

УДК: 517.5

Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными средними рядов Фурье

О. Г. Ровенская^{1,а}, О. А. Новиков²

¹Донбасская государственная машиностроительная академия,
Украина, 84313, г. Краматорск, ул. Шкадинова, д. 72

²Славянский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, г. Славянск, ул. Г. Батюка, д. 19

E-mail: ^аo.rovenskaya@mail.ru

Получено 10 июня 2012 г.,
после доработки 23 июля 2012 г.

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуассена на классах периодических функций многих переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского для прямоугольных сумм Валле Пуассена и указанных классов функций.

Ключевые слова: (ψ, β) -производная, прямоугольные суммы Валле Пуассена, задача Колмогорова–Никольского

Approximation of the periodical functions of high smoothness by the right-angled linear means of Fourier series

O. G. Rovenska¹, O. A. Novikov²

¹Donbass State Engineering Academy, 72 Shkadinova st., Kramatorsk, 84313, Ukraine

²Slavyansk State Pedagogical University, 19 G. Batyuk st., Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. – We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the right-angled de la Vallee Poussin sums taken over classes of periodical functions of many variables of high smoothness. These equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nicol'skii problem for the right-angled de la Vallee Poussin sums on the specified classes of functions.

Keywords: (ψ, β) -derivative, the right-angled de la Vallee Poussin sums, Kolmogorov–Nicol'skiy problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 521–529 (Russian).

Введение

Следуя работе [Степанец, Пачулия, 1991], классы (ψ, β) -дифференцируемых периодических функций многих переменных, позволяющие учитывать по отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^m – евклидово пространство с элементами $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $T^m = [-\pi; \pi]^m$ – m -мерный куб со стороной 2π ,

$$\begin{aligned} N^m &= \{\vec{x} \in R^m \mid x_i \in \mathbb{N}, i=1, 2, \dots, m\}, \\ N_*^m &= \{\vec{x} \in R^m \mid x_i \in N_* = \mathbb{N} \cup \{0\}, i=1, 2, \dots, m\}, \\ N_i^m &= \{\vec{x} \in R^m \mid x_i \in \mathbb{N}, x_j \in N_*, i \neq j\}. \end{aligned}$$

Через $L(T^m)$ обозначим множество 2π -периодических по каждой переменной суммируемых на множестве T^m функций $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Пусть $f \in L(T^m)$. Каждой паре точек $\vec{s} \in \{0, 1\}^m \subset R^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\vec{x}) \prod_{i=1}^m \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) dx_i.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s} \in \{0, 1\}^m$, $\vec{k} \in N_*^m$ являются коэффициентами фурье-функции $f(\vec{x})$ [Степанец, Пачулия, 1991].

Пусть $\bar{m} = \{1, 2, \dots, m\}$ и $\mu \subset \bar{m}$. Каждому вектору $\vec{k} \in N_*^m$ поставим в соответствие гармонике

$$A_{\vec{k}}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i=1}^m \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right)$$

и величины

$$A_{\vec{k}}^{\mu}(f; \vec{x}) = \sum_{\vec{s} \in E^m} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f) \prod_{i \in \bar{m} \setminus \mu} \cos\left(k_i x_i - \frac{s_i \pi}{2}\right) \prod_{j \in \mu} \cos\left(k_j x_j - \frac{(s_j + 1)\pi}{2}\right),$$

которые являются гармониками, сопряженными с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменным x_i , $i \in \mu$. Кроме того, гармонику, сопряженную с $A_{\vec{k}}(f; \vec{x})$ по переменной x_i , $i=1, 2, \dots, m$, будем обозначать через $A_{\vec{k}}^{e_i}(f; \vec{x})$.

Следуя [Степанец, Пачулия, 1991], ряд фурье-функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением

$$S[f] = \sum_{\vec{k} \in N_*^m} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f; \vec{x}),$$

где $q(\vec{k})$ – количество нулевых координат вектора \vec{k} .

Пусть $f \in L(T^m)$ и фиксированные пары систем чисел $\bar{\psi}_i(k) = (\psi_{i1}(k); \psi_{i2}(k))$, $\bar{\Psi}_i(k) = (\Psi_{i1}(k); \Psi_{i2}(k))$, $i=1, 2, \dots, m$, $k \in N_*$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi_{i1}^2(k) + \psi_{i2}^2(k) &\neq 0, \quad \Psi_{i1}^2(k) + \Psi_{i2}^2(k) \neq 0, \\ \psi_{i1}(0) = 1, \quad \Psi_{i1}(0) = 1, \quad \psi_{i2}(0) = 0, \quad \Psi_{i2}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\bar{k} \in N_i^m} 2^{-q(\bar{k})} \frac{\psi_{i1}(k_i)A_{\bar{k}}(f; \bar{x}) - \psi_{i2}(k_i)A_{\bar{k}}^{s_i}(f; \bar{x})}{\psi_{i1}^2(k_i) + \psi_{i2}^2(k_i)}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^m)$. Обозначим ее символом $f^{\bar{\psi}_i}(\bar{x}) = \frac{\partial^{\bar{\psi}_i} f(\bar{x})}{\partial x_i}$ и назовем частной $\bar{\psi}_i$ -производной функции $f(\bar{x})$ по переменной x_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Для фиксированного множества $\mu \subset \bar{m}$, $\mu(r) = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \bar{m}$, смешанной $\bar{\Psi}_\mu$ -производной по переменным x_i , $i \in \mu(r)$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\bar{\Psi}_\mu}(\bar{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения вышеуказанной формулы, но с использованием вместо систем чисел $\bar{\psi}_i(k) = (\psi_{i1}(k); \psi_{i2}(k))$, соответственно $\bar{\Psi}_i(k) = (\Psi_{i1}(k); \Psi_{i2}(k))$, $i \in \mu(r)$:

$$f^{\bar{\Psi}_\mu}(\bar{x}) = \frac{\partial^{\bar{\Psi}_{i_r}} \partial^{\bar{\Psi}_{i_{r-1}}} \dots \partial^{\bar{\Psi}_{i_1}} f(\bar{x})}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Поскольку существование обычных частных производных по каждой переменной x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, в общем случае не гарантирует существование смешанной производной по этим переменным, то будем считать, что выполняются условия

$$\psi_{ij}(k) = O(1)\Psi_{ij}(k), \quad k \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2.$$

Для заданного набора функций ψ_{ij} , Ψ_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2$, символом $C_\infty^{m\bar{\psi}}$ принято обозначать множество непрерывных функций $f \in L(T^m)$, имеющих почти везде ограниченные $\bar{\Psi}_\mu$ - и $\bar{\psi}_i$ -производные

$$\text{esssup} |f^{\bar{\Psi}_\mu}(\bar{x})| \leq 1, \quad \text{esssup} |f^{\bar{\psi}_i}(\bar{x})| \leq 1, \quad i \subseteq \mu, \quad \bar{x} \in T^m.$$

Изучению аппроксимативных свойств этих классов посвящены работы [Степанец, Пачулия, 1991; Рукасов и др., 2008].

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2$, определяющих класс $C_\infty^{m\bar{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i , $\beta_i^* \in R$, $i = 1, 2, \dots, m$, такие, что

$$\begin{aligned} \psi_{i1}(k) &= \psi_i(k) \cos \frac{\beta_i \pi}{2}, \quad \psi_{i2}(k) = \psi_i(k) \sin \frac{\beta_i \pi}{2}, \\ \Psi_{i1}(k) &= \Psi_i(k) \cos \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \quad \Psi_{i2}(k) = \Psi_i(k) \sin \frac{\beta_i^* \pi}{2}, \end{aligned}$$

то $C_\infty^{m\bar{\psi}}$ является классом (ψ, β) -дифференцируемых функций. Будем обозначать такие классы $C_{\beta, \beta^*}^{m\bar{\psi}}$. Если $m = 2$ и, кроме того, для чисел $r > 0$, $s > 0$, $r_1 \geq r$, $s_1 \geq s$ выполнены условия $\Psi_1(k) = k^{-r}$, $\Psi_2(k) = k^{-s}$, $\psi_1(k) = k^{-r_1}$, $\psi_2(k) = k^{-s_1}$, $\beta_1 = r$, $\beta_1^* = s$, $\beta_2 = r_1$, $\beta_2^* = s_1$, то классы $C_{\beta, \beta^*}^{2\bar{\psi}}$ совпадают с классами $W_{r_1, s_1}^{r, s}$. В работе [Степанец, 1973] изучены вопросы приближения классов $W_{r_1, s_1}^{r, s}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\bar{n}}(f; \bar{x}) = S_{n_1, n_2}(f; \bar{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\bar{k})} A_{\bar{k}}(f; \bar{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\bar{n}}(f; \bar{x})$, взятых по классам $W_{n_1, s_1}^{r, s}$, получено асимптотическое равенство при $n_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$:

$$E(W_{n_1, s_1}^{r, s}; S_{\bar{n}}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in W_{n_1, s_1}^{r, s}} \|f(\bar{x}) - S_{\bar{n}}(f; \bar{x})\|_C = \\ = \frac{4 \ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4 \ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1) \left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}} \right).$$

Пусть функции, задающие класс, определяются соотношениями $\psi_i(x) = q_i^x$, $i = 1, 2, \dots, m$. Функции $\Psi_i(x)$ задаются подобным образом: $\Psi_i(x) = Q_i^x$, $i = 1, 2, \dots, m$. В этом случае классы $C_{\beta, \infty}^{mq}$ по аналогии с классами функций одной переменной обозначаются $C_{\beta, \infty}^{mq}$. В работах [Рукасов, Новиков, Ровенская, 2008; Рукасов и др., 2008] рассмотрены вопросы приближения этих классов прямоугольными суммами Валле Пуссена, которые определяются равенством

$$V_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x}) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \sum_{\bar{k} \in \prod_{i=1}^m [n_i - p_i; n_i - 1]} S_{\bar{k}}(f; \bar{x}),$$

где

$$S_{\bar{k}}(f; \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \prod_{i=1}^m [0; n_i]} 2^{-q(\bar{k})} A_{\bar{k}}(f; \bar{x})$$

– прямоугольные частичные суммы фурье-функции $f(\bar{x})$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i < n_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

В работе [Рукасов и др., 2008] для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах $C_{\beta, \infty}^{mq}$ получена асимптотическая формула при $n_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, m$:

$$E(C_{\beta, \infty}^{mq}; V_{\bar{n}, \bar{p}}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{mq}} \|f(\bar{x}) - V_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x})\|_C = \\ = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{q_i^{n_i - p_i + 1}}{p_i(1 - q_i^2)} + O(1) \left(\sum_{i=1}^m \frac{q_i^{n_i - p_i + 1}}{p_i(n_i - p_i)(1 - q_i)^3} + \sum_{i=1}^m \frac{q_i^{n_i + 1}}{p_i(1 - q_i^2)} + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subseteq \bar{m}} \prod_{j \in \mu(r)} \frac{Q_j^{n_j - p_j + 1}}{p_j(1 - Q_j^2)} \right).$$

Обозначим через D_q множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых выполняется соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in (0; 1).$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на соответствующих классах функций одной переменной $C_{\beta, \infty}^{\psi}$, $\psi(k) \in D_q$, в работе [Степанец, Сердюк, 2000] было получено при $n \rightarrow \infty$ асимптотическое равенство

$$E(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_n) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C = \psi(n) \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1) \left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right),$$

где

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}, \quad \varepsilon_n = \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|.$$

Асимптотическое равенство для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C_{\beta, \infty}^{\psi}$, $\psi(k) \in D_q$, получено в работе [Рукасов, 2003]:

$$E(C_{\beta, \infty}^{\psi}; V_{n,p}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f(x) - V_{n,p}(f; x)\|_C = \\ = \psi(n-p+1) \left(\frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-q^2)p} + O(1) \left(\frac{q^{p-1}}{p(1-q^2)} + \frac{1}{(1-q)^3 p(n-p)} + \frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4} \right) \right). \tag{1}$$

Результат

В работе [Новиков, Ровенская, 2011] получены асимптотические равенства для точных верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах функций двух переменных $C_{\beta, \infty}^{2\psi}$. Данная работа является продолжением этого исследования. Основная цель работы – получение асимптотических формул для величин

$$E(C_{\beta, \infty}^{m\psi}; V_{\bar{n}, \bar{p}}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}} \|f(\bar{x}) - V_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x})\|_C$$

на классах функций многих переменных $C_{\beta, \infty}^{m\psi}$, $\psi_i(k) \in D_{q_i}$, $q_i \in (0;1)$, $\Psi_i(k) \in D_{Q_i}$, $Q_i \in (0;1)$, $i=1,2,\dots,m$. Получена асимптотическая формула, которая есть аналог равенства (1) для таких классов функций.

Теорема 1. Пусть $\psi_i(x) \in D_{q_i}$, $\Psi_i(x) \in D_{Q_i}$, $q_i, Q_i \in (0;1)$, $\beta_i, \beta_i^* \in \mathbb{R}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i < n_i$, $i=1,2,\dots,m$. Тогда при $n_i - p_i \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$E(C_{\beta, \infty}^{m\psi}; V_{\bar{n}, \bar{p}}) = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}} \|f(\bar{x}) - V_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x})\|_C = \\ = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(n_i - p_i + 1)}{p_i(1-q_i^2)} + O(1) \left[\sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(n_i - p_i + 1)}{p_i(1-q_i)^3 (n_i - p_i + 1)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\psi_i(n_i - p_i + 1) \varepsilon_{n_i - p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4} + \right. \\ \left. + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subset m} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s - p_s + 1)}{p_s(1-Q_s)^2} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j - p_j}(\Psi_j)}{(1-Q_j)^2} \right], \tag{2}$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная относительно $n_i, p_i, q_i, Q_i, \beta_i, \beta_i^*$,

$$\varepsilon_m(\psi) = \sup_{k \geq m} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \quad q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}. \tag{3}$$

Доказательство. Используя рассуждения работы [Ровенская, 2011], можно показать, что

$$\delta_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x}) \stackrel{\text{df}}{=} f(\bar{x}) - V_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x}) = \\ = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\bar{x} + t_i \bar{e}_i) \prod_{k=n_i - p_i + 1}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n_i)}) \psi_i(k_i) \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt_i + \\ + \sum_{r=2}^m (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r) \subset m} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f^{\bar{\Psi}_\mu} \left(\bar{x} + \sum_{j \in \mu(r)} t_j \bar{e}_j \right) \prod_{j \in \mu(r)} \prod_{v_j=n_j - p_j + 1}^{\infty} (1 - \lambda_{v_j}^{(n_j)}) \Psi_{v_j}(v_j) \cos\left(v_j t_j + \frac{\beta_j^* \pi}{2}\right) dt_j.$$

Далее понадобится следующее утверждение (см., например, [Рукасов, 2003]).

Лемма. Пусть $\psi \in D_q$, $q \in (0; 1)$ и

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq m, \\ \frac{n-k}{n-m}, & m+1 \leq k \leq n-1, \\ 0, & n \leq k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда для любой последовательности чисел γ_k , $k = 1, 2, \dots$, при любых натуральных n , $m < n$, справедливо равенство

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) \psi(k) \cos(kt - \gamma_k) = \psi(m+1) \times \\ \times [q^{-(m+1)} \sum_{k=m+1}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) q^k \cos(kt - \gamma_k) + r_m(t, \psi)],$$

в котором

$$r_m(t, \psi) = (1 - \lambda_{m+1}^{(n)}) \sum_{i=2}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{(1 - \lambda_{m+l+1}^{(n)}) \psi(m+l+1)}{(1 - \lambda_{m+l}^{(n)}) \psi(m+l)} - \frac{1 - \lambda_{m+i}^{(n)}}{1 - \lambda_{m+1}^{(n)}} q^{i-1} \right) \cos((m+i)t - \gamma_{m+i}),$$

причем, начиная с некоторого m_0 ,

$$|r_m(t, \psi)| \leq \frac{3\varepsilon_m(\psi)}{(1 - q - \varepsilon_m(\psi))^2 (1 - q)^2},$$

где $\varepsilon_m(\psi)$ определено (3).

Используя утверждение леммы, имеем

$$\delta_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\bar{x} + t_i \bar{e}_i) [\psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{-(n_i - p_i + 1)} \times \\ \times \sum_{k=n_i - p_i + 1}^{\infty} (1 - \lambda_{k_i}^{(n_i)}) q_i^{k_i} \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) + \psi_i(n_i - p_i + 1) r_{n_i - p_i + 1}(t_i, \psi_i)] dt_i + \\ + \sum_{r=2}^m (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f^{\bar{\psi}^{\mu}}(\bar{x} + \sum_{j \in \mu(r)} t_j \bar{e}_j) \prod_{j \in \mu(r)} [\Psi_j(n_j - p_j + 1) Q_j^{-(n_j - p_j + 1)} \times \\ \times \sum_{v_j=n_j - p_j + 1}^{\infty} (1 - \lambda_{v_j}^{(n_j)}) Q_j^{v_j} \cos\left(v_j t_j + \frac{\beta_j^* \pi}{2}\right) + \Psi_j(n_j - p_j + 1) r_{n_j - p_j + 1}(t_j, \Psi_j)] dt_j =$$

Используя равенство

$$\prod_{j \in \mu(r)} (a_j + b_j) = \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu \setminus \xi} a_s \prod_{j \in \xi} b_j,$$

имеем

$$\delta_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x}) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{-(n_i - p_i + 1)} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\bar{x} + t_i \bar{e}_i) \sum_{k=n_i - p_i + 1}^{\infty} (1 - \lambda_{k_i}^{(n_i)}) \times \\ \times q_i^{k_i} \cos\left(k_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt_i + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \psi_i(n_i - p_i + 1) \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\bar{x} + t_i \bar{e}_i) r_{n_i - p_i + 1}(t_i, \psi_i) dt_i +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=2}^m (-1)^{r+1} \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \frac{1}{\pi^r} \int_{T^r} f^{\bar{\Psi}^\mu}(\bar{x} + \sum_{j \in \mu(r)} t_j \bar{e}_j) \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu \setminus \xi} \Psi_s(n_s - p_s + 1) Q_s^{-(n_s - p_s + 1)} \times \\
 & \times \sum_{v_s = n_s - p_s + 1}^{\infty} (1 - \lambda_{v_s}^{(n_s)}) Q_s^{v_s} \cos\left(v_s t_s + \frac{\beta_s^* \pi}{2}\right) dt_s \prod_{j \in \xi} \Psi_j(n_j - p_j + 1) r_{n_j - p_j}(t_j, \Psi_j) dt_j.
 \end{aligned}$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=n-p+1}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} q^m \cos\left(mt + \frac{\beta\pi}{2}\right) = \\
 & = \frac{q^{n-p+1}}{p(1-2q \cos t + q^2)} \cos\left((n-p+1)t + \frac{\beta\pi}{2} + 2 \frac{q \sin t}{1-q \cos t}\right) - \\
 & - \frac{q^{n+1}}{p(1-2q \cos t + q^2)} \cos\left((n+1)t + \frac{\beta\pi}{2} + 2 \frac{q \sin t}{1-q \cos t}\right).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \delta_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{x}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{q_i^{n_i - p_i + 1} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\Psi}_i}(\bar{x} + t_i \bar{e}_i) b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i) dt_i + \\
 & + O(1) \left[\sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{p_i}}{p_i (1 - q_i)^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) \varepsilon_{n_i - p_i}(\Psi_i)}{(1 - q_i)^4} + \right. \\
 & \left. + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s - p_s + 1)}{p_s (1 - Q_s)^2} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j - p_j}(\Psi_j)}{(1 - Q_j)^2} \right], \tag{4}
 \end{aligned}$$

где

$$b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i) = \sum_{k=n_i - p_i}^{n_i - 1} \sum_{m_i = k_i + 1}^{\infty} q_i^{m_i} \cos\left(m_i t_i + \frac{\beta_i \pi}{2}\right).$$

Так как $f(\bar{x}) \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}$, то

$$\begin{aligned}
 E(C_{\beta, \infty}^{m\psi}; V_{\bar{n}, \bar{p}}) &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{q_i^{n_i - p_i + 1} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i)| dt_i + \\
 & + O(1) \left[\sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{p_i}}{p_i (1 - q_i)^2} + \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) \varepsilon_{n_i - p_i}(\Psi_i)}{(1 - q_i)^4} + \right. \\
 & \left. + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s - p_s + 1)}{p_s (1 - Q_s)^2} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j - p_j}(\Psi_j)}{(1 - Q_j)^2} \right]. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Найдем функцию $f_0(\bar{x}) \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}$, для которой справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 \delta_{\bar{n}, \bar{p}}(f_0; \bar{0}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{q_i^{n_i - p_i + 1} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i)| dt_i + \\
 & + O(1) \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{p_i (1 - q_i)^3 (n_i - p_i + 1)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{p_i}}{p_i (1 - q_i)^2} + \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) \varepsilon_{n_i - p_i}(\Psi_i)}{(1 - q_i)^4} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s - p_s + 1)}{p_s(1 - Q_s)^2} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j - p_j}(\Psi_j)}{(1 - Q_j)^2} \Big]. \quad (6)$$

На основании соотношения (4) для любой $f \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}$ можем записать

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{n}, \bar{p}}(f; \bar{0}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{q_i^{n_i - p_i + 1} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\Psi}_i}(\bar{0} + t_i \bar{e}_i) b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i) dt_i + \\ &+ O(1) \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{p_i}}{p_i(1 - q_i)^2} + \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) \varepsilon_{n_i - p_i}(\Psi_i)}{(1 - q_i)^4} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s - p_s + 1)}{p_s(1 - Q_s)^2} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j - p_j}(\Psi_j)}{(1 - Q_j)^2} \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Из рассуждений работы [Рукасов, Новиков, 1998] следует, что функции $\text{sign} b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, можно переопределить каждую на своем множестве, мера которого не превышает $K(n_i - p_i + 1)^{-1}(1 - q_i)^{-1}$, где K – некоторое фиксированное число, так, чтобы полученные функции $y_i(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяли условиям $|y_i(t)| \leq 1$, $\int_{-\pi}^{\pi} y_i(t) dt = 0$.

Далее построим функции $\varphi_i(\bar{t}) = y_i(t_i)$, $\bar{t} \in T^m$, и функции $f_i(\bar{x})$ такие, что $(f_i)^{\bar{\Psi}_i} = \varphi_i(\bar{x})$. Можно показать (см., например, [Рукасов и др., 2008]), что функция $f_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m f_i(\bar{x})$ удовлетворяет условию $(f_0)^{\bar{\Psi}_i}(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Поэтому $f_0(\bar{x}) \in C_{\beta, \infty}^{m\psi}$ и имеет место следующее соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_0)^{\bar{\Psi}_i}(\bar{0} + t_i \bar{e}_i) b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i) dt_i = \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i)| dt_i + O(1) \frac{q_i^{n_i - p_i + 1}}{(n_i - p_i + 1)(1 - q_i)^3}.$$

На основании соотношения (7) можем сделать вывод о том, что для найденной функции $f_0(\bar{x})$ справедливо соотношение (6).

Сопоставляя (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} E(C_{\beta, \infty}^{m\psi}; V_{\bar{n}, \bar{p}}) &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{q_i^{n_i - p_i + 1} p_i} \int_{-\pi}^{\pi} |b_{n_i - p_i}^{\beta_i}(t_i)| dt_i + \\ &+ O(1) \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1)}{p_i(1 - q_i)^3(n_i - p_i + 1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) q_i^{p_i}}{p_i(1 - q_i)^2} + \frac{\Psi_i(n_i - p_i + 1) \varepsilon_{n_i - p_i}(\Psi_i)}{(1 - q_i)^4} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{r=2}^m \sum_{\mu(r) \subset \bar{m}} \sum_{\xi \subset \mu(r)} \prod_{s \in \mu} \frac{\Psi_s(n_s - p_s + 1)}{p_s(1 - Q_s)^2} \prod_{j \in \xi} \frac{\varepsilon_{n_j - p_j}(\Psi_j)}{(1 - Q_j)^2} \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |b_{n-p}^{\beta}(t)| dt = 4 \frac{q^{n-p+1}}{1 - q^2} + O(1) \frac{q^{n-p}}{n-p}.$$

Объединяя два последних равенства, получаем асимптотическую формулу (2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выполнении условий

$$q_i = Q_i, \lim_{n_i \rightarrow \infty} p_i = \infty, \lim_{\substack{n_i - p_i \rightarrow \infty \\ n_i \rightarrow \infty}} p_i \varepsilon_{n_i - p_i} < \infty, i = 1, 2, \dots, m,$$

соотношение (2) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

Список литературы

- Новиков О. А., Ровенская О. Г.* Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными методами // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. – Т. 3, № 1. – С. 161–171.
- Ровенская О. Г.* Интегральные представления уклонений прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах $C^{m\bar{w}}$ // Научный вестник Черновицкого нац. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 1, № 3. – С. 99–104.
- Рукасов В. И., Ровенская О. Г., Новиков О. А., Бодрая, В. И.* Приближение периодических функций многих переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена // Вестник Одесского нац. ун-та. Матем. и мех. – 2008. – Т. 13, вып. 18. – С. 87–96.
- Рукасов В. И.* Приближения суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 806–816.
- Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Ряды Фурье: теория и приложения. – 1998. – Т. 20. – С. 228–241.
- Рукасов В. И., Новиков О. А., Ровенская О. Г.* Приближение периодических функций двух переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена // Теория приближения функций и смежные вопросы. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 286–296.
- Степанец А. И.* Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, № 5. – С. 599–609.
- Степанец А. И., Пачулия Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 4. – С. 545–555.
- Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 3. – С. 375–395.