

УДК: 517.957

О возбуждении солитонов при взаимодействии кинков уравнения синус-Гордона с притягивающей примесью

Е. Г. Екомасов^а, А. М. Гумеров^б, Р. Р. Муртазин^с

Башкирский государственный университет,
Россия, 450074, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32

E-mail: ^а EkomasovEG@gmail.com, ^б Bgu@bk.ru, ^с MurtazinRR@mail.ru

Получено 28 мая 2012 г.,
после доработки 8 июля 2012 г.

Исследованы аналитически и численно структура и свойства локализованных двух- и трех-кинковых решений уравнения синус-Гордона, возбуждаемых в области притягивающей примеси. Рассмотрены случаи одиночной и двойной пространственно протяженной примеси.

Ключевые слова: кинк, бризер, уравнение синус-Гордона, примесь, тритон

Excitement of solitons in the interaction of kinks of sine-Gordon equation with attracting impurity

E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. R. Murtazin

Bashkir State University, 32 Z. Validi str., Ufa, 450074, Russia

Abstract. — We investigate analytically and numerically the structure and properties of localized two- and three-kink solutions of the sine-Gordon equation, which are excited in the region of the attracting impurity. We have considered cases of single and double spatially extended impurity.

Keywords: kink, breather, sine-Gordon equation, impurity, triton

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 509–520 (Russian).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00594-а).

Введение

В последние годы динамика солитонов привлекает все большее внимание исследователей [Scott, 2004]. Это связано и с тем, что, хотя первоначально солитоны возникли при изучении интегрируемых систем, очень скоро они стали применяться и для неинтегрируемых систем, описывающих много физических приложений. Например, уравнение синус-Гордона (УСГ) возникает при моделировании волновых процессов в геологических средах [Быков, 2000], в молекулярной биологии [Якушевич, 2007; Шаповалов, Краснобаева, 2009] и моделях теории поля [Тахтаджан, Фаддеев, 1974]. Солитоны УСГ в физике твердого тела описывают доменные границы в магнетиках, дислокации в кристаллах, флюксоны в джозефсоновских контактах и переходах и тому подобное [Браун, Кившарь, 2008; Шамсутдинов и др., 2009]. Во многих случаях поведение солитонов можно описать в модели точечной частицы, тогда их временная эволюция будет подчиняться простым дифференциальным уравнениям [Косевич, Ковалёв, 1989]. Однако часто учет влияния возмущений приводит к существенному изменению структуры солитонов, которые уже нужно описывать как деформируемые частицы [Браун, Кившарь, 2008]. При этом возможно возбуждение внутренних степеней свободы солитонов, которые могут играть определяющую роль в физических процессах. Внутренние моды включают в себя трансляционную и, связанную с долгоживущими осцилляциями ширины солитона, пульсационную моды [Quintero et al., 2000; Willis, 2006]. Большой интерес исследователей привлекает вопрос влияния различного вида возмущений на возбуждение внутренних мод солитонов УСГ. Так как УСГ описывает многие явления в различных областях физики, ясно, что задача о решении данного уравнения в присутствии локальных неоднородностей возникает вполне естественно [Браун, Кившарь, 2008]. Например, много работ посвящено изучению влияния зависящей от координат и времени внешней силы, описываемой функциями дельтаобразного, ступенчатого, гиперболического и гармонического видов [Fogel et al., 1976; González et al., 2002; Краснобаева, Шаповалов, 2009; Kivshar et al., 1991b]. Если исследование влияния малых возмущений на решения УСГ можно проводить с помощью хорошо разработанной теории возмущений для солитонов [Fogel et al., 1977; Косевич, Ковалёв, 1989; Браун, Кившарь, 2008; Шамсутдинов и др., 2009], то влияние больших возмущений в общем случае можно проводить только с помощью численных методов [Currie et al., 1977; Zhang et al., 1992; Piette, Zakrzewski, 2009].

Не менее интересен и случай наличия пространственной модуляции (неоднородности) периодического потенциала (или наличие примеси в системе) [Браун, Кившарь, 2008]. В зависимости от геометрии задачи могут быть адекватны физическому смыслу как одномерные, так и многомерные уравнения. Проблема взаимодействия кинков УСГ с примесями для одномерного случая обсуждается в литературе достаточно давно [Fogel et al., 1977; Currie et al., 1977; Paul, 1979; Kivshar et al., 1991a]. Например, модель классической частицы для взаимодействия кинка с примесью применима в случае, когда примесь не допускает существования примесной моды — локализованного колебательного состояния на примеси. Важность примесных мод при взаимодействии кинка с примесями показана в работах [Kivshar et al., 1991b; Zhang et al., 1992; Javidan, 2008; Белова, Кудрявцев, 1997; Piette, Zakrzewski, 2007; Екомасов и др., 2008; Екомасов, Гумеров, 2012]. Исследуется взаимодействие кинка с примесью и для двумерного случая [Bratsos, 2007; Gornostyrev et al., 2005; Екомасов и др., 2009]. Большое внимание исследователей привлекают и мультисолитонные решения УСГ [Белова, Кудрявцев, 1997; Kalberman, 2004].

В настоящей работе исследуется вопрос о взаимодействии кинков одномерной модели синус-Гордона с пространственно протяженной примесью специального вида с учетом возможности возбуждения высокоамплитудных нелинейных локализованных волн мультисолитонного типа.

Случай одиночной локализованной примеси

Рассмотрим модифицированное уравнения синус-Гордона (МУСГ):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{K(x)}{2} \sin 2\theta = 0, \quad (1)$$

где $K(x)$ — функция, характеризующая неоднородность периодического потенциала. В случае $K(x) = 1$ уравнение (1) переходит в известное уравнение синус-Гордона и имеет решение в виде топологического солитона (или кинка):

$$\theta(x, t) = 2 \arctan(\exp[\Delta(\vartheta_0)(x - \vartheta_0 t)]), \quad (2)$$

где $\Delta(\vartheta) = (1 - \vartheta^2)^{-1/2}$, ϑ_0 — непрерывный параметр ($0 < \vartheta_0 < 1$), определяющий скорость движения кинка. Есть также пространственно локализованное решение уравнения (1) — покоящийся бризер:

$$\theta_{breather}(x, t, \omega) = 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \omega^2} \sin \omega t}{\omega \cosh(\sqrt{1 - \omega^2}(x - x_0))}\right), \quad (3)$$

где ω — частота колебаний бризера, x_0 — координата его центра.

В настоящее время аналитическими и численными методами подробно изучена динамика солитонов УСГ для случая «точечной примеси»: $K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, ε_0 — константа ($0 < \varepsilon_0 < 1$) [Косевич, Ковалёв, 1989; Браун, Кившарь, 2008]. Показано, что в случае приближения «недеформируемого кинка» примесь действует как потенциал. Причем при соответствующем знаке константы ε ($\varepsilon > 0$) она действует на кинк как притягивающий потенциал, поэтому солитоны УСГ могут быть локализованы и излучать [Kivshar, Malomed, 1988; Браун, Кившарь, 2008]. Для случая приближения «деформируемого кинка», в дополнение к колебательному движению кинка на потенциале, создаваемом примесью, возникают эффекты деформации кинка (например, сильное изменение его формы), имеющие резонансный характер [Браун, Кившарь, 2008]. Учитывалась и возможность возбуждения примесной моды при рассеянии кинка, приводящая к существенному изменению результатов динамики кинка [Kivshar et al., 1991b; Zhang et al., 1992; Белова, Кудрявцев, 1997]. Отметим здесь такой интересный эффект, как отражение кинка притягивающей примесью из-за резонансного обмена энергией между трансляционной модой кинка и примесной модой. Рассматривались также случай многих «точечных примесей» дельтообразного вида, представляющих интерес для некоторых физических приложений [Gulevich, Kusmartsev, 2006; Крючков, Капля, 2003], и даже случай пространственной модуляции периодического потенциала гармонического вида [González et al., 2007]. Также аналитическими и численными методами [Currie et al., 1977; Fogel et al., 1977] исследована динамика кинков УСГ $K(x)$ ступенчатого вида. Для случая пространственно протяженной примеси, например, вида

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < x_1, x > x_1 + W, \\ 1 - \Delta K, & x_1 \leq x \leq x_1 + W, \end{cases} \quad (4)$$

где W — ширина области неоднородности периодического потенциала, левая граница которой находится в точке x_1 , также исследовалось взаимодействие кинка с примесью как для недеформируемой, так и деформируемой моделей кинка [Paul, 1979; Ekomasov, Shabalin, 2006; Piette, Zakrzewski, 2007; Екомасов, Гумеров, 2012]. В первом случае найдена зависимость скорости и структуры кинка, солитона и бризера от времени, минимальная скорость, необходимая кинку для преодоления потенциальной ямы [Paul, 1979; Ekomasov, Shabalin, 2006]. Учет влияния

возбуждаемой на примеси нелинейной волны на динамику кинков УСГ проведен численными методами в [Екомасов, Гумеров, 2012]. В работах [Zhang et al., 1992; Piette, Zakrzewski, 2007], как и для точечной примеси, численно и аналитически показана возможность резонансного взаимодействия кинка с возбуждаемой примесной модой, причем задача решена без точного анализа изменения структуры кинка при взаимодействии с примесью. Анализ структуры и свойств, возбуждаемых на примеси локализованных нелинейных волн, проведен численно в [Екомасов и др., 2008]. Динамика кинков для случая двух одинаковых примесей рассмотрена в [Екомасов и др., 2010], и показана возможность еще одного интересного эффекта — так называемого «квазитуннелирования», при котором кинку для прохождения через область двойной примеси требуется минимальная кинетическая энергия, меньшая, чем для прохождения одиночной примеси тех же размеров. Рассмотрены в рамках модели синус-Гордона также случаи изотопической примеси [Zhang et al., 1992] и нетривиальной метрики времени [Javidan, 2008; Kalbermann, 2001]. Однако пока не рассмотрен вопрос о возбуждении мультисолитонов УСГ при наличии протяженных примесей вида (4).

Рассмотрим вначале место дискретной примесной моды в спектре возбуждений задачи (1). Учтем, что для рассматриваемого одномерного случая уравнения (2) при $K(x) = 1$ имеются еще и вакуумные решения, например $\theta_{\pm}(x, t) = 0$. Будем искать спектр малых возбуждений вокруг него:

$$\theta(x, t) = \theta_{\pm} + \delta\theta, \quad \delta\theta = \psi e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

где $|\delta\theta| \ll 1$, $\psi = \psi(x)$. Подставляя (5) в (1) и линеаризуя уравнение по $\delta\theta$, получим уравнение Шрёдингера:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + (\omega^2 - K(x))\psi = 0, \quad (6)$$

где ω — частота колебаний примесной моды. Будем дальше искать локализованные решения уравнения Шрёдингера (6). Для удобства введем следующие обозначения:

$$\chi = 1 - \omega^2, \quad k^2 = \omega^2 - (1 - \Delta K). \quad (7)$$

Для случая $K(x)$, определяемого выражением (4), возможны либо четные, либо нечетные решения уравнения (6) [Ландау, Лифшиц, 2004]:

$$\Psi_+ = \begin{cases} A_1^+ e^{\chi x}, & x < -0,5W, \\ B_2^+ \cos kx, & -0,5W \leq x \leq 0,5W, \\ B_3^+ e^{\chi x}, & x > 0,5W, \end{cases} \quad (8a)$$

$$\Psi_- = \begin{cases} A_1^- e^{\chi x}, & x < -0,5W, \\ B_2^- \cos kx, & -0,5W \leq x \leq 0,5W, \\ B_3^- e^{\chi x}, & x > 0,5W. \end{cases} \quad (8b)$$

Из условия гладкости и непрерывности рассматриваемого решения в точке $x = W/2$ для четных (8a) и нечетных (8b) решений получим соответственно дисперсионные соотношения:

$$\tan \frac{kW}{2} = \frac{\chi}{k}, \quad (9a)$$

$$\tan \frac{kW}{2} = -\frac{k}{\chi}. \quad (9b)$$

Так как в рассматриваемом случае величины ΔK и W являются постоянными, уравнения (9a) и (9b) дают возможность определить все значения частот ω , возбуждаемых в образованной примесью потенциальной яме данных размеров. Состояния с четными и нечетными волновыми функциями чередуются, а первое нечетное решение, соответствующее второму локализованному состоянию, появляется при выполнении соотношения $\pi^2 = W\Delta K$.

Исследуем дальше для случая $\Delta K \geq 0$ численными методами высокоамплитудные локализованные примесные моды, возбуждаемые после взаимодействия кинка с примесью. Используем метод итераций для явной схемы [Бахвалов и др., 1987]. Построенный алгоритм численного решения уравнения (1) работает следующим образом. В начальный момент времени имеем движущийся по инерции со стационарной скоростью кинк УСГ вида (2). Граничные условия имеют вид $\theta(-\infty, t) = 0$, $\theta(+\infty, t) = \pi$, $\theta'(\pm\infty, t) = 0$. Используя сетку по координате из 10^4 узлов, используя в качестве итерационного параметра время и соблюдая условие сходимости явной схемы, вычислили состояние кинка в следующий момент времени. Из найденной функции $\theta(x, t)$ получили основные характеристики нелинейной волны.

Численный эксперимент показал (рис. 1), что после прохождения кинка в области примеси остается нелинейная волна, описываемая осциллирующей функцией $\theta(x, t)$ колоколообразного вида. Сравнение значений функции со значениями, полученными по формуле, описывающей с учетом затухания покоящийся бризер:

$$\theta^*(x, t) = A \exp(-\alpha(t - t_0))\theta_{breather}(x, t, \omega), \quad (10)$$

где $A = 0,4$, $\omega = 0,616$, $\alpha = 0,01$, позволяет в дальнейшем считать возбуждаемую, в данном случае локализованную, волну покоящимся бризером. Амплитуда возбуждаемого бризера зависит от

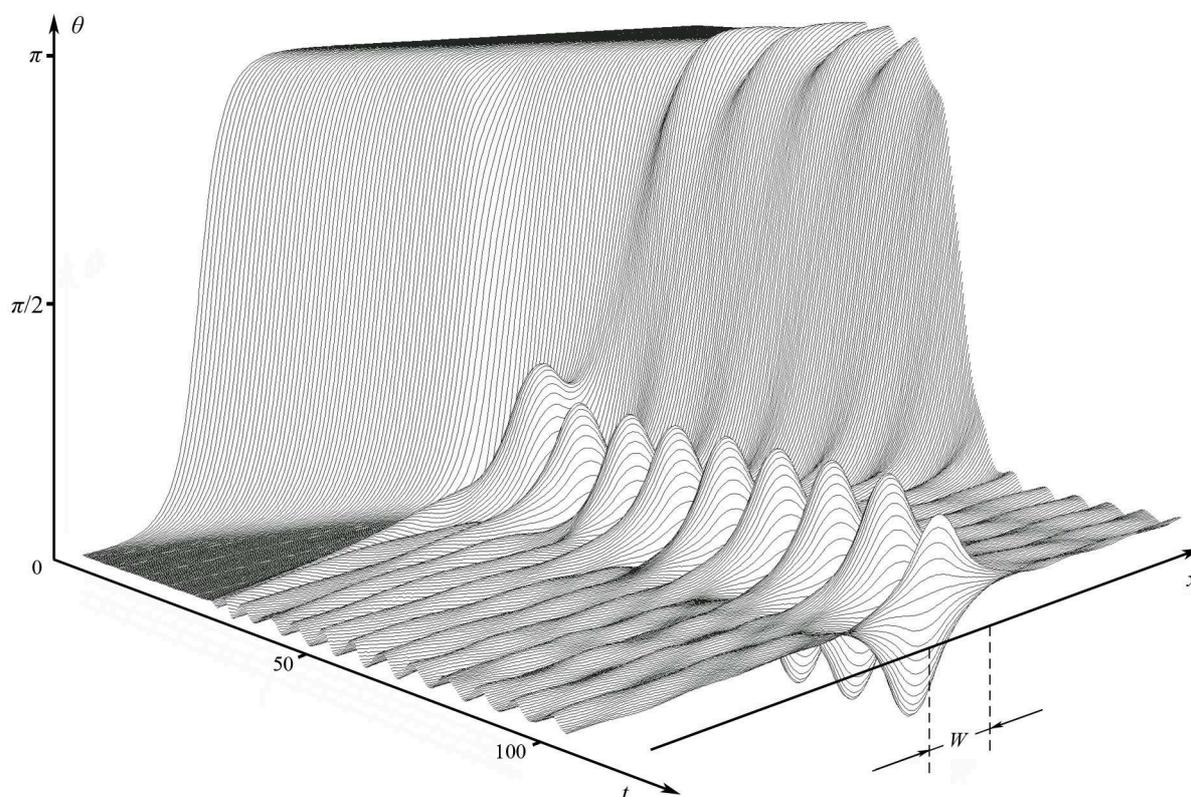


Рис. 1. Зарождение и эволюция нелинейной волны типа покоящегося бризера, локализованного в области примеси (ограниченной штрихованными линиями) для случая $\Delta K = 1,2$, $W = 2$, $\vartheta_0 = 0,6$

скорости кинка (рис. 2), причем имеет максимум, значение которого зависит от параметров ΔK и W . Амплитуда бризера, как и следовало ожидать, стремится к нулю при $\Delta K \rightarrow 0$ и $W \rightarrow 0$. Частота колебаний бризера $\omega_{breather}$ практически не зависит от скорости кинка, а ее зависимость от параметра ΔK приведена на рис. 3. Видно, что $\omega_{breather}$ при $\Delta K \rightarrow 0$ стремится к единице, тогда как возбуждаемые при взаимодействии с примесью частоты трансляционной и пульсационной мод колебаний кинка стремятся к нулю [Екомасов, Shabalin, 2006]. Данное поведение становится понятным, если вспомнить, что энергия решения типа бризера $E \sim (1 - \omega_{breather}^2)^{1/2}$, откуда следует, что с уменьшением размера примеси энергия (как и амплитуда) полученного нами бризера стремится к нулю. Также видно, что рассмотренное выше линейное приближение для первого четного решения хорошо описывает возбуждаемые бризеры в области малых параметров, так как частоты, рассчитанные по аналитической формуле (9а) (см. рис. 3), совпадают с частотами, полученными численно из решения исходного нелинейного уравнения (1).

Для возбуждения первой нечетной примесной моды необходимо рассмотреть уже другой случай — пиннинг кинка в области примеси. Отметим, что в этом случае возможно возбуждение как пульсационной, так и трансляционной мод кинка. Учтем, что для случая, когда частота пульсационной моды кинка $\omega_{pulse} < 1$, с течением времени возникает состояние, достаточно хорошо описываемое решением типа кинк. Поэтому в нашем случае особый интерес представляет область параметров ΔK и W (см. рис. 4), для которой характерно $\omega_{pulse} \rightarrow 1$, когда возбуждаемая нелинейная волна (рис. 5) уже начинает существенно отличаться от решения типа кинк. Моменты времени $t_1 = 1179,37$, $t_2 = 1180,87$, $t_3 = 1182,37$ (лежащие в пределах времени полупериода колебаний ширины кинка Δ_{kink}) выбраны так, чтобы центр кинка практически покоится. Для этого амплитуда трансляционной моды колебаний кинка должна быть близка к нулю (в нашем случае это величина менее 0,1). Ширина кинка осциллирует с частотой $\omega_{pulse} = 0,997$. Алгебраическая разность полученной численно нелинейной волны и решения типа кинк имеют вид (см. рис. 6), кардинально отличающийся от представленного на рис. 1 и аналогичный виду, характерному для первого нечетного решения уравнения Шрёдингера.

Ранее было показано [Балбашов и др., 1988], что при дальнейшем увеличении величин ΔK и W при некотором критическом значении параметров

$$W(1 - \Delta K) = 2 \quad (11)$$

в области дефекта может существовать устойчивый статический солитон, амплитуда которого допускает оценку

$$\cos A_{\max} = G/W(1 - \Delta K), \quad (12)$$

где $G = 2$. Результаты численных расчетов показывают, что, начиная с некоторых значений ΔK и W после прохода кинка, в области примеси зарождается солитон. Зависимость амплитуды солитона от параметров ΔK и W можно приближенно описать формулой (12) с константой $G = 1,8$. На рис. 7 приведены области значений параметров примеси, определяющих возможность существования бризера и солитона, и для сравнения приведена кривая, полученная с помощью уравнения (11).

Случай двойной локализованной примеси

УСГ допускает также и многосолитонные решения; например, в [Ferreira et al., 2008; Kalberman, 2004] описано интересное трехкинковое решение типа «воббл»:

$$f_{wobble}(x, t) = \frac{4}{\beta} \arctan \frac{\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \sin m\omega t + \frac{1}{2} e^{\varepsilon m(x-x_0)} \left(e^{-m\sqrt{1-\omega^2}(x-x_0)} + \rho^2 e^{m\sqrt{1-\omega^2}(x-x_0)} \right)}{\cosh \left(m\sqrt{1-\omega^2}(x-x_0) \right) + \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \rho e^{\varepsilon m(x-x_0)} \sin m\omega t}, \quad (13)$$

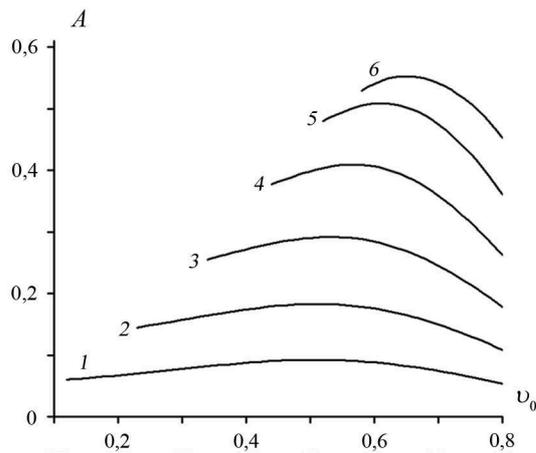


Рис. 2. Зависимость значения амплитуды бризера в центре примеси A от скорости кинка v_0 при $W = 1$ для случаев: 1 — $\Delta K = 0,5$, 2 — $\Delta K = 0,75$, 3 — $\Delta K = 1$, 4 — $\Delta K = 1,25$, 5 — $\Delta K = 1,5$, 6 — $\Delta K = 1,75$

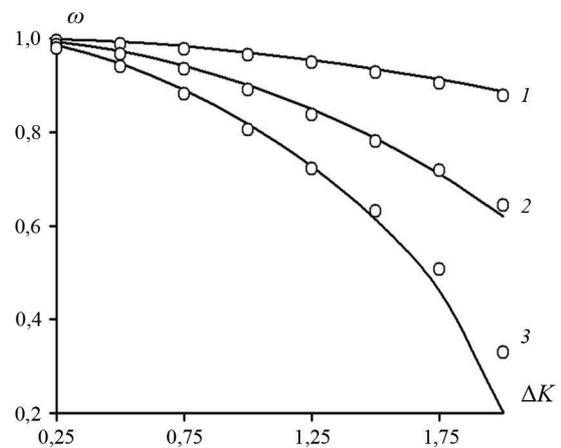


Рис. 3. Зависимость частоты колебаний бризера от параметра ΔK для случаев: 1 — $W = 0,5$, 2 — $W = 1$, 3 — $W = 1,5$. Сплошная линия соответствует частоте, рассчитанной по формуле (9а), точечная линия — численно из уравнения (1)

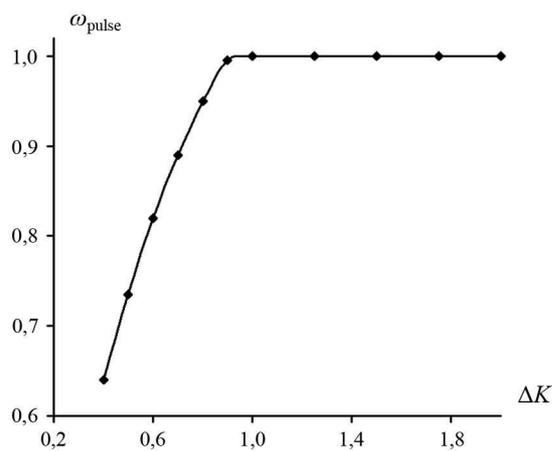


Рис. 4. Зависимость ω_{pulse} от значения параметра ΔK для случая $W = 1$

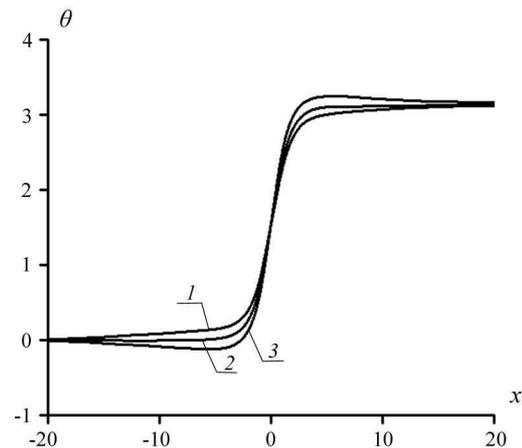


Рис. 5. Профиль кинка $\theta(x)$ в различные моменты времени: 1 — $t_1 = 1179,37$, 2 — $t_2 = 1180,87$, 3 — $t_3 = 1182,37$ для случая дефекта вида (3) при $W = 1$, $\Delta K = 1,2$, $x_0 = -0,5$, $v_0 = 0,2$

где

$$\rho = \frac{1 - \varepsilon \sqrt{1 - \omega^2}}{1 + \varepsilon \sqrt{1 - \omega^2}}, \quad -1 < \omega < 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (14)$$

x_0 — координата «центра» решения (однако, в отличие от кинка (2), этот параметр не совпадает с геометрическим центром кинка), ω — частота осцилляции воббля. Стоит отметить, что параметры β , m , ε позволяют принципиально изменять общий вид решения. Поскольку мы далее не ставим своей целью провести полный анализ подобного решения, для определенности положим их равными $\beta = 2$, $m = 1$, $\varepsilon = 1$ и исключим из дальнейшего рассмотрения. Предельный переход

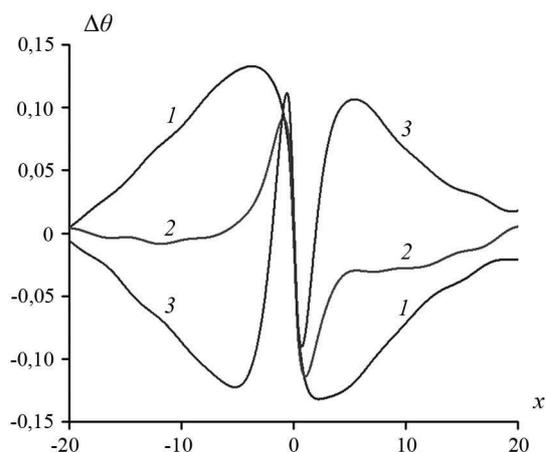


Рис. 6. Профиль алгебраической разности решений типа «кинк» и «тритон» $\Delta\theta(x)$ в различные моменты времени: 1 – $t_1 = 1179,37$, 2 – $t_2 = 1180,87$, 3 – $t_3 = 1182,37$ для случая дефекта вида (3) при $W = 1$, $\Delta K = 1,2$, $x_0 = -0,5$, $\vartheta_0 = 0,2$

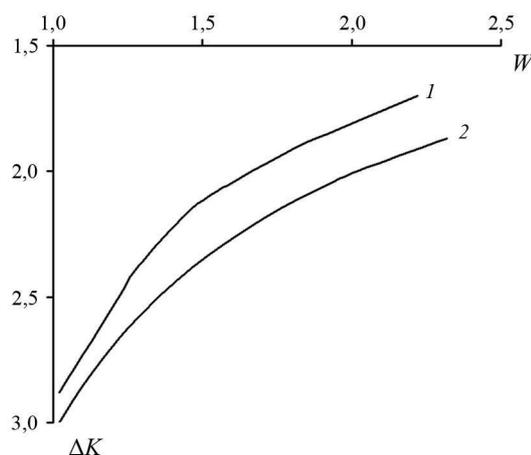


Рис. 7. Область параметров, определяющих существование бризера (выше линий 1 и 2), солитона (ниже линий 1 и 2). Линия 1 – численное решение, линия 2 – выражение из формулы (11)

из мультисолитонного состояния (13) в односолитонное (2) возможен в случае $\omega \rightarrow 1$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} f_{wobble}(x, t) = \frac{4 \arctan e^{\epsilon m x}}{\beta}. \quad (15)$$

Решение (13) имеет энергию, большую, чем решение типа кинк:

$$E_{wobble} = \frac{8m}{\beta^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}}. \quad (16)$$

Поэтому встает вопрос: при каких условиях можно возбудить (и наблюдать в реальных физических процессах) подобное, более энергетически невыгодное, решение УСГ по сравнению с кинком (2) и бризером (3)? Заметим, что наличие двух областей, содержащих примеси, дает простую возможность зарождения решений УСГ мультисолитонного типа (например, типа воббл). Рассмотрим теперь $K(x)$ вида

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < x_1, x_1 + W < x < x_1 + W + d, x > x_1 + 2W + d, \\ 1 - \Delta K, & x_1 \leq x \leq x_1 + W, x_1 + W + d \leq x \leq x_1 + 2W + d, \end{cases} \quad (17)$$

где d – расстояние между локализованными примесями. Будем считать далее, для определенности, $W = 1$, $\Delta K = 1,2$, $x_1 = -7$, при этом расстояние между дефектами d может варьироваться в пределах от 0 до 10. Во всех случаях, рассмотренных далее, начальная скорость кинка подбирается так, чтобы кинк был захвачен в области второй примеси [Екомасов и др., 2010]. Отметим также некоторые трудности, которые появляются при численном исследовании рассматриваемой задачи. Поскольку взаимодействие возбуждаемых солитонов может приводить к появлению режимов колебаний, характеризующихся «перекачкой» энергии от кинка к бризеру и наоборот (подобно режиму биений для случая гармонических осцилляторов), то частота колебаний может меняться с течением времени. Поэтому дальше речь всегда будет идти об изохронных случаях колебаний и стационарных частотах, которые устанавливаются с течением времени. При рассматриваемых условиях также можем считать, что на примеси имеется локализованный кинк.

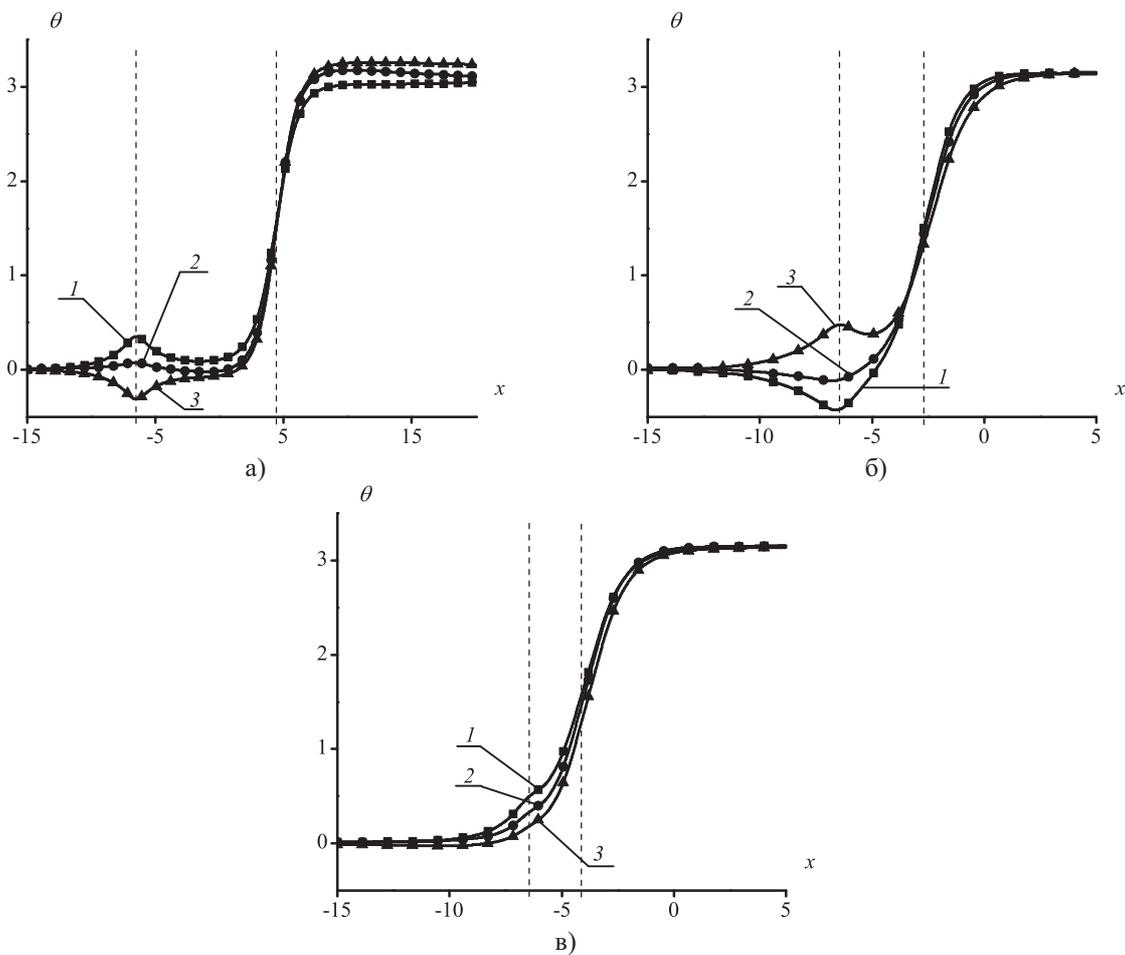


Рис. 8. Профиль мультисолитона $\theta(x)$ в различные моменты времени: а) при $W = 1$, $\Delta K = 1,2$, $d = 10$ в моменты времени $t_1 = 1308,41$, $t_2 = 1309,91$, $t_3 = 1311,45$, б) при $W = 1$, $\Delta K = 1,2$, $d = 3$ в моменты времени $t_1 = 784,748$, $t_2 = 786,249$, $t_3 = 787,749$, в) при $W = 1$, $\Delta K = 1,2$, $d = 1,6$ в моменты времени $t_1 = 1549,99$, $t_2 = 1551,49$, $t_3 = 1554,49$. Пунктирными линиями обозначены центры областей первой и второй примесей

Рассмотрим вначале случай, когда параметр d — большой. Из рис. 8а видно, что при $d = 10$ кинк захватывается в области второй примеси, при этом у него возбуждаются трансляционная и пульсационная моды колебаний, а в области первой примеси возбуждается бризер. Характерные частоты имеют величины $\omega_{trans} = 0,429$, $\omega_{pulse} = 0,875$, $\omega_{breather} = 0,92$ (рис. 9). Если сравнить значения пульсационной и трансляционной мод кинка и частоты осцилляций бризера с их значениями, полученными для случая одиночной ямы [Екомасов и др., 2008], то видно, что они практически совпадают. Отсюда следует, что при больших значениях параметра d взаимодействующих локализованных в областях примеси солитонов практически не наблюдается. Полученный мультисолитон, состоящий из слабодействующих кинка и бризера, можно связать с известным трехкинковым решением нелинейных дифференциальных уравнений, имеющим название «тритон» [Белова, Кудрявцев, 1997].

Рассмотрим, как будет меняться структура и свойства тритона с уменьшением параметра d . Из рис. 9 видно, что до значений $d = 5$ имеет место тритон, который состоит из практически невзаимодействующих кинка и бризера и описан выше. Начиная с $d = 4$ (рис. 8б), структура и свойства тритона качественно меняются. Теперь наблюдается сильно связанное состояние

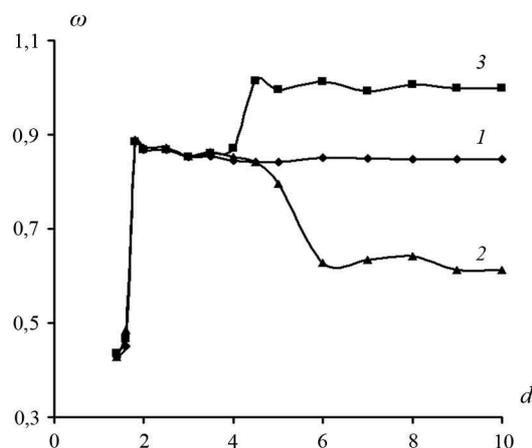


Рис. 9. Зависимость частоты бризера $\omega_{breather}$ (кривая 1), пульсационной моды кинка ω_{pulse} (кривая 2) и трансляционной моды кинка ω_{trans} (кривая 3) от параметра d при $W = 1$, $\Delta K = 1,2$

кинка и бризера, причем внутренние моды колебаний кинка (пульсационная и трансляционная) становятся равными частоте колебаний бризера (рис. 9). Полученный мультисолитон уже можно связать с особым тритонным решением УСГ (13) типа «воббл». В третьей, самой узкой, области, начиная с $d \approx 1,4 - 1,6$, возможно образование сильно связанного состояния кинка и солитона (рис. 8в), которое также является трехкинковым состоянием со значительно более низкой частотой колебаний $\omega_{pulse} \approx \omega_{trans} \approx \omega_{breather} \approx 0,46$ (рис. 9), что согласуется с результатами работы [Екомасов и др., 2008] для частот колебаний солитона, возбуждаемого на одиночной примеси. При этом, для случая тритона также характерна периодическая «перекачка» энергии между солитоном и кинком. Важным моментом является и то, что согласно рис. 7, построеному для случая одной примеси, выбранные параметры W и ΔK находятся в бризерной области. Сильное взаимодействие кинка с бризером на близком расстоянии приводит к тому, что для случая двух примесей вместо бризера возбуждается солитон. Дальнейшее уменьшение расстояния между дефектами, $d < 1,2$, приводит к невозможности точно анализировать структуру тритона используемым численным методом.

Заключение

С помощью аналитических и численных методов рассмотрена динамика кинков уравнения синус-Гордона в средах с притягивающей примесью. Для случая одиночной протяженной примеси показана возможность возбуждения кинком в этой области первых четной и нечетной мод высокоамплитудных локализованных примесных мод. Получены дисперсионные соотношения в предельном случае малых амплитуд колебаний, хорошо совпадающие с результатами численных расчетов. Найдены зависимость частот возбуждаемых бризеров от параметров примеси. Для случая двух одинаковых примесей показано наличие сильных коллективных эффектов в системе, которые можно использовать для возбуждения мультисолитонов уравнения синус-Гордона типа тритона и воббл. Определена зависимость структуры и частот возбуждаемых мультисолитонов от расстояния между примесями.

Список литературы

- Балбашов А. М., Залесский А. В., Кривенко В. Г., Сеницын Е. В. Обнаружение методом ЯМР магнитных неоднородностей в монокристалле YFeO_3 // *Письма в ЖТФ*. — 1988. — Т. 14, № 4. — С. 293–297.
- Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
- Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // *УФН*. — 1997. — Т. 167, № 4. — С. 377–406.
- Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля–Конторовой: Концепции, методы, приложения. — М.: Физматлит, 2008. — 519 с.
- Быков В. Г. Нелинейные волновые процессы в геологических средах. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 190 с.
- Екомасов Е. Г., Азаматов Ш. А., Муртазин Р. Р. Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии // *Физика металлов и металловедение*. — 2008. — Т. 105, № 4. — С. 341–349.
- Екомасов Е. Г., Азаматов Ш. А., Муртазин Р. Р. Возбуждение нелинейных уединенных изгибных волн в движущейся доменной границе // *Физика металлов и металловедение*. — 2009. — Т. 108, № 6. — С. 1–6.
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М. Нелинейная динамика доменных границ в ферромагнетиках с учетом возбуждения магнитных солитонов на дефектах // *Письма о материалах*. — 2012. — Т. 2. — С. 17–20.
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Рахматуллин И. И. Численное моделирование пиннинга и нелинейной динамики доменных границ в ферромагнетиках с дефектами // *Вестник Башкирского университета*. — 2010. — Т. 15, № 3. — С. 564–566.
- Косевич А. М., Ковалёв А. С. Введение в нелинейную физическую механику. — Киев: Наукова думка, 1989. — 304 с.
- Краснобаева Л. А., Шаповалов А. В. Движение кинка под действием переменной внешней силы в среде с диссипацией // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2009. — Т. 1, № 3. — С. 263–271.
- Крючков С. В., Капля Е. В. Солитонная линия задержки на основе полупроводниковой сверхрешетки // *Журнал технической физики*. — 2003. — Т. 73. — С. 53–56.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Физматлит, 2004. — 800 с.
- Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д. Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля // *Теоретическая и математическая физика*. — 1974. — Т. 21, № 2. — С. 160–174.
- Шамсутдинов М. А., Назаров В. Н., Ломакина И. Ю. и др. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. — М.: Наука, 2009. — 368 с.
- Шаповалов А. В., Краснобаева Л. А. Солитоны уравнения синус-Гордона. — Томск: Изд-во ТГУ, 2009. — 192 с.
- Якушевич Л. В. Нелинейная физика ДНК. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, регулярная и хаотическая динамика, 2007. — 252 с.
- Bratsos A. G. The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2007. — Vol. 206, no. 1. — P. 251–277.
- Currie J. P., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhandl J. A. Numerical simulation of sine-Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations // *Phys. Rev. B*. — 1977. — Vol. 15, no. 12. — P. 5567–5580.
- Ekomasov E. G., Shabalin M. A. Simulation the nonlinear dynamics of domain walls in weak ferromagnets // *The Physics of Metals and Metallography*. — 2006. — Vol. 101. — P. S48–S50.

- Encyclopedia of Nonlinear Science, Scott A. (ed.). — New York: Routledge, 2004. — 1104 p.
- Ferreira L. A., Piette B., Zakrzewski W. J. Wobbles and other kink-breather solutions of sine-Gordon model // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 77. — P. 036616.
- Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhandl J. A. Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 15. — P. 1578–1592.
- Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhansl J. A. Classical Particlelike Behavior of Sine-Gordon Solitons in Scattering Potentials and Applied Fields // *Phys. Rev. Lett.* — 1976. — Vol. 36. — P. 1411–1414.
- González J. A., Bellorin A., Guerrero L. E. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // *Phys. Rev. E (Rapid Communications)*. — 2002. — Vol. 65. — P. 065601.
- González J. A., Cuenda S., Sánchez A. Kink dynamics in spatially inhomogeneous media: The role of internal modes // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 75. — P. 036611.
- Gornostyrev Y. N., Katsnelson M. I., Stroeve A. Y., Trefilov A. V. Impurity-kink interaction in the two-dimensional Frenkel–Kontorova model // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71. — P. 094105.
- Gulevich D. R., Kusmartsev F. V. Perturbation theory for localized solutions of the sine-Gordon equation: Decay of a breather and pinning by a microresistor // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74. — P. 214303.
- Javidan K. Analytical formulation for soliton-potential dynamics // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 78. — P. 046607.
- Kalbermann G. A model for soliton trapping in a well // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2001. — Vol. 12, no. 13. — P. 2381–2385.
- Kalberman G. The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2004. — Vol. 37. — P. 11603–11612.
- Kivshar Y. S., Malomed B. A., Zhang F., Vazquez L. Creation of sine-Gordon solitons by a pulse force // *Phys. Rev. B.* — 1991a. — Vol. 43. — P. 1098–1109.
- Kivshar Y. S., Zhang F., Vazquez L. Resonant soliton-impurity interactions // *Phys. Rev. Lett.* — 1991b. — Vol. 67. — P. 1177–1180.
- Kivshar Y. S., Malomed B. A. Quasiclassical quantisation and radiative decay of sine-Gordon solitons pinned by a micro-inhomogeneity // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1988. — Vol. 21, no. 7. — P. 1553–1561.
- Paul D. I. Soliton theory and the dynamics of a ferromagnetic domain wall // *J. Phys. C: Solid State Phys.* — 1979. — Vol. 12. — P. 585–593.
- Piette B., Zakrzewski W. J. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // *J. Phys. A Math. Theor.* — 2007. — Vol. 40. — P. 5995–6010.
- Piette B., Zakrzewski W. J. Scattering of sine-Gordon breathers on a potential well // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79. — P. 046603.
- Quintero N. R., Sanchez A., Merten F. G. Existence of internal modes of sine-Gordon kinks // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 62, no. 1. — P. R60–R63.
- Willis C. R. Comment on Existence of internal modes of sine-Gordon kinks // *Phys. Rev. E.* — 2006. — Vol. 73. — P. 068601.
- Zhang F., Kivshar Y. S., Vazquez L. Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 45. — P. 6019–6030.