

УДК: 517.987.4

Формулы Фейнмана для решений уравнений типа Шрёдингера с полиномиальными потенциалами четвертого порядка

А. К. Кравцева

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание

E-mail: anna-conf@yandex.ru

Получено 11 июля 2012 г.,
после доработки 8 августа 2012 г.

В работе изучены условия существования фейнмановских интегралов в смысле аналитического продолжения от функционалов экспоненциального вида с полиномом четвертого порядка в показателе, построены их представления в виде гауссовских интегралов. Показано, что уравнение типа Шрёдингера в бесконечномерном пространстве в случае полиномиального потенциала четвертой степени имеет решение, которое описывается интегралом Фейнмана по траекториям в конфигурационном пространстве.

Ключевые слова: формулы Фейнмана, уравнение Шрёдингера, гауссовский интеграл

Feynman formulae for solutions of Schrodinger-type equations with fourth-power polinomial potentials

A. K. Kravtseva

Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU, Glavnoe Zdanie, GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

Abstract. — The conditions for the existence of Feynman integrals in a sense of analytic continuation of the exponential functionals with a fourth-power polynomial in the index are studied, their presentations by Gaussian integrals are constructed in the paper. It is shown that the Schrodinger-type equation in the infinite-dimensional space in the case of fourth-power polynomial potential has a solution which is described by the Feynman path integral in configuration space.

Keywords: Feynman formulae, Schrodinger equation, Gaussian integral

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 497–507 (Russian).

В данной статье получен способ аналитического продолжения в комплексную область в пространстве операторов, который дает возможность переходить от функциональных интегралов к гауссовским. Этот результат позволил доказать формулы Фейнмана для класса эволюционных уравнений, включающих уравнение Шрёдингера. Настоящий подход продолжает методы работ [Смолянов, Шавгулидзе, 2006; Смолянов, Шавгулидзе, 1990; Смолянов, Шавгулидзе, 2003], в которых вместо операторов рассматривались числа. Нужно отметить, что ранее в статье [Альбеверно, Смолянов, Шавгулидзе, 1998] было доказано обобщение теоремы Чернова [Chernoff, 1968] о представлении решений уравнений типа Шрёдингера в виде интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

Предполагается, что задано гильбертово сепарабельное пространство H , наделенное скалярным произведением (\cdot, \cdot) и соответствующей нормой $\|\cdot\|$; e_1, \dots, e_n, \dots — ортонормированный базис в H . Будем считать, что $B(L)$ — пространство линейных ограниченных по норме операторов на произвольном гильбертовом пространстве L , $L^{\mathbb{C}}$ — комплексификация L . Пусть $T \in B(H)$ — симметричный положительно-определенный ядерный оператор, удовлетворяющий равенствам $Te_n = \lambda_n e_n$. Обозначим через μ_A семейство гауссовских мер с нулевым средним и корреляционным оператором $A^{-1}T(A^*)^{-1}$, где A — обратимый оператор, лежащий в $B(H)$. Следуя терминологии, принятой в монографии [Смолянов, Шавгулидзе, 1990], введем следующее определение.

Определение. Говорят, что $\chi: B(H^{\mathbb{C}}) \times \mathbb{C} \times H \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема по мере Фейнмана, если функция $R(A, B, \lambda) = \int_H \chi(B, \lambda, x) \mu_A(dx)$ конечна в некоторой непустой области $X \subset B(H) \times B(H) \times \mathbb{R}$ и аналитически продолжается в комплексную область $X \subset Z \subset B(H^{\mathbb{C}}) \times B(H^{\mathbb{C}}) \times \mathbb{C}$. Величину этого аналитического продолжения при комплексных A, B, λ называют интегралом Фейнмана от функции χ и обозначают через $\int_H \chi(B, \lambda, x) \exp\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax, Ax)\} dx$.

Пусть $I \in B(H)$ — единичный оператор, μ — гауссовская мера с нулевым средним и корреляционным оператором T . Обозначим через π_n ортогональный проектор, действующий из H в $H_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Считаем, что $q: H \times H \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ — линейное по каждой из переменных непрерывное симметричное отображение и $q(x, x, x, x) > 0$ для всех x из H , не равных нулю. Положим $p(x) = (q(x, x, x, x))^{1/4}$. Предполагается, что $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ для любых x, y , лежащих в H , и существует такое $c > 0$, что $|q(x_1, x_2, x_3, x_4)| \leq cp(x_1)p(x_2)p(x_3)p(x_4)$ для любых $x_1, x_2, x_3, x_4 \in H$. Для произвольного оператора $R \in B(H)$ обозначим через $q(x, x, x, R \cdot)$ вектор из H , определяемый своими скалярными произведениями с произвольными векторами y из H по формуле $(q(x, x, x, R \cdot), y) = q(x, x, x, Ry)$. Пусть $F(H)$ — пространство функций $f: H \rightarrow \mathbb{C}$, для каждой из которых имеется аналитическое продолжение $\tilde{f}: H^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что $|\tilde{f}(z)| \leq c_1 \exp\{c_2 |p(z)|^{4-\varepsilon}\}$ для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$, $4 \geq \varepsilon > 0$ и всех $z \in H^{\mathbb{C}}$.

Лемма. Пусть A и C — произвольные обратимые операторы из $B(H^{\mathbb{C}})$. Тогда существует ядерный положительно-определенный оператор $S \in B(H)$ такой, что $Se_i = \gamma_i e_i$, и при этом $1/(n+1)^2 \geq \gamma_n/(n+1)^2 \geq \gamma_{n+1} > 0$;

$$\frac{\|\pi_n x\|^2}{(p(S_n x))^2} \leq 2 \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}, \quad (1)$$

где $S_n = S\pi_n$; для некоторой $M > 0$ и для любых $\omega > 1$

$$\int_H \lim_{n \rightarrow +\infty} |J_n(x)|^2 \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}\right\} \mu(dx) \leq M \exp\{\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\}, \quad (2)$$

где

$$J_n(x) = \det(\pi_n - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \pi_n AC^{-1} S_n - \pi_n AC^{-1} S_n x \otimes \frac{2\omega}{(p(Sx))^2} \pi_n x + \\ + \pi_n AC^{-1} S_n x \otimes \frac{2\omega \|x\|^2}{(p(Sx))^6} q(Sx, Sx, Sx, S_n \cdot)) \quad \forall x \neq 0.$$

Доказательство. Построим оператор S с собственными значениями $\gamma_i \leq 1$, удовлетворяющий неравенству (1). Если числа γ_i уменьшить, дополнительно требуя выполнения оценок $\gamma_n/(n+1)^2 \geq \gamma_{n+1} > 0$, (1) останется верным (доказательство существования такого оператора см. в [Смолянов, Шавгулидзе, 2006]). Положим

$$J_n^m(x) = \det(\pi_m - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \pi_m AC^{-1} S_n - \pi_m AC^{-1} S_n x \otimes \frac{2\omega}{(p(Sx))^2} \pi_m x + \\ + \pi_m AC^{-1} S_n x \otimes \frac{2\omega \|x\|^2}{(p(Sx))^6} q(Sx, Sx, Sx, S_m \cdot)), \quad \bar{J}_n(x) = \sup_{m \geq n} |J_n^m(x)|.$$

Тогда

$$J_n^m(x) = \det(\pi_m + a_1^m(x) \otimes b_1^m(x) + \dots + a_n^m(x) \otimes b_n^m(x)), \text{ где } a_j^m(x) = \pi_m AC^{-1} e_j, \\ b_j^m(x) = -\omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \gamma_j e_j - \frac{2\omega}{(p(Sx))^2} (S_n x, e_j) \pi_m x + \frac{2\omega \|x\|^2}{(p(Sx))^6} (S_n x, e_j) \times \\ \times q(Sx, Sx, Sx, S_m \cdot), \quad j = 1, \dots, n.$$

Несложно показать, что для произвольных векторов a_j, b_j из пространства $H_m^{\mathbb{C}}$ определитель $\det(I + a_1 \otimes b_1 + \dots + a_n \otimes b_n)$ представляет собой линейную комбинацию слагаемых, являющихся произведениями сомножителей вида (a_i, b_j) , $i, j = 1, \dots, n$. При этом число слагаемых в сумме и коэффициенты перед произведениями зависят от n и не зависят от m , число сомножителей в произведениях не превосходит n . Значит,

$$(\det(\pi_m + a_1^m \otimes b_1^m + \dots + a_{n+1}^m \otimes \gamma b_{n+1}^m))^2 = \kappa + \gamma \rho(\gamma),$$

где $\rho(\gamma)$ — многочлен от γ . Подставляя $\gamma = 0$, получаем

$$\kappa = (\det(\pi_m + a_1^m \otimes b_1^m + \dots + a_n^m \otimes b_n^m))^2.$$

Следовательно,

$$(J_{n+1}^m(x))^2 = (J_n^m(x))^2 + \gamma_{n+1} C(x, \gamma_{n+1}, m, n), \tag{3}$$

где $C(x, \gamma_{n+1}, m, n)$ является суммой соответствующих произведений. При этом для некоторой константы $L(n)$ верна оценка

$$|C(x, \gamma_{n+1}, m, n)| \leq C_n(x) = L(n) \left(\frac{\|x\|^6}{(p(Sx))^6} \omega (\|AC^{-1}\| + 1) \right)^{2n+2}. \tag{4}$$

Начнем уменьшать числа γ_n по индукции. γ_1 изменять не будем и предположим, что $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ выбраны. Применим к равенству (3) оценку (4):

$$|J_{n+1}^m(x)|^2 \leq |J_n^m(x)|^2 + \gamma_{n+1} C_n(x) \leq (\bar{J}_n(x))^2 + \gamma_{n+1} C_n(x) \text{ при } m \geq n + 1.$$

Тогда

$$(\bar{J}_{n+1}(x))^2 \leq (\bar{J}_n(x))^2 + \gamma_{n+1} C_n(x).$$

Неравенство $t^N e^{-t} \leq N^N$ верно при $N \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. Положив $t = \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}$, придем к оценке

$$C_n(x) \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}\right\} \leq L(n)(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^{2n+2} \times \\ \times ((6n + 6))^{6n+6} \frac{1}{\|x\|^{12n+12}}.$$

Пусть

$$E(n) = (L(n)((6n + 6))^{6n+6}(2n + 2)!)^{-1}.$$

Уменьшим γ_{n+1} так, чтобы

$$0 < \gamma_{n+1} < \min \left[\frac{E(n)}{\int_H \|x\|^{-(12n+12)} \mu(dx) + 1}, \frac{\gamma_n}{(n + 1)^2}, \lambda_{n+1} \right].$$

В результате получим

$$\int_H \gamma_{n+1} C_n(x) \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{p(Sx)^2}\right\} \mu(dx) \leq \frac{(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^{2n+2}}{(2n + 2)!}.$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\int_H (\bar{J}_1(x))^2 \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{p(Sx)^2}\right\} \mu(dx) \leq L_1(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^2,$$

где L_1 — некоторая константа. Заметим, что $J_n^n(x)$ совпадает с $J_n(x)$ из условия леммы.

Далее, $(\bar{J}_1(x))^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_{j+1} C_j(x) \exp\{-\|x\|^4/(p(Sx))^2\}$ является мажорантой для последовательности $(J_n^n(x))^2 \exp\{-\|x\|^4/(p(Sx))^2\}$, поскольку

$$\int_H \{(\bar{J}_1(x))^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_{j+1} C_j(x)\} \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}\right\} \mu(dx) \leq L_1(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^2 + \\ + \frac{(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^4}{4!} + \dots + \frac{(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^{2n}}{(2n)!} + \dots \leq (2L_1 + 1) \exp\{\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\}.$$

Значит, утверждение леммы следует из теоремы Лебега. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказанной лемме и далее в теореме 1 произведение (a, b) для $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $b = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$, лежащих в $H^{\mathbb{C}}$, определяется как аналитическое продолжение скалярного произведения в H : $(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Теорема 1. Пусть $f \in F(H)$, $A, C \in B(H^{\mathbb{C}})$ — обратимые операторы такие, что $AC^{-1} = \lambda I + TB$ для некоторых $B \in B(H^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. При этом $|\lambda| > \|T\| \|B\|$. Предположим, что $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая кривая такая, что $\varphi(t) \notin \sigma(A)$ для любого $t \in [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|A\|$. Тогда существует интеграл Фейнмана

$$\int_H \tilde{f}(Cx) \exp\{-(p(Cx))^4\} \exp\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax, Ax)\} dx \tag{5}$$

и найдутся такие оператор $S \in B(H)$ и константа $\omega > 1$, что интеграл (5) равен гауссовскому интегралу

$$\int_H \tilde{f}\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right) \exp\left\{-\left(p\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right)\right)^4\right\} \times \\ \times \exp\left\{\omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} (T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} (T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx)\right\} \frac{J(x)}{2} \mu(dx), \tag{6}$$

где $J(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) \forall x \neq 0$, $J_n(x)$ — функционал из леммы.

Доказательство. Когда обратимые операторы A и C лежат в $B(H)$, интеграл (5) — гауссовский. Значит, он равен интегралу

$$\int_H f(CA^{-1}y) \exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\} dy,$$

который преобразуется к пределу конечнократных интегралов

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_H f(CA^{-1}\pi_n y) \exp\{-(p(CA^{-1}\pi_n y))^4\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\} dy = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(T) \int_{H_n} f(CA^{-1}y) \exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\} dy, \\ \text{где } c_n(T) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}}.$$

Зафиксируем номер n и сделаем замену переменных

$$y(x) = \begin{cases} x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \pi_n AC^{-1} Sx, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где S — оператор из леммы. В результате получим равенство

$$c_n(T) \int_{H_n} f(CA^{-1}y) \exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\} dy = \\ = c_n(T) \int_{H_n} f\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right) \exp\left\{-\left(p\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right)\right)^4\right\} \times \\ \times \exp\left\{\omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} (T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} (T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx)\right\} J_n(x) \mu(dx). \tag{8}$$

Заметим, что оно верно для достаточно малых ω , поскольку тогда замена (7) будет биекцией. Левая часть в (8) не зависит от ω , поэтому, в силу аналитичности правой части, равенство (8) справедливо для любых $\omega > 0$. Пусть $\omega > 1$.

Потребуем, чтобы, помимо указанных выше условий, были выполнены следующие ограничения:

$$AC^{-1} = \lambda I + TB \text{ для некоторых } B \in B(H) \text{ и } \lambda > 0, \text{ таких, что } \lambda > \|T\| \|B\|.$$

Докажем, что интегралы (5) и (6) равны. Нам достаточно проверить случай

$$AC^{-1} = \lambda I + \pi_k TB \pi_k,$$

поскольку общее утверждение следует из него путем предельного перехода по $k \rightarrow \infty$. Преобразуем J_n :

$$J_n(x) = \det\left(\pi_n - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \lambda S_n - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \pi_k TBS_k + \pi_n AC^{-1} S_n x \otimes \left(-\frac{2\omega}{(p(Sx))^2} \pi_n x + \frac{2\omega \|x\|^2}{(p(Sx))^6} q(Sx, Sx, Sx, S_n \cdot)\right)\right).$$

Главным слагаемым в нем будет $\det(\pi_n - \omega \|x\|^2 / (p(Sx))^2 \lambda S_n)$, остальные члены, в силу конечномерности $\pi_k TBS_k$ и тензорного произведения двух векторов, имеют более высокий порядок, их число определяется номером k и не зависит от n . Далее,

$$\det\left(\pi_n - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \lambda S_n\right) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} \lambda \gamma_i\right) = \sum_{k=0}^n \Gamma_k(n) (-\lambda \omega)^k \left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^k$$

для некоторых $\Gamma_k(n)$, зависящих от γ_i . Разобьем последнюю сумму на три слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Gamma_k(n) (-\lambda \omega)^k \left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^k + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n-1} \Gamma_k(n) \times \\ \times (-\lambda \omega)^k \left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^k + \gamma_1 \dots \gamma_n (-\lambda \omega)^n \left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^n = \sigma_1(n) + \sigma_2(n) + \sigma_3(n).$$

Тогда правый интеграл в равенстве (8) станет суммой трех соответствующих интегралов $I_1(n)$, $I_2(n)$, $I_3(n)$. У подынтегральных функций в $I_1(n)$ и $I_2(n)$ главными членами в экспонентах при достаточно больших $\lambda > 1$ будут

$$\exp\left\{-\frac{\omega^4}{2} \frac{\|x\|^8}{(p(Sx))^4}\right\} \exp\left\{-\frac{\omega^2 \lambda^2}{2} \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} (T^{-1} Sx, Sx)\right\}.$$

Комбинируя сказанное, приходим к необходимости оценки следующего интеграла:

$$\Gamma_k(n) (-\lambda \omega)^k c_n(T) \int_{H_n} \left(\frac{\|x\|}{p(Sx)}\right)^{2k} \exp\left\{-\frac{\omega^4}{2} \frac{\|x\|^8}{(p(Sx))^4}\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\omega^2 \lambda^2}{2} \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} (T^{-1} Sx, Sx)\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} (T^{-1} x, x)\right\} dx. \quad (9)$$

По свойствам оператора S $\Gamma_k(n) \leq a_k \gamma_1 \dots \gamma_k$, где a_k не зависит от n . Далее рассматриваем нечетные $n = 2m + 1$.

При $k = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$

$$\omega^k \left(\frac{\|x\|}{p(Sx)} \right)^{2k} \exp \left\{ -\frac{\omega^4}{2} \frac{\|x\|^8}{(p(Sx))^4} \right\} \leq \frac{b_k}{\omega^k \|x\|^{2k}}$$

для некоторой последовательности b_k , поскольку $\exp\{-t^4 + t^2\} \leq L$, L – константа и $\tau^N e^{-\tau} \leq N^N$ при $N \in \mathbb{N}$, $\tau \geq 0$.

Так как n – нечетное, интеграл $c_n(T) \int_{H_n} 1/\|x\|^{2k} \exp\{-(T^{-1}x, x)/2\} dx$ сходится и $1/\|x\|^i \leq 1/\|x\|^j$ при $i \geq j$, $i, j \in \mathbb{N}$, получаем, что подынтегральная функция в $I_1(n)$ оценивается сверху рядом

$$1 + \gamma_1 L \frac{a_1 b_1}{\omega} \frac{1}{\|\pi_{2+1}x\|^2} + \gamma_1 \gamma_2 L \frac{a_2 b_2}{\omega^2} \frac{1}{\|\pi_{4+1}x\|^4} + \dots$$

Накладывая дополнительные ограничения на числа γ_i , добиваемся суммируемости ряда на H по мере μ . Теперь из теоремы Лебега, примененной к $I_1(n)$, следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) &= \int_H f \left(CA^{-1}x + \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx \right) \exp \left\{ -\left(p(CA^{-1}x + \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx) \right)^4 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} (T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} (T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx) \right\} J(x) \mu(dx). \end{aligned} \quad (10)$$

При $k = [\frac{n}{2}] + 1, \dots, n - 1$ после замены $x = S^{-1}y$ в интеграле (9) приходим к выражению

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma_k(n)(\lambda\omega)^k c_n(T)}{\gamma_1 \dots \gamma_n} \int_{H_n} \left(\frac{\|S^{-1}y\|}{p(y)} \right)^{2k} \exp \left\{ -\frac{\omega^4}{2} \frac{\|S^{-1}y\|^8}{(p(y))^4} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\omega^2 \lambda^2}{2} \frac{\|S^{-1}y\|^4}{(p(y))^4} (T^{-1}y, y) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (T^{-1}S^{-1}y, S^{-1}y) \right\} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $\Omega(e)de$ – элемент сферы $\{\|e\| = 1\}$ в H_n . Тогда для интеграла (11) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} &\frac{a_k(\lambda\omega)^k c_n(T)}{\gamma_{k+1} \dots \gamma_n} \int_{\|e\|=1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\|S^{-1}e\|}{p(e)} \right)^{2k} r^{n-1} \exp \left\{ -\frac{\omega^4}{2} \frac{\|S^{-1}e\|^8}{(p(e))^4} r^4 \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\omega^2 \lambda^2}{2} \frac{\|S^{-1}e\|^4}{(p(e))^4} (T^{-1}e, e) r^2 \right\} \Omega(e) dedr. \end{aligned}$$

Далее, преобразование $\rho = \omega \lambda \frac{\|S^{-1}e\|^2}{(p(e))^2} r$ приводит к

$$\begin{aligned} &\frac{a_k c_n(T)}{\gamma_{k+1} \dots \gamma_n} \int_{\|e\|=1} \int_0^{+\infty} (\omega\lambda)^{k-n} \left(\frac{\|S^{-1}e\|}{p(e)} \right)^{2k-2n} \rho^{n-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(p(e))^4 \rho^4}{\lambda^4} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (T^{-1}e, e) \rho^2 \right\} \times \\ &\times \Omega(e) ded\rho = \frac{a_k c_n(T)}{\gamma_{k+1} \dots \gamma_n} \int_{H_n} \frac{1}{(\omega\lambda)^{n-k}} \left(\frac{p(z)}{\|S^{-1}z\|} \right)^{2(n-k)} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(p(z))^4}{\lambda^4} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (T^{-1}z, z) \right\} dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как для $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{n-k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\frac{t}{a}}{a^{2(n-k)-1} \left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)^{n-k}} \leq \frac{\zeta}{a^{2(n-k)-1}},$$

где $\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)}$, и $(p(z))^{2(n-k)} \exp\{-(p(z))^4/2\} \leq \theta_k$ для некоторой последовательности θ_k , то правый интеграл в равенстве (12) не превосходит

$$\gamma_k \zeta^{n-k+1} \theta_k a_k c_n(T) \int_{H_{k-1}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}z, z)\right\} dz_1 \dots dz_{k-1}}{(z_1^2 + \dots + z_{k-1}^2)^{\frac{n-k-1}{2}}}.$$

Последнее выражение конечно в силу выбора чисел k . Уменьшая нужным образом γ_i , добиваемся, чтобы $I_2(n)$ оценивался сверху остатком сходящегося ряда. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = 0. \quad (13)$$

Перейдем к случаю $k = n$. Применив рассмотренные выше переходы и используя нечетность n , получим

$$\begin{aligned} I_3(n) = & -c_n(T) \int_{H_n} f \left(CA^{-1} \left\{ \frac{(p(z))^2}{\omega \lambda \|S^{-1}z\|^2} S^{-1}z \right\} + z/\lambda \right) \exp \left\{ - \left(p \left(CA^{-1} \left\{ \frac{(p(z))^2}{\omega \lambda \|S^{-1}z\|^2} S^{-1}z \right\} + z/\lambda \right) \right)^4 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ - \left(T^{-1}AC^{-1}z, \frac{(p(z))^2}{\omega \lambda \|S^{-1}z\|^2} S^{-1}z \right) - \frac{1}{2\lambda^2} (T^{-1}AC^{-1}z, AC^{-1}z) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{1}{2} \frac{(p(z))^4}{(\omega \lambda)^2 \|S^{-1}z\|^4} (T^{-1}S^{-1}z, S^{-1}z) \right\} dz. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p(\pi_n z))^2}{\omega \|S^{-1}\pi_n z\|^2} S^{-1}\pi_n z = 0 \text{ при } z \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_3(n) = & - \int_H f(z/\lambda) \exp\{-(p(z/\lambda))^4\} \exp \left\{ - \frac{1}{2\lambda^2} (T^{-1}AC^{-1}z, AC^{-1}z) \right\} dz = \\ = & - \int_H f(CA^{-1}z) \exp\{-(p(CA^{-1}z))^4\} \exp \left\{ - \frac{1}{2} (T^{-1}z, z) \right\} dz. \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя в равенстве (8) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и используя (10), (13), (15), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_H f(CA^{-1}y) \exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\} \mu(dy) = \int_H f \left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx \right) \times \\ & \times \exp \left\{ - (p(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx))^4 \right\} \exp \left\{ \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} (T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} \right\} \times \\ & \times (T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx) J(x) \mu(dx) - \int_H f(CA^{-1}z) \exp\{-(p(CA^{-1}z))^4\} \mu(dz). \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно больших λ интегралы (5) и (6) равны. При остальных λ равенство вытекает из аналитичности.

В интеграле (6) $\exp\{-p(CA^{-1}x - \omega\|x\|^2/(p(Sx))^2Sx)\}$ раскладывается на множители так, что последний имеет вид $\exp\{-\omega^4\|x\|^8/(p(Sx))^4\}$. Он оценивает функцию f и экспоненты. Тогда, применяя неравенство Коши–Буняковского и лемму, получаем существование рассмотренного интеграла при комплексных A, C таких, что

$$AC^{-1} = \lambda I + TB, \quad B \in B(H^{\mathbb{C}}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ и } |\lambda| > \|T\|\|B\|.$$

Таким образом, интеграл Фейнмана (5) — это значение гауссовского интеграла (6) при комплексных параметрах. ■

Приводимая далее теорема 2 является следствием теоремы 1. Для того чтобы ее сформулировать, введем дополнительные обозначения. Пусть Q — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_q$ и нормой $\|\cdot\|_q$, f_1, \dots, f_n, \dots — ортонормированный базис в пространстве Q , $\widehat{T} \in B(Q)$ — симметричный положительно-определенный ядерный оператор с собственными векторами f_1, \dots, f_n, \dots , $I_q \in B(Q)$ — единичный оператор. Положим

$$\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}}u(t, q) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}f_i, f_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t, q)$$

для произвольного обратимого оператора $A \in B(Q)$ и функции $u: [0, \infty) \times Q \rightarrow \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оператор A^* определяется, аналогично сопряженному оператору, равенством $(Ax, y)_q = (x, A^*y)_q \quad \forall x, y \in Q^{\mathbb{C}}$, в котором скалярное произведение заменено его аналитическим продолжением в комплексную область.

Предположим, что $p_k: Q \times \dots \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ — k -линейная непрерывная симметричная форма, $k = 1, 2, 3, 4$; $p_4(q, q, q, q) > 0$ при любом q , лежащем в Q и не равном нулю. Пусть также $m(q) = (p_4(q, q, q, q))^{1/4}$ и для некоторых $l_k > 0$ справедливы неравенства: $|p_k(q_1, \dots, q_k)| \leq l_k m(q_1) \dots m(q_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Через $v(q)$ обозначим сумму $\sum_{i=1}^4 p_i(q, \dots, q)$.

Тогда эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, q) = \frac{1}{2} \Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} u(t, q) + v(Cq)u(t, q) \tag{16}$$

и начальное условие

$$u(0, q) = u_0(Cq) \tag{17}$$

определяют задачу Коши для данного уравнения.

Пусть $t > 0$; $G(Q)$ — пространство функций $w: Q \rightarrow \mathbb{C}$, для каждой из которых существует аналитическое продолжение $\widetilde{w}: Q^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, и при этом найдутся константы $C > 0$, $1/(4\|\widehat{T}\|) > \varepsilon > 0$ такие, что $|\widetilde{w}(z)| \leq C \exp\{\varepsilon\|z\|^2\}$ для любых z из $Q^{\mathbb{C}}$. Положим $E = \{x \in C([0, t], Q) : x(t) = 0\}$.

Следующая теорема описывает связь между решением задачи (16), (17) и интегралами Фейнмана.

Теорема 2. Пусть $u_0 \in G(Q)$, операторы $A, C \in B(Q^{\mathbb{C}})$ обратимы и $AC^{-1} = \lambda I_q + \widehat{T}B$ для некоторых $B \in B(Q^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $|\lambda| > \|\widehat{T}\|\|B\|$. Предполагается также, что существует

аналитическая кривая $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\varphi(t) \notin \sigma(A)$ для любого $t \in [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|A\|$. Тогда задача Коши имеет решение, представимое фейнмановским интегралом,

$$u(t, q) = \int_E \exp \left\{ \int_0^t v(C(q + x(\tau))) d\tau \right\} u_0(C(x(0) + q)) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\widehat{T}^{-1} Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau \right\} dx.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in B(Q)$, A — обратимый оператор, λ — положительное число, $\lambda > \|\widehat{T}\| \|B\|$. Положим $C = (\lambda I_q + \widehat{T}B)^{-1}A$. На пространстве E_0 , состоящем из функций $x \in E$ таких, что $x(\tau) \in A^{-1}\widehat{T}^{1/2}Q$ для любого $\tau \in [0, t]$, почти всюду на $[0, t]$ существует $x'(\tau) \in A^{-1}\widehat{T}^{1/2}Q$, и $\int_0^t (\widehat{T}^{-1} Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau < \infty$, определена квадратичная форма $b(x) = \int_0^t (\widehat{T}^{-1} Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau$, порождающая меру Винера [Смолянов, Шавгулидзе, 1990]. В дальнейшем понадобятся следующие интегралы по данной мере:

$$a_1(t, q, A, B, \lambda) = \int_E \exp \left\{ \int_0^t v(C(q + x(\tau))) d\tau \right\} u_0(C(x(0) + q)) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\widehat{T}^{-1} Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau \right\} dx, \quad (18)$$

$$a_2(t, q, A, B, \lambda) = \int_E \left[\frac{1}{2} \Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} \exp \left\{ \int_0^t v(C(q + x(\tau))) d\tau \right\} u_0(C(x(0) + q)) + \right. \\ \left. + v(Cq) \exp \left\{ \int_0^t v(C(q + x(\tau))) d\tau \right\} u_0(C(x(0) + q)) \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\widehat{T}^{-1} Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau \right\} dx. \quad (19)$$

Поскольку параметры вещественны, a_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} a_1(t, q, A, B, \lambda) = \frac{1}{2} \Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} a_1(t, q, A, B, \lambda) + v(Cq) a_1(t, q, A, B, \lambda)$$

и начальному условию $a_1(t, q, A, B, \lambda) = u_0(Cq)$ (см. [Далецкий, Фомин, 1983]). Следовательно,

$$a_1(t, q, A, B, \lambda) = \int_0^t a_1(\tau, q, A, B, \lambda) d\tau + u_0(Cq). \quad (20)$$

Это равенство продолжается по аналитичности на комплексные параметры в силу существования и аналитичности фейнмановских интегралов (18), (19). Чтобы доказать последнее, возьмем произвольное $0 < \delta < 1/2$ и построим новое пространство H_δ . Каждый элемент $\psi \in E$ представим в виде $\psi(\tau) = h(\tau) + e(\tau)\psi(0)$, где $e(\tau) = (t - \tau)/t$. Тогда $h(0) = h(t) = 0$ и $h(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n \tau / t)$ для некоторых $b_n \in Q$ и всех τ на отрезке $[0, t]$. Обозначим через H_δ пространство функций $h \in C([0, t], Q)$, для каждой из которых $h(0) = h(t) = 0$, и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\delta} \|b_n\|_q^2 < \infty$.

Оно является гильбертовым относительно скалярного произведения, определяемого формулой $(h_1, h_2)_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\delta} (b_n^1, b_n^2)_q$ для $h_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^i \sin(\pi n \tau / t)$, $i = 1, 2$, $\tau \in [0, t]$. Значит, система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \sin(\pi i \tau / t) f_j \right\}_{i,j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис H^δ . Далее,

$$w(h) = \int_0^t (\widehat{T}^{-1} h'(\tau), h'(\tau))_q d\tau = \frac{\pi^2}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2(1-\delta)} n^{2\delta} (\widehat{T}^{-1} b_n, b_n)_q.$$

Следовательно, квадратичная форма w порождает в H_δ гауссовскую меру с ядерным корреляционным оператором. Полагая в теореме 1 $H = H_\delta \oplus Q$, получаем существование интегралов Фейнмана (18), (19). Из равенства (20) вытекают два условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_1(t, q, A, B, \lambda) &= a_2(t, q, A, B, \lambda), \\ a_1(0, q, A, B, \lambda) &= u_0(Cq). \end{aligned}$$

Учитывая свойства оператора S из теоремы 1, получаем следующее равенство:

$$a_2(t, q, A, B, \lambda) = \frac{1}{2} \Delta_{A^{-1} \widehat{T}(A^*)^{-1}} a_1(t, q, A, B, \lambda) + \nu(Cq) a_1(t, q, A, B, \lambda).$$

Остается заметить, что $u(t, q) = a_1(t, q, A, B, \lambda)$ является решением исходной задачи (16), (17). ■

Автор выражает благодарность Е. Т. Шавгулидзе за постановку задачи, внимание к работе и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

- Альбеверио С., Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Некоторые методы квантования конечномерных гамильтоновых систем со связями // ДАН. 1998. Т. 361, № 4. — С. 727–730.
- Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983.
- Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Бесконечномерные уравнения Шрёдингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траекториям // ДАН. 2006. Т. 408, № 1. — С. 28–33.
- Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. — М.: МГУ, 1990. — С. 45–53.
- Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Формулы Фейнмана для решений бесконечномерных уравнений Шрёдингера с полиномиальными потенциалами // ДАН. 2003. Т. 390, № 3. — С. 321–324.
- Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 84, P. 238–242.