**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 3 С. 531−542**

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 512.542; 519.673

Нормализаторы и централизаторы подгрупп в неабелевых группах малого порядка

И. А. Шилин[1,2,a], А. А. Александров[2]

[1] Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

[2] Московский государственный гуманитарный университет им. М. А. Шолохова,
Россия, 109240, г. Москва, ул. Верхняя Радищевская, д. 16–18

E-mail: [a] ilyashilin@li.ru

*Получено 30 апреля 2012 г.,
после доработки 2 августа 2012 г.*

С помощью составленной авторами компьютерной программы найден явный вид нормализаторов и централизаторов нетривиальных подгрупп в неабелевых группах порядка не выше 20. Результаты представлены либо в терминах конкретной реализации групп, либо в терминах ее порождающих элементов. Обсуждается применение программы к проверке условия Т-нормальности.

Ключевые слова: нормализатор, централизатор, конечная группа, неабелева группа, Т-нормальная группа

Normalizers and centralizers of subgroups in non-Abelian groups of small order

I. A. Shilin[1,2], **A. A. Aleksandrov**[2]

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russia
[2] Sholokhov Moscow State University for the Humanities, 16–18 Verhnya Radishevskaya, Moscow, 109240, Russia

Abstract. – By applying the computer program, which is created by authors, we obtain the exact representation of normalizers and centralizers of all nontrivial subgroups in non-Abelian groups G under the condition $|G| \leqslant 20$. All results are represented either in terms of concrete realization of the corresponding group or in terms of it's generators. We consider the application of our program to the verification of T-normal condition.

Keywords: normilizer, centralizer, finite group, non-Abelian group, T-normal group

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 531–542 (Russian).

Работа поддержана грантами ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», № 586Р30 и 2012-1.3.2-12-000-1005-001.

Введение

Раздел математики, в котором изучаются конечные или конечно порожденные группы, представляет собой одну из областей, в которых с успехом применяются методы компьютерного моделирования. Первый обзор, в котором рассматривается применение компьютеров в теории групп, был сделан Дж. Кэнноном [Cannon, 1969]. Кэнноном были созданы первые компьютерные системы для решения задач теории групп: GRAPPA (1969 г.) и GROUP (1971 г.) [Cannon, 1974]. Позже появились системы CAYLEY [Holt, 1988], GAP и MAGMA. Во всех этих системах при работе с произвольной конечной группой G используется то обстоятельство, что G вложима в группу $\operatorname{Symm} G$ преобразований группы G (то есть группу подстановок $\mathbf{S}_{|G|}$), известное как теорема Кэли. Это обстоятельство позволяет унифицировать алгоритмы решения задач для различных групп, но приводит и к некоторым проблемам [Praeger, 2001]. В частности, трудности, возникающие при вычислении нормализаторов подгрупп в системе GAP, и пути преодоления этих трудностей обсуждаются в статье [Miyamoto, 2010], а применение системы CAYLEY к вычислению централизаторов рассматривается в работе [Belcastro, Sherman, 1994]. В настоящей статье мы подходим к задаче о нормализаторах и централизаторах иным способом: применяем единый алгоритм к различным массивам размера $n \times n$, описывающим групповую структуру на множестве из n элементов. Настоящая статья является, таким образом, продолжением и дополнением наших работ [Шилин, Китюков, 2011], [Александров, Нижников, Шилин, 2011], [Шилин, Китюков, 2011] и [Шилин, Китюков, Александров, 2012]. Отметим, что при работе с указанными выше вычислительными системами входные и выходные данные оформляются в терминах подстановок: наш подход, напротив, позволяет получить описание результатов в явном виде.

Постановка задачи

Всякий нормальный делитель H группы G является неподвижной точкой любого внутреннего автоморфизма $\varphi_g : a \longmapsto g^{-1}ag$, рассматриваемого как отображение $2^G \longrightarrow 2^G$. В общем же случае для группы получаем подгруппу $\operatorname{Nm} H := \{g \mid \varphi_g(H) = H\}$, которую называют нормализатором подгруппы H. Каждой паре (a, b) элементов группы G поставим в соответствие такой элемент c, что $ab = cba$. Он обозначается $[a, b]$ и вычисляется по формуле $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Подгруппу $\operatorname{Cnt} H := \{a \mid [a, b] = e, \forall\, b \in H\}$ называют централизатором подгруппы H. Так как случай, когда группа коммутативна, тривиален (в этом случае $\operatorname{Nm} H = G$ и $\operatorname{Cnt} H = G$ для всех подгрупп H), мы ставим своей целью явное вычисление нормализаторов и централизаторов всех нетривиальных подгрупп в неабелевых группах. Рассмотрим эту задачу для групп порядка не выше 20.

Описание программного кода

Каждую конечную группу можно описать с помощью таблицы Кэли, определяющей групповую операцию. Присвоив каждому элементу группы, состоящей из n элементов, порядковый номер от 1 до n, таблицу Кэли можно выразить в виде массива. Например, диэдральная группа

$$\mathbf{D}_{10} = \langle s, t \mid s^2 = t^5 = e, ts = st^4 \rangle$$

определяется таблицей 1.

Таблица 1

	e	t	t^2	t^3	t^4	s	st	st^2	st^3	st^4
e	e	t	t^2	t^3	t^4	s	st	st^2	st^3	st^4
t	t	t^2	t^3	t^4	e	st^4	s	st	st^2	st^3
t^2	t^2	t^3	t^4	e	t	st^3	st^4	s	st	st^2
t^3	t^3	t^4	e	t	t^2	st^2	st^3	st^4	s	st
t^4	t^4	e	t	t^2	t^3	st	st^2	st^3	st^4	s
s	s	st	st^2	st^3	st^4	e	t	t^2	t^3	t^4
st	st	st^2	st^3	st^4	s	t^4	e	t	t^2	t^3
st^2	st^2	st^3	st^4	s^s	t	t^3	t^4	e	t	t^2
st^3	st^3	st^4	s	st	st^2	t^2	t^3	t^4	e	t
st^4	st^4	s	st	st^2	st^3	s	t	t^2	t^3	t^4

И, следовательно, может быть реализована, например на языке Турбо Паскаль, двумерным массивом

$$\texttt{gg} : \texttt{array}[1..10, 1..10]\ \texttt{of integer} = ((1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),\\ (2,3,4,5,1,8,9,10,6,7), (3,4,5,1,2,10,6,7,8,9), (4,5,1,2,3,7,8,9,10,6),\\ (5,1,2,3,4,9,10,6,7,8), (6,9,7,10,8,1,3,5,2,4), (7,10,8,6,9,4,1,3,5,2),\\ (8,6,9,7,10,2,4,1,3,5), (9,7,10,8,6,5,2,4,1,3), (10,8,6,9,7,3,5,2,4,1)).$$

Все подмножества группы G порядка n можно как характеристические функции $G \longrightarrow \{0,1\}$ перечислять в программе с помощью циклов, сопоставляя каждой характеристической функции одномерный массив `ss : array[1..n] of integer`, в котором `ss[i]` равно значению функции χ от соответствующего элемента группы G. Подмножество группы является подгруппой в том и только том случае, если для любых его элементов a и b элемент ab^{-1} тоже входит в это подмножество. Поэтому если в результате проверки

```
psg := 1;
for s := 1 to n do
for t := 1 to n do
if ss[s] = 1 then if ss[t] = 1 then if ss[gg[s, inv[t]]] = 0 then
psg := 0
```

счетчик `psg` станет равным нулю, то подмножество `ss` не является подгруппой. Условие `if ss[s] = 1 then if ss[t] = 1` означает здесь, что проверяется только пара (s,t) элементов группы G, принадлежащих подмножеству `ss`.

Для того чтобы подгруппа была нормальным делителем, необходимо и достаточно, чтобы она включала в себя свой образ при любом внутреннем автоморфизме. Таким образом, если по окончании проверки

```
if psg = 1 then
begin
pnsg := 1;
for s := 2 to n do
for t := 2 to n do
if ss[t] = 1 then if ss[gg[gg[inv[s], t], s]] = 0 then pnsg := 0
end
```

счетчик `pnsg` станет равным нулю, то подгруппа `ss` не является нормальным делителем. Пусть нейтральному элементу группы всегда присваивается порядковый номер 1.

Чтобы сократить вычисления, будем рассматривать только такие массивы $\mathtt{ss}$, в которых $\mathtt{ss}[\mathtt{1}] := \mathtt{1}$, поскольку нейтральный элемент принадлежит любой подгруппе. Другим необходимым условием, сокращающим вычисления, является теорема Лагранжа о том, что порядок всякой подгруппы делит порядок самой группы; оно проверяется следующим образом:

```
lagr := 1; for i := 2 to n do
lagr := lagr + ss[i];
la := n mod lagr;
if la = 0 then ....
```

Принадлежность элемента s группы G нормализатору подгруппы $\mathtt{ss}$, который в коде программы моделируется одномерным массивом $\mathtt{hor} : \mathtt{array}\ [1..\mathtt{n}]\ \mathtt{of\ integer}$, проверяется следующим образом:

```
for s := 2 to n do begin hor[s] := 1;
for t := 2 to n do
if ss[t] = 1 then if ss[gg[gg[inv[s], t], s]] = 0 then
begin
pnsg := 0; hor[s] := 0
end,
```

то есть поначалу все элементы группы записываются во множество $\mathtt{hor}$, но впоследствии его элемент s исключается из $\mathtt{hor}$, если найдется такой элемент t подгруппы $\mathtt{ss}$, что $\varphi_s(t)$ не принадлежит подгруппе $\mathtt{ss}$.

Централизатор подгруппы строится схожим образом:

```
for j := 1 to n do ztr[j] := 1;
if ss[t] = 1 then if gg[s, t] <> gg[t, s] then ztr[s] := 0.
```

Отметим, что сложность вычислений той части нашего алгоритма, в которой происходит перебор подмножеств группы и отбор тех из них, порядок которых является делителем числа $|G|$, есть $O\left(\frac{2^n}{n}\right)$. Для отобранных множеств происходит проверка выполнимости определения подгруппы (сложность $O(n^2)$), после чего для подмножества, оказавшегося подгруппой, вычисляются нормализатор и централизатор (снова $O(n^2)$). Таким образом, сложность вычислений всего алгоритма есть $O(2^n \cdot n^3)$. Для групп порядка не больше 20 наша программа работает не более 1 секунды.

Полученные результаты

Результаты, полученные с помощью наших программ, представимы либо в терминах конкретной реализации групп, либо в терминах ее порождающих элементов. В частности, будем использовать две реализации циклической группы порядка n: в виде аддитивной группы $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ вычетов по модулю n и в виде мультипликативной группы $\mathbf{U}_n$ комплексных решений уравнения $z^n = 1$. Диэдральную группу

$$\mathbf{D}_{2k} = \langle s, t \mid s^k = t^2 = e,\, ts = s^{k-1}t \rangle$$

реализуем как группу преобразований плоскости, переводящих правильный k-угольник $A_1A_2 \ldots A_k$ в себя, обозначив r_α поворот плоскости относительно центра многоугольника на угол α. Если k нечетно, обозначим s_n, $1 \leqslant n \leqslant k$, симметрию плоскости относительно прямой, проходящей через вершину A_n и середину противоположной стороны. В случае четного k при $1 \leqslant n \leqslant \frac{k}{2}$ обозначим s_n симметрию плоскости относительно прямой $A_nA_{n+\frac{k}{2}}$ и s_n^* симметрию относительно прямой, проходящей через середины сторон $A_n A_{n+1}$ и $A_{n+\frac{k}{2}} A_{n+\frac{k}{2}+1}$. Подгруппу поворотов в $\mathbf{D}_{2k}$ обозначим $\mathbf{R}_{2k}$. Везде ниже под словом «подгруппа» будет подразумеваться *нетривиальная* подгруппа.

Наименьшей неабелевой группой является $\mathbf{D}_6$. Результаты для этой группы, а также аналогичных ей групп $\mathbf{D}_{10}$ и $\mathbf{D}_{14}$ указаны в таблице 2.

Таблица 2

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\mathbf{R}_6$	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{R}_6$
$\{\mathrm{id}, s_i\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, s_i\}$	$\{\mathrm{id}, s_i\}$
$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{D}_6$	$\{\mathrm{id}\}$

Результаты для группы $\mathbf{D}_8$ отражены в таблице 3.

Таблица 3

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{\mathrm{id}, s_i\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1, s_2\}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1, s_2\}$
$\{\mathrm{id}, s_i^*\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1^*, s_2^*\}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1^*, s_2^*\}$
$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$	$\mathbf{D}_8$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1, s_2\}$	$\mathbf{D}_8$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1, s_2\}$
$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1^*, s_2^*\}$	$\mathbf{D}_8$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_1^*, s_2^*\}$
$\mathbf{D}_8$	$\mathbf{D}_8$	$\mathbf{R}_8$
$\mathbf{D}_8$	$\mathbf{D}_8$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$

Группа Q_8 реализуется как мультипликативная группа кватернионов $\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$. Результаты для этой группы содержит таблица 4.

Таблица 4

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{1, -1\}$	$\{1, -1\}$	Q_8
$\{\mathrm{id}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$	Q_8	$\{\mathrm{id}, \mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$
$\{\mathrm{id}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}\}$	Q_8	$\{\mathrm{id}, \mathbf{j}, -\mathbf{j}\}$
$\{\mathrm{id}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$	Q_8	$\{\mathrm{id}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$
Q_8	Q_8	$\{1, -1\}$

Результаты для группы $\mathbf{D}_{12}$ приведены в таблице 5.

Таблица 5

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{D}_{12}$
$\{\mathrm{id}, s_i\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j^*\}$, $(i-j) \equiv 2 \mod 3$	$\mathrm{Nm}\, H$
$\{\mathrm{id}, s_i^*\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i^*, s_j\}$, $(j-i) \equiv 2 \mod 3$	$\mathrm{Nm}\, H$
$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j^*\}$, $(i-j) \equiv 2 \mod 3$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j^*\}$, $(i-j) \equiv 2 \mod 3$	$\mathrm{Nm}\, H$
$\{\mathrm{id}, r_{120}, r_{240}\}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{R}_{12}$
$\{\mathrm{id}, r_{120}, r_{240}, s_1, s_2, s_3\}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\{\mathrm{id}, r_{120}, r_{240}, s_1^*, s_2^*, s_3^*\}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\mathbf{R}_{12}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{R}_{12}$
$\mathbf{D}_{12}$	$\mathbf{D}_{12}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$

Знакопеременная группа $\mathbf{A}_4$ реализуется как группа четных подстановок множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Обозначим $\mathbf{K}$ ее подгруппу Клейна. Результаты для $\mathbf{A}_4$ сведены в таблицу 6.

Таблица 6

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{\mathrm{id}, (i_1\, i_2)(i_3\, i_4)\}$, $s \neq t \Longrightarrow i_s \neq i_t$	$\mathbf{K}$	$\mathbf{K}$
$\{\mathrm{id}, (i_1\, i_2\, i_3), (i_1\, i_3\, i_2)\}$	$\{\mathrm{id}, (i_1\, i_2\, i_3), (i_1\, i_3\, i_2)\}$	$\{\mathrm{id}, (i_1\, i_2\, i_3), (i_1\, i_3\, i_2)\}$
$\mathbf{K}$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{K}$
$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_4$	$\{\mathrm{id}\}$

Нормализаторы и централизаторы нетривиальных подгрупп группы

$$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4 = \langle s, t \mid s^4 = t^4 = e, tst = s\rangle$$

указаны в таблице 7.

Таблица 7

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{e, t, t^2\}$	$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\{e, s^2, t, t^2, s^2t, s^2t^2\}$
$\{e, s^2\}$	$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4$
$\{e, s^2, st^2, s^2t^2\}$	$\{e, s^2, st^2, s^2t^2\}$	$\{e, s^2, st^2, s^2t^2\}$
$\{e, s^2, st, s^3t\}$	$\{e, s^2, st, s^3t\}$	$\{e, s^2, st, s^3t\}$
$\{e, s^2, t, t^2, s^2t, s^2t^2\}$	$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\{e, s^2, t, t^2, s^2t, s^2t^2\}$
$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$
$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3 \rightthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\{e, s^2\}$

Для группы $\mathbf{D}_{16}$ результаты содержатся в таблице 8.

Таблица 8

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{\mathrm{id}, s_i\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j\}$, $(j - i) \equiv 2 \mod 4$	$\mathrm{Nm}\, H$
$\{\mathrm{id}, s_i^*\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i^*, s_j^*\}$, $(j - i) \equiv 2 \mod 4$	$\mathrm{Nm}\, H$
$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$	$\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{D}_{16}$
$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j\}$, $(j - i) \equiv 2 \mod 4$	$\{\mathrm{id}, r_{90}, r_{180}, r_{270}, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	H
$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i^*, s_j^*\}$, $(j - i) \equiv 2 \mod 4$	$\{\mathrm{id}, r_{90}, r_{180}, r_{270}, s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*\}$	H
$\{\mathrm{id}, r_{90}, r_{270}\}$	$\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{R}_{16}$
$\{\mathrm{id}, r_{90}, r_{270}, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$\mathbf{D}_{16}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\{\mathrm{id}, r_{90}, r_{270}, s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*\}$	$\mathbf{D}_{16}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\mathbf{R}_{16}$	$\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{R}_{16}$
$\mathbf{D}_{16}$	$\mathbf{D}_{16}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$

Введем следующие обозначения для двух нормальных делителей группы Q_{16}:

$$H^\circ := \{e, s^2, s^4, s^6, st, s^3t, s^5t, s^7t\},$$
$$H^\bullet := \{e, s^2, s^4, s^6, t, s^2t, s^4t, s^6t\}.$$

Тогда результаты для Q_{16} можно отразить таблицей 9.

Таблица 9

H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$	H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$
$\{e, s^6t\}$	$\{e, s^4, s^2t, s^6t\}$	$\{e, s^4, s^2t, s^6t\}$	$\{e, s^4, st, s^5t\}$	H°	$\{e, s^4, st, s^5t\}$
$\{e, s^4t\}$	$\{e, s^4, t, s^4t\}$	$\{e, s^4, t, s^4t\}$	$\{e, s^4, t, s^4t\}$	$H^\bullet$	$\{e, s^4, t, s^4t\}$
$\{e, st\}$	$\{e, s^4, s^2t, s^6t\}$	$\{e, s^4, s^2t, s^6t\}$	$\langle s^2\rangle$	Q_{16}	$\langle s\rangle$
$\{e, t\}$	$\{e, s^4, t, s^4t\}$	$\{e, s^4, t, s^4t\}$	H°	Q_{16}	$\{s, s^4\}$
$\{e, s^4\}$	Q_{16}	Q_{16}	$H^\bullet$	Q_{16}	$\{e, s^4\}$
$\{e, s^4, s^3t, s^7t\}$	H°	$\{e, s^4, s^3t, s^7t\}$	$\langle s\rangle$	Q_{16}	Q_{16}
$\{e, s^4, s^2t, s^6t\}$	$H^\bullet$	$\{e, s^4, s^2t, s^6t\}$	Q_{16}	Q_{16}	$\{e, s^4\}$

Выделим в группе

$$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2 = \langle p, q, r \mid p^4 = q^2 = r^2 = e,\ qpq = q^3,\ rp = pr,\ qr = rq\rangle$$

следующие подгруппы:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 &:= \{e, p^2, p^2q, p^3q, r, p^2r, p^2qr, p^3qr\},\\ \tilde{H}_2 &:= \{e, p^2, q, pq, r, p^2r, qr, pqr\}.\end{aligned}$$

Тогда результаты для группы $\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$ можно представить таблицей 10.

Таблица 10

H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$	H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$
$\{e, p^3qr\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\{e, q, r, qr\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$
$\{e, p^2qr\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\{e, p^2\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$
$\{e, pqr\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\{e, p^2, p^2qr, p^3qr\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_1$
$\{e, qr\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\{e, p^2, qr, pqr\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_2$
$\{e, p^2r\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, pr, p^3r\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle p, r\rangle$
$\{e, p^2q\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, r, p^2r\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$
$\{e, p^3q\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\{e, p^2, p^2q, p^3q\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_1$
$\{e, p^3q, p^2r, p^2qr\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\{e, p^2, p^2q, p^3q,$ $pr, p^3r, qr, pqr\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, r, p^2r\}$
$\{e, p^3q, r, p^3qr\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_1$
$\{e, p^2q\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\{e, p^2, q, pq\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_2$
$\{e, p^2q, p^2q, p^3qr\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\{e, p^2, q, pq, pr,$ $p^3r, p^2qr, p^3qr\}$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, r, p^2r\}$
$\{e, p^2q, r, p^2qr\}$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_1$	$\tilde{H}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_2$
$\{e, pq\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\tilde{H}_2$
$\{e, pq, p^2r, qr\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\langle p\rangle$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle p, r\rangle$
$\{e, pq, r, pqr\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\langle p, qr\rangle$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, r, p^2r\}$
$\{e, q\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\langle p, q\rangle$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, r, p^2r\}$
$\{e, q, p^2r, pqr\}$	$\tilde{H}_2$	$\tilde{H}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbf{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{e, p^2, r, p^2r\}$

В группе $Q_8 \times \mathbb{Z}_2$ все подгруппы являются нормальными делителями, поэтому в таблице 11 ограничимся указанием централизаторов.

Результаты для группы

$$M_{16} = \langle s, t \mid s^8 = t^2 = e,\ ts^5 = st\rangle$$

содержит таблица 12.

Таблица 11

H	$\mathrm{Cnt}\, H$	H	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{(\pm 1, \pm 1)\}$	$Q_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle(-\mathbf{i}, 1)\rangle$	$\langle(-1, -1), (\mathbf{i}, -1)\rangle$
$\{(\pm 1, 1)\}$	$Q_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle(-\mathbf{i}, 1), (\mathbf{j}, -1)\rangle$	$\{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$
$\{(\pm 1, 1), (\pm \mathbf{k}, -1)\}$	$\langle(-1, -1), (\mathbf{k}, -1)\rangle$	$\langle(\mathbf{i}, 1), (\mathbf{j}, 1)\rangle$	$\{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$
$\{(\pm 1, 1), (\pm \mathbf{k}, 1)\}$	$\langle(-1, -1), (\mathbf{k}, -1)\rangle$	$\{(1, \pm 1)\}$	$Q_8 \times \mathbb{Z}_2$
$\{(\pm 1, 1), (\pm \mathbf{j}, -1)\}$	$\langle(-1, -1), (\mathbf{j}, -1)\rangle$	$\{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$	$Q_8 \times \mathbb{Z}_2$
$\{(\pm 1, 1), (\pm \mathbf{j}, 1)\}$	$\langle(-1, -1), (\mathbf{j}, -1)\rangle$	$\{(1, \pm 1), (\pm \mathbf{k}, -1)\}$	H
$\{(\pm 1, 1), (\pm \mathbf{i}, -1)\}$	$\langle(-1, -1), (\mathbf{i}, -1)\rangle$	$\{(1, \pm 1), (\pm \mathbf{j}, -1)\}$	H
$\langle(\mathbf{i}, -1), (\mathbf{j}, -1)\rangle$	$\{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$	$\{(1, \pm 1), (\pm \mathbf{i}, -1)\}$	H
$\langle(\mathbf{i}, -1), (-\mathbf{j}, 1)\rangle$	$\{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$	$Q_8 \times \mathbb{Z}_2$	$\{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$

Таблица 12

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$	H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
1 $\{e, s^4 t\}$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2\rangle$	M_{16}	M_{16}
2 $\{e, t\}$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2, t\rangle$	$\{e, s^2, s^4, s^6, st, s^3 t, s^5 t, s^7 t\}$	M_{16}	H
3 $\{e, s^4\}$	M_{16}	M_{16}	$\langle s^2, t\rangle$	M_{16}	$\langle s^2, t\rangle$
4 $\{e, s^4, s^2 t, s^6 t\}$	M_{16}	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s\rangle$	M_{16}	$\langle s\rangle$
5 $\{e, s^4, t, s^4 t\}$	M_{16}	$\langle s^2, t\rangle$	M_{16}	M_{16}	$\langle s^2\rangle$

Обозначим $\bar{H}$ подгруппу группы

$$G_{4,4} = \langle s, t \mid s^4 = t^4 = (st)^2 = e,\ ts^3 = st^3\rangle,$$

состоящую из элементов $e, s^2, st, s^3 t, t^2, s^2 t^2, st^3, s^3 t^3$. Тогда для группы $G_{4,4}$ получается таблица 13.

Таблица 13

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$	H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{e, s^3 t^3\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$\langle t\rangle$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2, t\rangle$
$\{e, st^3\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$\langle s^2\rangle$	$G_{4,4}$	$G_{4,4}$
$\{e, s^2 t^2\}$	$G_{4,4}$	$G_{4,4}$	$\{e, s^2, st^3, s^3 t^3\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$
$\{e, t^2\}$	$G_{4,4}$	$G_{4,4}$	$\{e, s^2, st^2, s^3 t^2\}$	$\langle s, t^2\rangle$	$\langle s, t^2\rangle$
$\{e, s^3 t\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$\langle s^2, t^2\rangle$	$G_{4,4}$	$G_{4,4}$
$\{e, s^3 t, s^2 t^2, st^3\}$	$G_{4,4}$	$\bar{H}$	$\{e, s^2, t, s^3 t\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$
$\{e, s^3 t, t^2, s^3 t^3\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$G_{4,4}$	$G_{4,4}$
$\{e, s^2 t, t^2, s^2 t^3\}$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2, t\rangle$	$G_{4,4}$	$\langle s^2, t\rangle$
$\{e, st\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$\langle s\rangle$	$\langle s, t^2\rangle$	$\langle s, t^2\rangle$
$\{e, st, s^2 t^2, s^3 t^3\}$	$G_{4,4}$	$\bar{H}$	$\langle s, t^2\rangle$	$G_{4,4}$	$\langle s, t^2\rangle$
$\{e, st, t^2, st^3\}$	$\bar{H}$	$\bar{H}$	$G_{4,4}$	$G_{4,4}$	$\langle s^2, t^2\rangle$

У всех подгрупп группы $\mathbb{Z}_4 \times \mathbf{K}$ нормализаторы и централизаторы совпадают с $\mathbb{Z}_4 \times \mathbf{K}$.

Чтобы записать результаты для группы $\mathbf{D}_{18}$, обозначим $\hat{H}_i$ подгруппу, состоящую из степеней поворота r_{120} и симметрий s_j, у которых $i \equiv j \mod 3$. Получившиеся результаты содержатся в таблице 14.

Таблица 14

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{\mathrm{id}, s_i\}$, $\forall i$	H	H
$\langle r_{120}\rangle$	$\mathbf{D}_{18}$	$\mathbf{R}_{18}$
$\hat{H}_i$	$\hat{H}_i$	$\{\mathrm{id}\}$
$\mathbf{R}_{18}$	$\mathbf{D}_{18}$	$\mathbf{R}_{18}$
$\mathbf{D}_{18}$	$\mathbf{D}_{18}$	$\{\mathrm{id}\}$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\omega := -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}\mathbf{i}}{2},\\
&\tau := (1\,2\,3),\\
&H_1 := \{(\tau^p, \omega^q) \mid p, q \in \{1,2,3\}\},\\
&H_2 := \{((1\,3)^p, \omega^q) \mid p \in \{1,2\}, q \in \{1,2,3\}\},\\
&H_3 := \{((1\,2)^p, \omega^q) \mid p \in \{1,2\}, q \in \{1,2,3\}\},\\
&H_4 := \{((2\,3)^p, \omega^q) \mid p \in \{1,2\}, q \in \{1,2,3\}\}.
\end{aligned}$$

Тогда результаты для группы $\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$ можно представить таблицей 15.

Таблица 15

H	$\mathrm{Nm}\, H$	$\mathrm{Cnt}\, H$
$\{(\mathrm{id},1), ((1\,3\,2),\omega), ((1\,2\,3),\omega^2)\}$	H_1	H_1
$\{(\mathrm{id},1), ((1\,2\,3),\omega), ((1\,3\,2),\omega^2)\}$	H_1	H_1
$\{(\mathrm{id},1), (\mathrm{id},\omega), (\mathrm{id},\omega^2)\}$	$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$
$\{(\mathrm{id},1), ((1\,3),1)\}$	H_2	H_2
H_2	H_2	H_2
$\{(\mathrm{id},1), ((1\,2\,3),1), ((1\,3\,2),1)\}$	$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	H_1
H_1	$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	H_1
$\{(\mathrm{id},1), ((1\,2),1)\}$	H_3	H_3
H_3	H_3	H_3
$\{(\mathrm{id},1), ((2\,3),1)\}$	H_4	H_4
H_4	H_4	H_4
$\{(\sigma,1) \mid \sigma \in \mathbf{S}_3\}$	$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\{(\mathrm{id},1), (\mathrm{id},\omega), (\mathrm{id},\omega^2)\}$
$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbf{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\{(\mathrm{id},1), (\mathrm{id},\omega), (\mathrm{id},\omega^2)\}$

Результаты для группы

$$\mathrm{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^3 = e,\ yz = zy,\ yxy = x,\ zxz = x\rangle$$

собраны в таблице 16.

Таблица 16

H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$
$\{e, xy^2z^2\}$	H	H
$\{e, xyz^2\}$	H	H
$\{e, xy^2z^2\}$	H	H
$\{e, xy^2z\}$	H	H
$\{e, xyz\}$	H	H
$\{e, y^2z, yz^2\}$	$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\{e, y, y^2, z, z^2, yz, y^2z, yz^2, y^2z^2\}$
$\{e, yz, y^2z^2\}$	$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\{e, y, y^2, z, z^2, yz, y^2z, yz^2, y^2z^2\}$
$\{e, xz^2\}$	H	H
$\{e, xz\}$	H	H
$\{e, xy^2\}$	H	H
$\{e, xy^2, xz^2, y^2z, yz^2, xyz\}$	H	$\{e\}$
$\{e, xy^2, xz, yz, y^2z^2, xyz\}$	H	$\{e\}$
$\{e, xy\}$	H	H
$\{e, xy, xz^2, yz, y^2z^2, xy^2z\}$	H	$\{e\}$
$\{e, xy, xz, y^2z, yz^2, xy^2z^2\}$	H	$\{e\}$
$\{e, z, z^2\}$	$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\{e, y, y^2, z, z^2, yz, y^2z, yz^2, y^2z^2\}$
$\{e, z, z^2, xy^2, xy^2z, xy^2z^2\}$	H	$\{e\}$
$\{e, z, z^2, xy, xyz, xyz^2\}$	H	$\{e\}$
$\{e, y, y^2\}$	$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\{e, y, y^2, z, z^2, yz, y^2z, yz^2, y^2z^2\}$
$\{e, y, y^2, xz^2, xyz^2, xy^2z^2\}$	H	$\{e\}$
$\{e, z, z^2, xz, xyz, xy^2z\}$	H	$\{e\}$
$\{e, y, y^2, z, z^2yz, y^2z, yz^2, y^2z^2\}$	$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\{e, y, y^2, z, z^2, yz, y^2z, yz^2, y^2z^2\}$
$\{e, x, y^2z, yz^2, xy^2z, xyz^2\}$	H	$\{e\}$
$\{e, x\}$	H	H
$\{e, x, z, z^2, xz, xz^2\}$	H	$\{e\}$
$\{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$	H	$\{e\}$
$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3^2 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$	$\{e\}$

Сведения о подгруппах в

$$\mathrm{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4 = \langle s, t \mid s^4 = t^5 = e,\, tst = s\rangle$$

отражены в таблице 17.

Таблица 17

H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$	H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$
$\{e, s^2, st^2, s^3t^2\}$	$\{e, s^2, st^4, s^3t^4\}$	$\{e, s^2, st^2, s^3t^2\}$	$\langle t\rangle$	$\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\langle s^2, t\rangle$
$\langle s^2, t\rangle$	$\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\langle s^2, t\rangle$	$\langle s^2\rangle$	$\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$
$\{e, s^2, st^4, s^3t^4\}$	$\{e, s^2, st^4, s^3t^4\}$	$\{e, s^2, st^4, s^3t^4\}$	$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$
$\{e, s^2, st^3, s^3t^3\}$	$\{e, s^2, st^3, s^3t^3\}$	$\{e, s^2, st^3, s^3t^3\}$	$\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_5 \leftthreetimes \mathbb{Z}_4$	$\{e, s^2\}$

Результаты для группы $\mathbf{D}_{20}$ сведены в таблицу 18.

Наконец, результаты, относящиеся к группе Фробениуса

$$F = \langle s, t \mid s^4 = t^5 = e,\, ts = st^2\rangle,$$

отражены в таблице 19.

Таблица 18

H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$
$\{\mathrm{id}, s_i^*\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i^*, s_j\}$, $i-j \equiv 2 \mod 5$	$\mathrm{Nm}\,H$
$\{\mathrm{id}, s_i\}$, $\forall i$	$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j^*\}$, $i-j \equiv 3 \mod 5$	$\mathrm{Nm}\,H$
$\{\mathrm{id}, r_{180}, s_i, s_j^*\}$, $i-j \equiv 3 \mod 5$	H	H
$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$	$\mathbf{D}_{20}$	$\mathbf{D}_{20}$
$\langle r_{72}\rangle$	$\mathbf{D}_{20}$	$\mathbf{R}_{20}$
$\{r_{72s}, s_t^*\}$, $1 \leqslant s, t \leqslant 5$	$\mathbf{D}_{20}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\{r_{72s}, s_t\}$, $1 \leqslant s, t \leqslant 5$	$\mathbf{D}_{20}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$
$\mathbf{R}_{20}$	$\mathbf{D}_{20}$	$\mathbf{R}_{20}$
$\mathbf{D}_{20}$	$\mathbf{D}_{20}$	$\{\mathrm{id}, r_{180}\}$

Таблица 19

H	$\mathrm{Nm}\,H$	$\mathrm{Cnt}\,H$
$\{e, s^2t^4\}$	$\{e, st^3, s^2t^4, s^3t\}$	$\{e, st^3, s^2t^4, s^3t\}$
$\{e, s^2t^3\}$	$\{e, st, s^2t^3, s^3t\}$	$\{e, st, s^2t^3, s^3t\}$
$\{e, s^2t^2\}$	$\{e, st^4, s^2t^2, s^3t^3\}$	$\{e, st^4, s^2t^2, s^3t^3\}$
$\{e, s^2t\}$	$\{e, st^2, st^4, s^3t^4\}$	$\{e, st^2, st^4, s^3t^4\}$
$\{e, st^4, s^2t^2, s^3t^3\}$	$\{e, st^4, s^2t^2, s^3t^3\}$	$\{e, st^4, s^2t^2, s^3t^3\}$
$\{e, st^3, s^2t^4, s^3t\}$	$\{e, st^3, s^2t^4, s^3t\}$	$\{e, st^3, s^2t^4, s^3t\}$
$\{e, st^2, st^4, s^3t^4\}$	$\{e, st^2, st^4, s^3t^4\}$	$\{e, st^2, st^4, s^3t^4\}$
$\{e, st, s^2t^3, s^3t\}$	$\{e, st, s^2t^3, s^3t\}$	$\{e, st, s^2t^3, s^3t\}$
$\langle t\rangle$	F	$\langle t\rangle$
$\langle s^2\rangle$	$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$
$\langle s^2, t\rangle$	F	$\{e\}$
$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$	$\langle s\rangle$
F	F	$\{e\}$

Отыскание Т-нормальных групп

Пусть H_1 и H_2 — подгруппы в группе G и $H_1 \subset H_2$. Тогда H_1 является подгруппой в H_2. Если H_1 является нормальным делителем группы G, то она будет и нормальным делителем в H_2. Особый интерес представляет случай, когда в G выполняется обратное утверждение, то есть «бинарное отношение «быть нормальным делителем» транзитивно». Группу G называют Т-нормальной, если всякий нормальный делитель любого нормального делителя группы G является нормальным делителем в G.

Для проверки Т-нормальности группы G порядка n может быть применен следующий алгоритм. Все подгруппы, встретившиеся по ходу выполнения описанной выше программы, записываются в специальный массив размера $n \times n$: i-ая группа составляет i-ую строку этого массива. Описанная выше программа работает таким образом, что из неравенства $i < j$ следует, что j-ая подгруппа не может быть подмножеством i-ой подгруппы. Введем новый счетчик, присвоив ему начальное значение 1. Если существует пара чисел (i, j), для которых выполняются условия: а) $i < j$, б) нормализатор j-ой подгруппы совпадает с G, в) j-ая подгруппа является подмножеством нормализатора i-ой подгруппы, г) нормализатор i-ой подгруппы не совпадает с G, то счетчик обнуляется. Если в конце работы программы счетчик равен нулю, то группа G не удовлетворяет условию Т-нормальности. В качестве примера укажем, что для группы Q_{16} это условие нарушается на парах $(\{e, s^4, s^3t, s^7t\}, H^{\circ})$ и $(\{e, s^4, s^2t, s^6t\}, H^{\bullet})$.

Список литературы

Александров А. А., Нижников А. И., Шилин И. А. Компьютерное вычисление подгрупп и нормальных делителей неабелевых групп порядка не выше 20 // Преподаватель XXI век. – 2011. – № 1, часть 2. – С. 214–220.

Шилин И. А., Китюков В. В. Гомоморфная устойчивость пар групп малого порядка // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 4 (14). – С. 22–27.

Шилин И. А., Китюков В. В. Методические особенности применения компьютерного моделирования при решении задач общей алгебры // Педагогическая информатика. – 2011. – № 1. – С. 22–27.

Шилин И. А., Китюков В. В., Александров А. А., Вычисление групп гомоморфизмов и проверка гомоморфной устойчивости пар конечных групп // Прикладная информатика. – 2012. – № 1. – С. 111–115.

Belcastro S. M., Sherman G. Counting cenralizers in finite groups // Mathematical Magazine. – 1994. – V. 67, № 5. – P. 366–374.

Cannon J. J. A general purpose group theory program // Proceedings of the Second Internat. Conf. Theory of Groups. – Berlin etc.: Springer, 1974. – P. 204–217.

Cannon J. J. Computers in group theory: a survey // Communications of the ACM. – 1969. – V. 12, № 1. – P. 3–12.

Holt D. F. The CAYLEY group theory system // Notices. Amer. Math. Soc. 1988. – V. 35, № 8. – P. 1135–1140.

Miyamoto I. Improvement of a function computing normilizers for permutation groups // Mathematical Software – ICMS 2010. Berlin etc.: Springer, 2010. – P. 62–68.

Praeger C. E. Computers in algebra: new answers, new questions // J. Korean Math. Soc. 2001. – V. 38, № 44. – P. 763–781.