**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 3 С. 521−529**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.5

Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными средними рядов Фурье

О. Г. Ровенская[1,a], О. А. Новиков[2]

[1] Донбасская государственная машиностроительная академия,
Украина, 84313, г. Краматорск, ул. Шкадинова, д. 72

[2] Славянский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, г. Славянск, ул. Г. Батюка, д. 19

E-mail: [a] o.rovenskaya@mail.ru

*Получено 10 июня 2012 г.,
после доработки 23 июля 2012 г.*

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах периодических функций многих переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского для прямоугольных сумм Валле Пуссена и указанных классов функций.

Ключевые слова: (ψ,β)-производная, прямоугольные суммы Валле Пуссена, задача Колмогорова–Никольского

Approximation of the periodical functions of high smoothness by the right-angled linear means of Fourier series

O. G. Rovenska[1], O. A. Novikov[2]

[1] Donbass State Engineering Academy, 72 Shkadinova st., Kramatorsk, 84313, Ukraine
[2] Slavyansk State Pedagogical University, 19 G. Batyuk st., Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. – We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the right-angled de la Vallee Poussin sums taken over classes of periodical functions of many variables of high smoothness. These equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol’skii problem for the right-angled de la Vallee Poussin sums on the specified classes of functions.

Keywords: (ψ,β)-derivative, the right-angled de la Vallee Poussin sums, Kolmogorov–Nikol'skiy problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 521–529 (Russian).

Введение

Следуя работе [Степанец, Пачулиа, 1991], классы (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных, позволяющие учитывать по отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^m – евклидово пространство с элементами $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $T^m = [-\pi;\pi]^m$ – m-мерный куб со стороной 2π,

$$N^m = \{\vec{x} \in R^m \mid x_i \in \mathbb{N}, i = 1,2,...,m\},$$
$$N_*^m = \{\vec{x} \in R^m \mid x_i \in N_* = \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1,2,...,m\},$$
$$N_i^m = \{\vec{x} \in R^m \mid x_i \in \mathbb{N}, x_j \in N_*, i \neq j\}.$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π-периодических по каждой переменной суммируемых на множестве T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in \{0,1\}^m \subset R^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in \{0,1\}^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ являются коэффициентами фурье-функции $f(\vec{x})$ [Степанец, Пачулиа, 1991].

Пусть $\overline{m} = \{1,2,...,m\}$ и $\mu \subset \overline{m}$. Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонику

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right)$$

и величины

$$A_{\vec{k}}^{\mu}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \overline{m} \setminus \mu} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \prod_{j \in \mu} \cos\left(k_j x_j - \frac{(s_j + 1)\pi}{2}\right),$$

которые являются гармониками, сопряженными с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменным x_i, $i \in \mu$. Кроме того, гармонику, сопряженную с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ по переменной x_i, $i = 1,2,...,m$, будем обозначать через $A_{\vec{k}}^{\vec{e}_i}(f;\vec{x})$.

Следуя [Степанец, Пачулиа, 1991], ряд фурье-функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $f \in L(T^m)$ и фиксированные пары систем чисел $\overline{\psi}_i(k) = (\psi_{i1}(k);\psi_{i2}(k))$, $\overline{\Psi}_i(k) = (\Psi_{i1}(k);\Psi_{i2}(k))$, $i = 1,2,...,m$, $k \in N_*$ удовлетворяют условиям

$$\psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k) \neq 0,\ \Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k) \neq 0,$$
$$\psi_{i1}(0) = 1,\ \Psi_{i1}(0) = 1,\ \psi_{i2}(0) = 0,\ \Psi_{i2}(0) = 0,\ i = 1,2,...,m.$$

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^m} 2^{-q(\vec{k})} \frac{\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})-\psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{e_i}(f;\vec{x})}{\psi_{i1}^2(k_i)+\psi_{i2}^2(k_i)}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^m)$. Обозначим ее символом $f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x})=\frac{\partial^{\bar{\psi}_i}f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем частной $\bar{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i=1,2,...,m.$ Для фиксированного множества $\mu\subset\bar{m}$, $\mu(r)=\{i_1,i_2,...,i_r\}\subset\bar{m}$, смешанной $\bar{\Psi}_\mu$-производной по переменным x_i, $i\in\mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\bar{\Psi}_\mu}(\vec{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения вышеуказанной формулы, но с использованием вместо систем чисел $\bar{\psi}_i(k)=\left(\psi_{i1}(k);\psi_{i2}(k)\right)$, соответственно $\bar{\Psi}_i(k)=\left(\Psi_{i1}(k);\Psi_{i2}(k)\right)$, $i\in\mu(r)$:

$$f^{\bar{\Psi}_\mu}(\vec{x})=\frac{\partial^{\bar{\Psi}_{i_r}}\partial^{\bar{\Psi}_{i_{r-1}}}...\partial^{\bar{\Psi}_{i_1}}f(\vec{x})}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}...\partial x_{i_1}}.$$

Поскольку существование обычных частных производных по каждой переменной x_i, $i=1,2,...,m$, в общем случае не гарантирует существование смешанной производной по этим переменным, то будем считать, что выполняются условия

$$\psi_{ij}(k)=O(1)\Psi_{ij}(k),\ k\to\infty,\ i=1,2,...,m,\ j=1,2.$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$, символом $C_\infty^{m\bar{\psi}}$ принято обозначать множество непрерывных функций $f\in L(T^m)$, имеющих почти везде ограниченные $\bar{\Psi}_\mu$- и $\bar{\psi}_i$-производные

$$\operatorname{ess\,sup}|f^{\bar{\Psi}_\mu}(\vec{x})|\le 1,\ \operatorname{ess\,sup}|f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x})|\le 1,\ i\subseteq\mu,\ \vec{x}\in T^m.$$

Изучению аппроксимативных свойств этих классов посвящены работы [Степанец, Пачулиа, 1991; Рукасов и др., 2008].

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2$, определяющих класс $C_\infty^{m\bar{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, $\beta_i^*\in R$, $i=1,2,...,m$, такие, что

$$\psi_{i1}(k)=\psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2},\ \psi_{i2}(k)=\psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k)=\Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2},\ \Psi_{i2}(k)=\Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},$$

то $C_\infty^{m\bar{\psi}}$ является классом (ψ,β)-дифференцируемых функций. Будем обозначать такие классы $C_{\beta,\infty}^{m\psi}$. Если $m=2$ и, кроме того, для чисел $r>0$, $s>0$, $r_1\ge r$, $s_1\ge s$ выполнены условия $\Psi_1(k)=k^{-r}$, $\Psi_2(k)=k^{-s}$, $\psi_1(k)=k^{-r_1}$, $\psi_2(k)=k^{-s_1}$, $\beta_1=r$, $\beta_1^*=s$, $\beta_2=r_1$, $\beta_2^*=s_1$, то классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$ совпадают с классами $W_{r_1,s_1}^{r,s}$. В работе [Степанец, 1973] изучены вопросы приближения классов $W_{r_1,s_1}^{r,s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x})=S_{n_1,n_2}(f;\vec{x})=\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, взятых по классам $W^{r,s}_{r_1,s_1}$, получено асимптотическое равенство при $n_i \to \infty$, $i=1,2$:

$$E(W^{r,s}_{r_1,s_1};S_{\vec{n}}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in W^{r,s}_{r_1,s_1}} \left\| f(\vec{x}) - S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) \right\|_C =$$

$$= \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}} \right).$$

Пусть функции, задающие класс, определяются соотношениями $\psi_i(x) = q_i^x$, $i=1,2,...,m.$ Функции $\Psi_i(x)$ задаются подобным образом: $\Psi_i(x) = Q_i^x$, $i=1,2,...,m.$ В этом случае классы $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ по аналогии с классами функций одной переменной обозначаются $C^{mq}_{\beta,\infty}$. В работах [Рукасов, Новиков, Ровенская, 2008; Рукасов и др., 2008] рассмотрены вопросы приближения этих классов прямоугольными суммами Валле Пуссена, которые определяются равенством

$$V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x}) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \sum_{\vec{k}\in\prod_{i=1}^m [n_i - p_i; n_i - 1]} S_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = \sum_{\vec{k}\in\prod_{i=1}^m [0;n_i]} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$$

– прямоугольные частичные суммы фурье-функции $f(\vec{x})$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i < n_i$, $i=1,2,...,m.$

В работе [Рукасов и др., 2008] для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах $C^{mq}_{\beta,\infty}$ получена асимптотическая формула при $n_i \to \infty$, $i=1,2,...,m$:

$$E(C^{mq}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^{mq}_{\beta,\infty}} \left\| f(\vec{x}) - V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x}) \right\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(1-q_i^2)} + O(1)\left(\sum_{i=1}^m \frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(n_i-p_i)(1-q_i)^3} + \sum_{i=1}^m \frac{q_i^{n_i+1}}{p_i(1-q_i^2)} + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r)\subset\bar{m}} \prod_{j\in\mu(r)} \frac{Q_j^{n_j-p_j+1}}{p_j(1-Q_j^2)} \right).$$

Обозначим через D_q множество последовательностей $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, для которых выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q,\ q\in(0;1).$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на соответствующих классах функций одной переменной $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$, в работе [Степанец, Сердюк, 2000] было получено при $n\to\infty$ асимптотическое равенство

$$E(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_n) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| f(x) - S_n(f;x) \right\|_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right),$$

где

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}},\ \varepsilon_n = \sup_{k\ge n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|.$$

Асимптотическое равенство для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$, получено в работе [Рукасов, 2003]:

$$E(C^{\psi}_{\beta,\infty};V_{n,p})\overset{\text{df}}{=}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f(x)-V_{n,p}(f;x)\right\|_C=$$
$$=\psi(n-p+1)\left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p}+O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{p(1-q^2)}+\frac{1}{(1-q)^3p(n-p)}+\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right). \quad (1)$$

Результат

В работе [Новиков, Ровенская, 2011] получены асимптотические равенства для точных верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах функций двух переменных $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$. Данная работа является продолжением этого исследования. Основная цель работы – получение асимптотических формул для величин

$$E(C^{m\psi}_{\beta,\infty};V_{\vec n,\vec p})\overset{\text{df}}{=}\sup_{f\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}}\| f(\vec x)-V_{\vec n,\vec p}(f;x)\|_C$$

на классах функций многих переменных $C^{m\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi_i(k)\in D_{q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $\Psi_i(k)\in D_{Q_i}$, $Q_i\in(0;1)$, $i=1,2,...,m$. Получена асимптотическая формула, которая есть аналог равенства (1) для таких классов функций.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_i(x)\in D_{q_i}$, $\Psi_i(x)\in D_{Q_i}$, q_i, $Q_i\in(0;1)$, β_i, $\beta_i^*\in\mathbb{R}$, $p_i\in\mathbb{N}$, $p_i<n_i$, $i=1,2,..,m$. *Тогда при* $n_i-p_i\to\infty$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\begin{aligned}E(C^{m\psi}_{\beta,\infty};V_{\vec n,\vec p}) &= \sup_{f\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}}\| f(\vec x)-V_{\vec n,\vec p}(f;x)\|_C=\\ &=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i^2)}+O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i)^3(n_i-p_i+1)}+\right.\\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+\\ &\left.+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\bar m}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s-p_s+1)}{p_s(1-Q_s)^2}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j-p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2}\right],\end{aligned} \quad (2)$$

где $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная относительно* n_i, p_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*,

$$\varepsilon_m(\psi)=\sup_{k\ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|,\ q=\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}. \quad (3)$$

Доказательство. Используя рассуждения работы [Ровенская, 2011], можно показать, что

$$\delta_{\vec n,\vec p}(f;\vec x)\overset{\text{df}}{=}f(\vec x)-V_{\vec n,\vec p}(f;\vec x)=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\bar\psi_i}(\vec x+t_i\vec e_i)\sum_{k=n_i-p_i+1}^{\infty}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})\psi_i(k_i)\cos\left(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt_i+$$
$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\bar m}\frac{1}{\pi^r}\int_{T^r}f^{\bar\Psi_\mu}\left(\vec x+\sum_{j\in\mu(r)}t_j\vec e_j\right)\prod_{j\in\mu(r)}\sum_{\nu_j=n_j-p_j+1}^{\infty}(1-\lambda_{\nu_j}^{(n_j)})\psi_{\nu_j}(\nu_j)\cos\left(\nu_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2}\right)dt_j.$$

Далее понадобится следующее утверждение (см., например, [Рукасов, 2003]).

Лемма. *Пусть* $\psi \in D_q$, $q \in (0;1)$ *и*

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le m, \\ \dfrac{n-k}{n-m}, & m+1 \le k \le n-1, \\ 0, & n \le k, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда для любой последовательности чисел γ_k, $k = 1,2,...,$ *при любых натуральных* n, $m < n$, *справедливо равенство*

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} (1-\lambda_k^{(n)})\psi(k)\cos(kt-\gamma_k) = \psi(m+1)\times$$
$$\times[q^{-(m+1)} \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-\lambda_k^{(n)})q^k \cos(kt-\gamma_k) + r_m(t,\psi)],$$

в котором

$$r_m(t,\psi) = (1-\lambda_{m+1}^{(n)})\sum_{i=2}^{\infty}\left(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(1-\lambda_{m+l+1}^{(n)})\psi(m+l+1)}{(1-\lambda_{m+l}^{(n)})\psi(m+l)} - \frac{1-\lambda_{m+i}^{(n)}}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}}q^{i-1}\right)\cos((m+i)t-\gamma_{m+i}),$$

причем, начиная с некоторого m_0,

$$|r_m(t,\psi)| \le \frac{3\varepsilon_m(\psi)}{(1-q-\varepsilon_m(\psi))^2(1-q)^2},$$

где $\varepsilon_m(\psi)$ *определено* (3).

Используя утверждение леммы, имеем

$$\delta_{\bar{n},\bar{p}}(f;\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)[\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{-(n_i-p_i+1)}\times$$
$$\times\sum_{k=n_i-p_i+1}^{\infty}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})q_i^{k_i}\cos\left(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)+\psi_i(n_i-p_i+1)r_{n_i-p_i+1}(t_i,\psi_i)]dt_i +$$
$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\frac{1}{\pi^r}\int_{T^r} f^{\bar{\Psi}_\mu}(\vec{x}+\sum_{j\in\mu(r)}t_j\vec{e}_j)\prod_{j\in\mu(r)}[\Psi_j(n_j-p_j+1)Q_j^{-(n_j-p_j+1)}\times$$
$$\times\sum_{\nu_j=n_j-p_j+1}^{\infty}(1-\lambda_{\nu_j}^{(n_j)})Q_j^{\nu_j}\cos\left(\nu_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2}\right)+\Psi_j(n_j-p_j+1)r_{n_j-p_j+1}(t_j,\Psi_j)]dt_j =$$

Используя равенство

$$\prod_{j\in\mu(r)}(a_j+b_j) = \sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu\setminus\xi}a_s\prod_{j\in\xi}b_j,$$

имеем

$$\delta_{\bar{n},\bar{p}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{-(n_i-p_i+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k=n_i-p_i+1}^{\infty}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})\times$$
$$\times q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n_i-p_i+1)\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)r_{n_i-p_i+1}(t_i,\psi_i)dt_i +$$

$$+\sum_{r=2}^{m}(-1)^{r+1}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\frac{1}{\pi^r}\int_{T^r}f^{\bar{\Psi}_\mu}(\vec{x}+\sum_{j\in\mu(r)}t_j\vec{e}_j)\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu\setminus\xi}\Psi_s(n_s-p_s+1)Q_s^{-(n_s-p_s+1)}\times$$

$$\times\sum_{\nu_s=n_s-p_s+1}^{\infty}(1-\lambda_{\nu_s}^{(n_s)})Q_s^{\nu_s}\cos\left(\nu_s t_s+\frac{\beta_s^*\pi}{2}\right)dt_s\prod_{j\in\xi}\Psi_j(n_j-p_j+1)r_{n_j-p_j}(t_j,\Psi_j)dt_j.$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что

$$\sum_{k=n-p+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}q^m\cos\left(mt+\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{q^{n-p+1}}{p(1-2q\cos t+q^2)}\cos\left((n-p+1)t+\frac{\beta\pi}{2}+2\frac{q\sin t}{1-q\cos t}\right)-$$

$$-\frac{q^{n+1}}{p(1-2q\cos t+q^2)}\cos\left((n+1)t+\frac{\beta\pi}{2}+2\frac{q\sin t}{1-q\cos t}\right).$$

Тогда

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$

$$+O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+\right.\tag{4}$$

$$\left.+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s-p_s+1)}{p_s(1-Q_s)^2}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j-p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2}\right],$$

где

$$b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)=\sum_{k=n_i-p_i}^{n_i-1}\sum_{m_i=k_i+1}^{\infty}q_i^{m_i}\cos\left(m_i t_i+\frac{\beta_i\pi}{2}\right).$$

Так как $f(\vec{x})\in C_{\beta,\infty}^{m\psi}$, то

$$E(C_{\beta,\infty}^{m\psi};V_{\vec{n},\vec{p}})\le\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+$$

$$+O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s-p_s+1)}{p_s(1-Q_s)^2}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j-p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2}\right].\tag{5}$$

Найдем функцию $f_0(\vec{x})\in C_{\beta,\infty}^{m\psi}$, для которой справедливо равенство

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f_0;\vec{0})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+$$

$$+O(1)\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i)^3(n_i-p_i+1)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}\right)+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s-p_s+1)}{p_s(1-Q_s)^2}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j-p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2}\Bigg]. \qquad (6)$$

На основании соотношения (4) для любой $f\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ можем записать

$$\delta_{\bar{n},\bar{p}}(f;\vec{0})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)dt_i+$$

$$+O(1)\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}\right)+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s-p_s+1)}{p_s(1-Q_s)^2}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j-p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2}\Bigg]. \qquad (7)$$

Из рассуждений работы [Рукасов, Новиков, 1998] следует, что функции $\operatorname{sign} b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)$, $i=1,2,...,m$, можно переопределить каждую на своем множестве, мера которого не превышает $K(n_i-p_i+1)^{-1}(1-q_i)^{-1}$, где K – некоторое фиксированное число, так, чтобы полученные функции $y_i(t_i)$, $i=1,2,...,m$, удовлетворяли условиям $|y_i(t)|\le 1$, $\int_{-\pi}^{\pi}y_i(t)dt=0$.

Далее построим функции $\varphi_i(\vec{t})=y_i(t_i)$, $\vec{t}\in T^m$, и функции $f_i(\vec{x})$ такие, что $(f_i)^{\bar{\psi}_i}=\varphi_i(\vec{x})$. Можно показать (см., например, [Рукасов и др., 2008]), что функция $f_0(\vec{x})=\sum_{i=1}^{m}f_i(\vec{x})$ удовлетворяет условию $(f_0)^{\bar{\psi}_i}(\vec{x})=\varphi_i(\vec{x})$, $i=1,2,...,m$. Поэтому $f_0(\vec{x})\in C^{m\psi}_{\beta,\infty}$ и имеет место следующее соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_0)^{\bar{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)dt_i=\int_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)|\,dt_i+O(1)\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{(n_i-p_i+1)(1-q_i)^3}.$$

На основании соотношения (7) можем сделать вывод о том, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ справедливо соотношение (6).

Сопоставляя (5) и (6), получаем

$$E(C^{m\psi}_{\beta,\infty};V_{\bar{n},\bar{p}})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)|\,dt_i+$$

$$+O(1)\Bigg[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i)^3(n_i-p_i+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}\right)+$$

$$+\sum_{r=2}^{m}\sum_{\mu(r)\subset\bar{m}}\sum_{\xi\subset\mu(r)}\prod_{s\in\mu}\frac{\Psi_s(n_s-p_s+1)}{p_s(1-Q_s)^2}\prod_{j\in\xi}\frac{\varepsilon_{n_j-p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2}\Bigg]. \qquad (8)$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta}_{n-p}(t)|\,dt=4\frac{q^{n-p+1}}{1-q^2}+O(1)\frac{q^{n-p}}{n-p}.$$

Объединяя два последних равенства, получаем асимптотическую формулу (2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий

$$q_i = Q_i, \ \lim_{n_i \to \infty} p_i = \infty, \ \lim_{\substack{n_i - p_i \to \infty \\ n_i \to \infty}} p_i \varepsilon_{n_i - p_i} < \infty, \ i = 1, 2, ..., m,$$

соотношение (2) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

Список литературы

Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными методами // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. – Т. 3, №. 1. – С. 161–171.

Ровенская О. Г. Интегральные представления уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $C^{m\overline{\psi}}$ // Научный. вестник Черновицкого нац. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 1, № 3. – С. 99–104.

Рукасов В. И, Ровенская О. Г., Новиков О. А., Бодрая, В. И. Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена // Вестник Одесского нац. ун-та. Матем. и мех. – 2008. – Т. 13, вып. 18. – С. 87–96.

Рукасов В. И. Приближения суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 806–816.

Рукасов В. И., Новиков О. А. Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – 1998. – Т. 20. – С. 228–241.

Рукасов В. И., Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение периодических функций двух переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена // Теория приближения функций и смежные вопросы. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 286–296.

Степанец А. И. Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, № 5. – С. 599–609.

Степанец А. И., Пачулиа Н. Л. Кратные суммы Фурье на множествах дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 4. – С. 545–555.

Степанец А. И., Сердюк А. С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 3. – С. 375–395.