МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 519.6

# Методика эталонных «line-by-line» расчетов атмосферной радиации

А.В. Шильков<sup>1</sup>, М.Н. Герцев<sup>2,а</sup>, Е.Н. Аристова<sup>1,2</sup>, С.В. Шилькова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4 <sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Россия, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

E-mail: a gertsev.mikl@gmail.com

Получено 31 мая 2012 г., после доработки 25 июня 2012 г.

В работе описана методика «line-by-line» расчета тепловой радиации Земли и земной атмосферы. Расчет пространственно-углового распределения радиации производится численным интегрированием кинетического уравнения переноса излучения и уравнений для угловых моментов методом квазидиффузии. В качестве исходных данных для восстановления оптических параметров атмосферы используется банк линий молекулярного поглощения HITRAN [Rothman et al., 2009].

# Benchmark «line-by-line» calculations of atmospheric radiation

## A. V. Shilkov<sup>1</sup>, M. N. Gertsev<sup>2</sup>, E. N. Aristova<sup>1,2</sup>, S. V. Shilkova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, 4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia <sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskii per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

**Abstract.** — The paper presents the methodology of «line-by-line» calculations of the Earth and atmosphere thermal radiation. Intensity of radiation is computed by numerical integration of the radiative transfer kinetic equation and the system of the angular momentum equations using quasi-diffusion method. Data from HITRAN molecular spectroscopic database [Rothman et al., 2009] are used to calculate the atmosphere optical parameters.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 553–562 (Russian). Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 011-01-00389а.

© 2012 Александр Викторович Шильков, Михаил Николаевич Герцев, Елена Николаевна Аристова, Светлана Викторович Шилькова

### Введение

Компьютерное моделирование переноса излучения в атмосферах Земли и планет имеет разнообразные научные и технические применения. Это расчет мощности поглощения и испускания радиации в атмосфере в проблеме моделирования погоды и климата (компьютерные модели общей циркуляции атмосферы); расчет сумм приходящей и испущенной радиации в задачах теплообмена поверхности (испарение с водной поверхности, точное земледелие, солнечная энергетика); расчет параметров ослабления, рассеяния и отражения пучков излучений в задачах обработки данных наземных и аэрокосмических систем наблюдения. Практические приложения требуют разный объем вычислений — от расчета распределения излучения в узком диапазоне изменения углов и энергий фотонов до расчета «широкого» распределения в полном телесном угле и полном спектре энергий.

В «line-by-line» расчетах «широких» распределений атмосферной радиации наибольшую популярность, благодаря простоте применения, приобрел метод статистического моделирования Монте-Карло. Однако этот метод слишком затратен для использования в оперативных моделях общей циркуляции атмосферы или, например, в задачах обработки данных зондирования атмосферы. В этих приложениях, как правило, используются методы численного решения кинетического уравнения переноса.

Этап верификации компьютерного кода включает сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными и результатами расчетов, выполненных по другим кодам. Часто в качестве «эталона» сравнения используются результаты расчетов, выполненных методом Монте-Карло [Ellingson et al., 1991].

Цель настоящей работы состоит в разработке унифицированной методики численного решения уравнения переноса излучения в атмосфере, применимой в широком круге практических задач. Методика входит в систему ATRAD (Atmospheric Radiation Data System) — комплекс компьютерных кодов и данных, предоставляющих пользователю программные средства и данные для проведения расчетов атмосферной радиации, а также средства верификации результатов расчетов [Шильков и др., 1994].

Опишем основные требования к методике.

1. Методика должна выполнять расчеты переноса атмосферной радиации в различных практических приложениях с регулируемой точностью, задаваемой пользователем, в том числе — расчеты с предельной точностью<sup>1</sup> и с оптимальной точностью<sup>2</sup>. Методика не должна вносить «неконтролируемых» пользователем ошибок в результаты численного моделирования.

2. Методика должна опираться на численное решение кинетического уравнения переноса излучения, и не использовать метод «Монте-Карло».

3. Методика должна быть инвариантна относительно разрешения спектра фотонов. То есть выполнять как «line-by-line» расчеты всех линий молекулярного поглощения, так и расчеты с использованием осредненных по спектру оптических констант (лебеговых сечений [Шильков и др., 1997], многогрупповых коэффициентов поглощения и рассеяния, констант для моделей полос молекулярного поглощения [Гуди, 1966]) с помощью одного и того же компьютерного кода, численного алгоритма, разностной схемы, метода решения.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Предельная точность, определяется только точностью исходных данных о микросечениях взаимодействия излучения с молекулами атмосферных газов, аэрозольными частицами, поверхностями твердых тел и данных об их пространственных распределениях.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Точность решения непосредственно связана с объемом вычислений. Чем выше точность, тем большей ценой она достигается. В разных практических приложениях требования к точности расчета излучения различны. Они задаются характерными допусками ошибок в определяющих физических параметрах задачи. Часто расчет переноса излучения целесообразно проводить не с предельной, а с «оптимальной» точностью, задействовав высвободившиеся вычислительные ресурсы для расчета других физических процессов.

Выполнение этих требований гарантирует методике широкую область применимости, непрерывность перехода от «предельной» к «оптимальной» точности, а также существенно упрощает этап верификации методики.

# Первый этап — Расчет оптических толщин слоев атмосферы в интервалах спектра

В данной работе представлен вариант методики, в котором производится подробный «lineby-line» расчет спектра теплового излучения Земли и атмосферы с использованием детальных (не осредненных) микросечений молекулярного поглощения. Параметры линий молекулярного поглощения берутся из базы данных HITRAN–2008 [Rothman et al., 2009]. Этап включает:

1) построение расчетной сетки по энергии фотонов;

2) восстановление сечений поглощения 29 атмосферных газов (столько газов представлено в HITRAN) на сетке энергии, температуры и атмосферного давления;

3) расчет оптических толщин 36 слоев атмосферы.

Сетка по энергиям фотонов должна передавать все особенности сечений молекулярного поглощения. Поэтому в сетку включаются центры линий молекулярного поглощения атмосферных газов с учетом их изотопических модификаций, а также точки минимума сечений между двумя соседними линиями. Все интервалы, превышающие по величине доплеровскую ширину линии, дробятся до величины оной. Такой алгоритм построения сетки обусловлен следующим. В нижних слоях атмосферы, где плотность воздуха велика, преобладает ударный механизм уширения линий. Профиль каждой линии близок по форме к лоренцевскому профилю. На больших высотах, вследствие экспоненциального падения давления и плотности воздуха с высотой, вклад ударного механизма уширения в суммарную ширину линии становится меньше вклада доплеровского механизма уширения. Результирующая сетка в характерном интервале спектра тепловых фотонов от 0 до 2000 (см<sup>-1</sup>) составила примерно 1.5 + 7 = 8.5 млн точек, из которых 1.5 млн приходится на центры линий. Сетка по температуре и давлению охватывает диапазон:  $200^{\circ}$ K  $\leq T \leq 400^{\circ}$ K (5 точек) и 0.001 atm  $\leq P \leq 2$  atm (12 точек).

Для учета совместного действия ударного и доплеровского механизмов уширения линий профиль каждой линии представляется в виде фойгтовского профиля  $F_n$  — свертки лоренцевского профиля и доплеровского профиля:

$$F_{n}(E - E_{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{n}^{L}(E - E_{n} - E')F_{n}^{D}(E' - E_{n})dE',$$

$$F_{n}^{L}(E - E_{n})dE = \frac{\gamma_{n}^{L}/\pi}{[E - E_{n}]^{2} + [\gamma_{n}^{L}]^{2}}dE,$$

$$F_{n}^{D}(E - E_{n})dE = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot e^{-\ln 2 \cdot [E - E_{n}]^{2}/[\gamma_{n}^{D}]^{2}}\frac{dE}{\gamma_{n}^{D}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-[E - E_{n}]^{2}/[\Delta_{n}]^{2}}\frac{dE}{\Delta_{n}}$$

Здесь  $F_n^L$  и  $F_n^D$  суть лоренцевский и доплеровский профили линий поглощения соответственно,  $E_{n[cm^{-1}]}$  — энергия резонансного перехода (центр линии). Полуширины линий  $\gamma_n^L$  и  $\gamma_n^D = \Delta_n [\ln 2]^{1/2}$  вычисляются по формулам

$$\gamma_n^L = [\gamma_n^A [1 - C] + \gamma_n^B C] \cdot \frac{P}{P_S} \left[\frac{T_S}{T}\right]^n,$$
  
$$\gamma_n^D = \sqrt{\ln 2} \cdot \Delta_n = E_n \left[\frac{2\ln 2 \cdot kT N_{A\nu}}{Ac^2}\right]^{1/2} = 3.581 \cdot 10^{-7} \cdot E_n \left[\frac{T_{[K]}}{A}\right]^{1/2},$$

\_ 2012, T. 4, № 3, C. 553–562 \_\_\_\_\_

$$\Delta_n = \frac{\gamma_n}{\sqrt{\ln 2}} = E_n \left[ \frac{2kTN_{Av}}{Ac^2} \right]^{1/2} = 4.301 \cdot 10^{-7} \cdot E_n \left[ \frac{T_{[K]}}{A} \right]^{1/2},$$
  

$$C = \frac{N_B}{N} = \frac{P_B}{P}, \qquad P_S = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pascal}, \qquad T_S = 296^{\circ} \text{K}.$$

Индекс «В» обозначает один из 29 атмосферных газов, P – давление воздуха,  $P_S$  – нормальное давление, C – отношение смеси газа «В»,  $\gamma_n^A$  – полуширина линии, обусловленная столкновениями с молекулами воздуха при нормальном давлении и нормальной температуре,  $\gamma_n^B$  – полуширина линии, обусловленная столкновениями с собственными молекулами, n – показатель температурной зависимости полуширины линии, A – молекулярный вес газа.

Сечение молекулярного поглощения для каждого из 29 газов вычисляется на сетке по энергии фотонов, температуре и плотности по формуле:

$$\sigma_{B,j}(T,P) = \int_{E_j}^{E_{j+1}} \sum_n S_n^*(T) F_n(E-E_n) dE,$$

Здесь  $\sigma_{B,j}$  — суммарное для интервала энергий  $[E_j, E_{j+1}]$  сечение поглощения, «*j*» — индекс энергетического интервала, (*T*, *P*) — координаты точки по температуре и давлению,  $S_n^*$  — сила «*n*-ой» линии поглощения с учетом натуральной встречаемости изотопической модификации газа «В». Этап восстановления детальных сечений поглощения занимает довольно много вычислительных ресурсов. Для более продуктивного использования мощности процессоров в расчете применялись технологии OpenMP.

После расчета спектральных микросечений поглощения производится расчет оптических толщин для 36 слоев атмосферы. В качестве вертикального распределения атмосферных газов были взяты вертикальные профили Стандартной атмосферы США (U.S. Standard (1976)) и Стандартных атмосфер BBC США [Anderson et al., 1986]. Оптическая толщина вычисляется суммированием сечений с учетом содержания молекул газов в данном слое:  $\tau_{i,j} = \sum k_{B,i} \sigma_{B,j}(i)$ . Здесь  $\tau_{i,j}$  – оптическая толщина «*i*»-го слоя воздуха в интервале спектра «*j*»,  $k_{B,i}$  – число молекул газа «*B*» в слое,  $\sigma_{B,j}(i)$  – среднее сечение поглощения в слое. Среднее сечение поглощения вычисляется с помощью логарифмической интерполяции табличных значений, рассчитанных ранее в точку температуры и давления, соответствующей данному слою воздуха.

На рисунке 1 приведена оптическая толщина слоя от 0 м до 500 м для стандартной атмосферы средних широт ( $T = 286.57^{\circ}$ K, P = 0.97atm) в тепловом диапазоне спектра, на рисунке 2 толщина слоя от 40 км до 42.5 км ( $T = 246.62^{\circ}$ K,  $P = 10^{-3}$ atm).

#### Метод расчета пространственно-углового распределения излучения

Методы численного решения кинетического уравнения переноса излучения можно условно разделить на три группы. Это:

1) методы численного интегрирования непосредственно уравнения переноса;

2) методы численного интегрирования системы уравнений для угловых моментов интенсивности излучения (например, метод сферических гармоник);

3) гибридные методы, использующие и интегрирование уравнения переноса, и интегрирование уравнений для моментов.

Мы пользуемся методом квазидиффузии [Гольдин, 1964], который относится к третьей группе методов.

Особенностью детальных расчетов спектров атмосферной радиации является то, что отличие в оптической толщине слоев атмосферы в разных интервалах спектра фотонов и на разных



Рис. 1. Оптическая толщина слоя воздуха от 0 м до 500 м для стандартной атмосферы средних широт в тепловом диапазоне спектра



Рис. 2. Оптическая толщина слоя воздуха от 40 км до 42,5 км

высотах может достигать миллиона раз. По данному параметру методы, использующие различные процедуры сглаживания резонансных особенностей поглощения, находятся в существенно более «комфортных» условиях. Разностные схемы, хорошо зарекомендовавшие себя в расчетах со «сглаженными» коэффициентами, могут оказаться неприменимыми для проведения детальных («line-by-line») расчетов. Единственный класс схем (из известных авторам), которые пригодны для расчетов с оптически тонкими и оптически толстыми ячейками, это схемы, использующие поведение точного решения дифференциального уравнения внутри пространственного слоя. Также они известны как схемы с «квазианалитической интерполяцией», или «точные» схемы (по терминологии [Тихонов, Самарский, 1961]. В рамках данной методики была построена точная разностная схема.

Исходная дифференциальная задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{cD^{1/2}v} \cdot \frac{\partial W(E,\xi)}{\partial \xi} + U(E,\xi) = U^{Pl}(E,\xi),\\ \frac{W(E,\xi)}{c} = -\frac{v}{D^{1/2}} \cdot \frac{\partial [DU(E,\xi)]}{\partial \xi}, \qquad v = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa + \sigma_0}}, \end{cases}$$
(1)

2012, T. 4, № 3, C. 553–562

$$\xi(E,r) = \int_{0}^{r} \sqrt{\frac{\kappa(E,r) \cdot [\kappa(E,r) + \sigma_0(E,r)]}{D}} dr, \qquad \sigma_0(E,r) = \sigma(E,r)[1 - \langle \mu(E,r) \rangle],$$

где  $\xi$  — диффузная оптическая толщина атмосферы, r — высота, U и W — плотность и поток энергии излучения,  $U^{Pl}$  — планковская плотность энергии излучения, c — скорость света,  $v^2$  отношение коэффициента поглощения  $\kappa$  к коэффициенту экстинкции  $\kappa + \sigma_0$ , величина  $\sigma$  — коэффициент рассеяния,  $\langle \mu \rangle$  — средний косинус угла рассеяния фотонов. Граничные условия для уравнений (1) записываются как:

$$\frac{W(E,\xi_1)}{c} = \frac{1-\chi_1}{1+\chi_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot [U^{Pl}(E,T_S) - d(E,\xi_1)U(E,\xi_1)],$$
(2)

$$\frac{W(E,\xi_F)}{c} = \frac{d(E,\xi_F)}{2}U(E,\xi_F) + 2\mu^{\otimes}\frac{\left|W^{\otimes}(E)\right|}{c}.$$

Здесь  $\chi_1$  есть коэффициент отражения излучения от поверхности,  $U^{Pl}(E, T_S)$  – плотность лучистой энергии, излучаемой поверхностью,  $T_S$  – температура поверхности. Величина  $|W^{\otimes}|$  есть модуль потока энергии мононаправленного пучка излучения от внешнего источника (Солнце, Луна),  $\mu^{\otimes}$ , ( $\mu^{\otimes} < 0$ ) – косинус угла между направлением внешнего излучения и внешней нормалью к границе атмосферы. Величина D есть компонента нормированного тензора давления излучения в направлении нормали:

$$D(E,\xi) = \int_{-1}^{1} \mu^2 I(E,\mu,\xi) d\mu \bigg| \int_{-1}^{1} I(E,\mu,\xi) d\mu.$$

Если положить D = 1/3, то система уравнений (1) переходит в уравнения так называемого диффузионного приближения теории переноса излучения. В методе квазидиффузии точное значение коэффициента  $D(E,\xi)$ , как и значения коэффициентов граничных условий  $d(E,\xi_1)$  и  $d(E,\xi_F)$ , вычисляется интегрированием интенсивности излучения  $I(E,\mu,\xi)$  по угловой переменной [Гольдин, 1964]. Интенсивность излучения находится интегрированием кинетического уравнения переноса излучения в рамках другой дифференциальной задачи:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial r}(E,\mu,\xi) + [\kappa + \sigma]I(E,\mu,\xi) = \frac{c\kappa}{2} \cdot U^{Pl} + \sigma \int_{-1}^{1} w(E,\mu,\mu',\xi)I(E,\mu',\xi)d\mu',$$
(3)

$$\xi = \xi(E, r) = \int_{0}^{r} \sqrt{\frac{\kappa(E, r) \cdot [\kappa(E, r) + \sigma_{0}(E, r)]}{D}} dr, (диффузная оптическая толщина),$$

$$I(E,\mu,\xi_1)|_{\mu>0} = \chi_1 \int_{-1}^{0} w_1(E,\mu,\mu') \cdot I(E,\mu',\xi_1) d\mu' + [1-\chi_1] \frac{cU^{Pl}(E,T_S)}{2},$$

$$I(E,\mu,\xi_F)|_{\mu<0} = |W^{\otimes}(E)| \cdot \delta(\mu-\mu_{\otimes}).$$

Здесь  $w(E, \mu, \mu', \xi)$  — индикатриса объемного рассеяния излучения на атмосферных аэрозолях,  $w_1(E, \mu, \mu')$  — индикатриса отражения излучения от поверхностности Земли.  $\xi_1$  и  $\xi_F$  — соответствуют нулевой и полной диффузной толщине столба газа. Такое обозначение связано с расчетной сеткой, описанной в следующем абзаце.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

558

Для разностной схемы берется сетка по высоте столба воздуха:  $0 = r_1 < r_2 < ... < r_{F-1} < r_F$ .  $r_F$  — полная высота расчетного столба воздуха. Воздух, заключенный между двумя последовательно идущими высотами в описанной сетке, далее будет называться слоем (слоем воздуха). По сетке высот получаем сетку на шкале диффузной оптической толщины:

$$\xi_{i} = \xi(E, r_{i}) = \int_{r_{0}}^{r_{i}} \sqrt{\frac{\kappa \cdot [\kappa + \sigma_{0}]}{D}} dr, \qquad (i = 1, 2, \dots, F).$$
(4)

Здесь и далее зависимость всех коэффициентов и переменных от энергии опускается.

Суть точной разностной схемы состоит в том, что из предположения о постоянстве коэффициентов v и D дифференциальной задачи (1) внутри каждого слоя, на которые разбита атмосфера, находится аналитическое решение задачи в слое. Аналитическое решение зависит от значений решения в узлах, отделяющих смежные слои. Полагается, что пространственная зависимость источника тепловой радиации  $U^{Pl}$  внутри слоя подчиняется некоторому экспоненциальному закону. Затем, пользуясь непрерывностью решения в узлах, строится дискретное уравнение (схема) для нахождения узловых значений плотности и потока в атмосфере. Если значения в узлах известны, то решение внутри каждого слоя вычисляется по аналитическим формулам. Приведем здесь вид точной разностной схемы для расчета узловых значений плотности и потока излучения в задаче (1), (2):

$$\begin{cases} e_{i}U_{i-1} + [e_{i} + g_{i} + e_{i+1} + g_{i+1}]U_{i} - e_{i+1}U_{i+1} = \psi_{i} + \eta_{i}, \\ \frac{W_{i}}{cD_{i}^{1/2}} = e_{i}U_{i-1} - [e_{i} + g_{i}]U_{i} + \psi_{i}, \end{cases}$$
(5)  
$$e_{i} = \frac{v_{i-1}}{\sinh(\xi_{i} - \xi_{i-1})}, \qquad g_{i} = v_{i-1}\tanh\left(\frac{\xi_{i} - \xi_{i-1}}{2}\right) \qquad (i = 2, \dots, F), \\ = \frac{v_{i-1}U_{i}^{Pl}}{1 - q_{i-1}^{2}}\left[\tanh\left(\frac{\xi_{i} - \xi_{i-1}}{2}\right) + \frac{1 - e^{-q_{i-1}[\xi_{i} - \xi_{i-1}]}}{\sinh(\xi_{i} - \xi_{i-1})} - q_{i-1}\right] \quad (i = 2, \dots, F), \\ \eta_{i} = \frac{v_{i}U_{i}^{Pl}}{1 - q_{i}^{2}}\left[\tanh\left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_{i}}{2}\right) + q_{i} - \frac{e^{[\xi_{i+1} - \xi_{i}]q_{i}} - 1}{\sinh(\xi_{i+1} - \xi_{i})}\right] \qquad (i = 1, \dots, F - 1), \\ q_{i} = \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_{i}}\ln\frac{U^{Pl}(T_{i+1})}{U^{Pl}(T_{i})}. \end{cases}$$

Чтобы разностная схема, записываемая системой (5), учитывала граничные условия, коэффициенты схемы  $e_i, g_i, \psi_i, \eta_i$  необходимо доопределить во всех  $\{i \in \mathbb{N} | i \leq F\}$ , а также определить  $e_{F+1}$ ,  $g_{F+1}$ , что позволяет более просто организовать потоковую прогонку, описанную в следующем разделе.

Для нижней границы атмосферы:

 $\psi_i$ 

$$e_1 = 0,$$
  $g_1 = \frac{1 - \chi_1}{1 + \chi_1} \cdot \frac{d_1}{2D_1^{1/2}},$   $\psi_1 = \frac{1 - \chi_1}{1 + \chi_1} \cdot \frac{U^{Pl}(T_S)}{2D_1^{1/2}};$   
для верхней границы:  
 $d_F$   $2u^{\otimes} |W^{\otimes}|$ 

$$e_{F+1} = 0, \quad g_{F+1} = \frac{d_F}{2D_F^{1/2}}, \qquad \qquad \eta_F = -\frac{2\mu^3}{D_F^{1/2}}\frac{|w|}{c}$$

\_ 2012, T. 4, № 3, C. 553–562 \_\_\_\_\_

Таким образом, граничные условия (2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} [g_1 + e_2 + g_2]U_1 - e_2U_2 = \psi_1 + \eta_1, \\ \frac{W_1}{cD_1^{1/2}} = -g_1U_1 + \psi_1, \\ -e_FU_{F-1} + [e_F + g_F + g_{F+1}]U_F = \psi_F + \eta_F, \\ \frac{W_F}{cD_F^{1/2}} = g_{F+1}U_F - \eta_F. \end{cases}$$
(6)

#### Потоковая прогонка

Задача (5), (6) представляет собой краевую задачу для дискретного уравнения второго порядка. Стандартным методом его решения является метод прогонки (вариант метода исключения Гаусса). Однако, как известно, наличие внутри расчетной области оптически тонких слоев приводит к тому, что обычная прогонка теряет точность. Это связано с конечной разрядностью хранения чисел в компьютерной арифметике. Особенность исключают применением специального варианта прогонки – «потоковой» прогонки. Существует несколько вариантов «потоковой» прогонки. Мы используем следующий. Ищем решение дискретной задачи в виде

$$\begin{cases} U_{i+1} = \alpha_{i+1}U_i + \beta_{i+1}, \\ \frac{W_{i+1}}{cD_{i+1}^{1/2}} = \gamma_{i+1}U_i - \delta_{i+1}, \end{cases}$$
(7)

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\delta_i$  — четыре неизвестных коэффициента. Подставив (7) в (5) и аналитически исключив неопределенность вида « $\infty - \infty$ » (возникает в оптически тонких ячейках), можно получить



Рис. 3. Спектральная плотность энергии излучения Земли и Стандартной атмосферы США средних широт у поверхности Земли с разрешением не ниже доплеровской ширины линии (всего 8.5 млн точек). Плотность энергии заключена между распределением Планка с температурой T = 288.2 °K (в центрах линий поглощения излучение задается тепловым излучением Земли и излучением атмосферы) и ее половиной (в окнах прозрачности атмосферы излучение задается только тепловым излучением Земли)



Рис. 4. Спектральная плотность энергии излучения Земли и Стандартной атмосферы США средних широт на высоте 32.5 км с разрешением не ниже доплеровской ширины линии (всего 8.5 млн точек). В правом верхнем углу приведен участок спектра с большим разрешением



Рис. 5. Интегральный поток тепловой радиации Земли и Стандартной атмосферы США средних широт как функция высоты

следующие рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов:

$$\alpha_{i} = \frac{e_{i}}{e_{i} + g_{i} + g_{i+1} + e_{i+1} \frac{g_{i+1} + \gamma_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}}}, \quad \beta_{i} = \frac{\psi_{i} + \eta_{i} + e_{i+1} \frac{\psi_{i+1} + \phi_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}}}{e_{i} + g_{i} + g_{i+1} + e_{i+1} \frac{g_{i+1} + \gamma_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}}},$$
$$\gamma_{i} = \alpha_{i} \left[ g_{i+1} + e_{i+1} \frac{g_{i+1} + \gamma_{i+1}}{e_{i+1} + g_{i+1}} \right], \qquad \delta_{i} = [e_{i} + g_{i}]\beta_{i} - \psi_{i}.$$

Начальные значения для вычисления коэффициентов прогонки определяются условиями на правой границе области:  $\gamma_{F+1} = \delta_{F+1} = 0$ . Начальные значения для нахождения решения определяются граничными условиями на левой границе области:  $U_1 = \beta_1$ ,  $W_1 = \delta_1$ . Этот вариант потоковой прогонки совместно с точной разностной схемой (5), (6) позволил получить решение задачи (1), (2) в атмосфере с оптически тонкими и оптически толстыми слоями. Толщины слоев могут сильно меняться в зависимости от энергий фотонов.

Численное решение задачи (3) выполняется с помощью обычного интегрирования уравнения переноса вдоль характеристик.

Код, реализующий описанный выше метод решения уравнения переноса излучения, можно использовать как для «line-by-line» расчетов спектров радиации, так для расчетов с применением различных процедур осреднения спектра энергий фотонов, — использовать как для расчетов теплового излучения Земли, так и для расчетов переноса солнечного излучения и излучений искусственных источников.

## Результаты расчетов переноса теплового излучения Земли

На рисунках представлен спектр плотности энергии теплового излучения Земли и Стандартной атмосферы США средних широт у поверхности Земли (рисунок 3) и на высоте 32.5 км (рисунок 4). Расчет спектра излучения проводился в 8.5 млн точек. На рисунке 5 представлен интегральный поток энергии излучения (сумма по 8.5 млн точек) для той же атмосферы, как функция высоты. Поверхность Земли имеет температуру  $T_s = 288.2$  °K, не отражает атмосферную радиацию и излучает как абсолютно черное тело,  $\chi_1 = 0$ .

## Список литературы

- Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078–1087.
- Гуди Р. М. Атмосферная радиация. Основы теории. М.: Мир, 1966.
- *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах // Вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 1. С. 6–63.
- Шильков А. В., Цветкова И. Л., Шилькова С. В. Система кодов и банк данных ATRAD для прецизионных расчетов атмосферной радиации // Математ. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 7. — С. 91–102.
- Шильков А.В., Цветкова И.Л., Шилькова С.В. Система ATRAD для расчетов атмосферной радиации: Лебеговское осреднение спектров и сечений поглощения // Ж. Математ. Моделирование. — 1997. — Т. 9, № 6. — С. 3–24.
- Anderson G. P., Clough S. A., et al. AFGL Atmospheric Constituent Profiles (0–120km) AFGL-TR-860110, US Air Force Geophysics Laboratory, Hanscom, Massachusetts, Environmental Research Papers, No. 954, 1986, 46 p.
- *Ellingson R. G., Ellis J., Fels S.* The Intercomparison of Radiation Codes Used in Climate Models: Long Wave Results // J. Geophysical Research. – 1991. – Vol. 96, № D5. – P. 8929–8953.
- *Rothman L. S. et al.* The HITRAN 2008 molecular spectroscoric database // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2009. Vol. 110. P. 533–572.

562