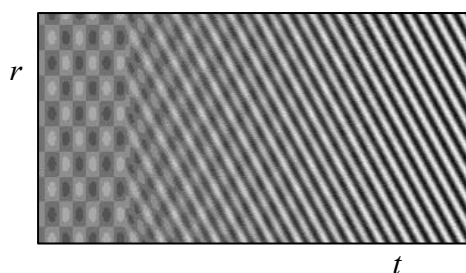


Рис. 5. Пространственно-временной график $u(r, t)$ перехода «стоячая волна (λ_{SW}) — бегущая волна ($\lambda_{TW} \equiv \lambda_{SW} / 2$)»

Поведение системы описывается переменной u , являющейся суммой всех четырех мод: $u(r, t) = A_1 e^{i(\omega t + kr)} + A_2 e^{i(\omega t - kr)} + B_1 e^{i(2\omega t + 2kr)} + B_2 e^{i(2\omega t - 2kr)}$. На рис. 5 представлен пространственно-временной график поля результирующей волны u с учетом полученных выше зависимости амплитуд от времени.

Если условие $h_2 > 1 - 4\alpha\beta$ нарушено, то возможен переход из исходной стоячей волны в стоячую же волну, но с половинным периодом, как показано на рис. 6. Однако такого явления пока в реальном эксперименте не наблюдалось.

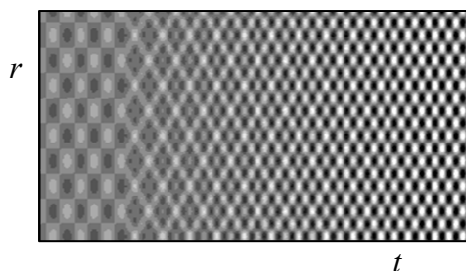


Рис. 6. Пространственно-временной график $u(r, t)$ перехода «стоячая волна (λ_{SW}) — стоячая волна ($\lambda_{TW} \equiv \lambda_{SW} / 2$)» в случае $h_2 < 1 - 4\alpha\beta$

Заключение

В данной работе предложен возможный механизм перехода из режима стоячих волн с длиной волны λ_{sw} в режим бегущих волн с половинной длиной волны: $\lambda_{\text{tw}} \cong \lambda_{\text{sw}} / 2$. Такой переход был обнаружен экспериментально в пространственно распределенной реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля ОТ.

Задача решалась в пространственно одномерном случае с использованием аппарата амплитудных уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Показано, что переход возможен при выполнении следующих основных условий.

- Стоячая волна возбуждается благодаря суперкритической волновой бифуркации.
- Волна с удвоенным по сравнению со стоячей волной волновым числом устойчива, но может быть возбуждена жестким образом вследствие субкритической волновой бифуркации.
- Имеет место резонанс между первой и второй волной, заключающийся в том, что у волны с удвоенным волновым числом частота также в два раза больше.

Выведены условия на силы связи между взаимодействующими модами, при выполнении которых в модели реализуется сценарий перехода от стоячей к бегущей волне половинного периода, наблюдаемого в эксперименте.

Результат теоретического анализа подтверждается численным моделированием.

Следует сделать два замечания.

К сожалению, нам не удалось найти примера реакционно-диффузионной модели, которая обладает требуемыми свойствами. По сути дела требуется решить обратную задачу — по амплитудным уравнениям построить порождающую их кинетическую модель. Эта задача весьма сложна и нами пока не решена.

Условие резонанса с позиции теории динамических систем делает ситуацию негрубой. Однако на наш взгляд это не является в данном случае проблемой: в реальной химической системе происходит непрерывный дрейф параметров, при этом резонанс может в какой-то момент наступить, что и приведет к наблюдаемому переключению между режимами.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 11-01-00392.

Список литературы

- Борова М. Ю., Полежаев А. А. Пространственно-временные структуры в многомерной активной среде, обусловленные многомодовым взаимодействием вблизи волновой бифуркации // Известия вузов, Прикладная нелинейная динамика, 2012 (в печати).
- Ванаг В. К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова–Жаботинского в обращенной микроэмульсии // УФН, 2004, т. 174. № 9, с. 991–1010.
- Bertram M., Beta C., Pollmann M., Mikhailov A. S., Rotermund H. H. and Ertl G. Pattern formation on the edge of chaos: Experiments with CO oxidation on a Pt(110) surface under global delayed feedback // Phys. Rev. E, 2003, v. 67, p. 036208.
- Boronska K., Tuckerman L.S. Standing and travelling waves in cylindrical Rayleigh–Benard convection // J. Fluid Mech., 2006, v. 559, p. 279–298.
- Deane A. E., Knobloch E., Toomre J. Traveling waves and chaos in thermosolutal convection // Phys. Rev. E, 1987, v. 36, p. 2862–2869.
- Epstein I. R., Berenstein I. B., Dolnik M., Vanag V. K., Yang L., Zhabotinsky A. M. Coupled and forced patterns in reaction-diffusion systems // Phil. Trans. R. Soc. A, 2008, v. 366, p. 397–408.
- Jakubith S., Rotermund H. H., Engel W., von Oertzen A., and Ertl G. Spatiotemporal Concentration Patterns in a Surface Reaction: Propagating and Standing Waves, Rotating Spirals, and Turbulence // Phys. Rev. Lett., 1990, v. 65, p. 3013.

- Kaminaga A., Vanag V., Epstein I.* Wavelength Halving in a Transition between Standing Waves and Traveling Waves // *Phys. Rev. Lett.*, 2005, v. 95, p. 058302.
- Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer-Verlag, Berlin, 1984, 156 p.
- Marts B., Lin A. L.* Transition from traveling to standing waves in the 4:1 resonant Belousov-Zhabotinsky reaction // *Phys. Rev. Lett. E.*, 2008, v. 77, p. 026211.
- Nicolis G.* Introduction to nonlinear science. Cambridge University Press, 1995, 254 p.
- Rehberg I., Rasenat S., Fineberg J., de la Torre Juarez M., Steinberg V.* Temporal Modulation of Traveling Waves // *Phys. Rev. Lett.*, 1988, v. 61, p. 2449–2452.
- Zhabotinsky A. M., Dolnik M., Epstein I. R., Rovinsky A. B.* Spatio-temporal patterns in a reaction-diffusion system with wave instability // *J. Chem. Science*, 2000, v. 55, p. 223–231.