КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 3 С. 497–507

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.987.4

Формулы Фейнмана для решений уравнений типа Шрёдингера с полиномиальными потенциалами четвертого порядка

А. К. Кравцева

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание

E-mail: anna-conf@yandex.ru

Получено 11 июля 2012 г.,
после доработки 8 августа 2012 г.

В работе изучены условия существования фейнмановских интегралов в смысле аналитического продолжения от функционалов экспоненциального вида с полиномом четвертого порядка в показателе, построены их представления в виде гауссовских интегралов. Показано, что уравнение типа Шрёдингера в бесконечномерном пространстве в случае полиномиального потенциала четвертой степени имеет решение, которое описывается интегралом Фейнмана по траекториям в конфигурационном пространстве.

Ключевые слова: формулы Фейнмана, уравнение Шрёдингера, гауссовский интеграл

Feynman formulae for solutions of Schrodinger-type equations with fourth-power polinomial potentials

A. K. Kravtseva

Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU, Glavnoe Zdanie, GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

Abstract. — The conditions for the existence of Feynman integrals in a sense of analytic continuation of the exponential functionals with a fourth-power polynomial in the index are studied, their presentations by Gaussian integrals are constructed in the paper. It is shown that the Schrodinger-type equation in the infinite-dimensional space in the case of fourth-power polynomial potential has a solution which is described by the Feynman path integral in configuration space.

Keywords: Feynman formulae, Schrodinger equation, Gaussian integral

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 497–507 (Russian).

© 2012 Анна Константиновна Кравцева

В данной статье получен способ аналитического продолжения в комплексную область в пространстве операторов, который дает возможность переходить от функциональных интегралов к гауссовским. Этот результат позволил доказать формулы Фейнмана для класса эволюционных уравнений, включающих уравнение Шрёдингера. Настоящий подход продолжает методы работ [Смолянов, Шавгулидзе, 2006; Смолянов, Шавгулидзе, 1990; Смолянов, Шавгулидзе, 2003], в которых вместо операторов рассматривались числа. Нужно отметить, что ранее в статье [Альбеверио, Смолянов, Шавгулидзе, 1998] было доказано обобщение теоремы Чернова [Chernoff, 1968] о представлении решений уравнений типа Шрёдингера в виде интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

Предполагается, что задано гильбертово сепарабельное пространство H, наделенное скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|$; $e_1,\ldots,e_n,\ldots$ — ортонормированный базис в H. Будем считать, что $B(L)$ — пространство линейных ограниченных по норме операторов на произвольном гильбертовом пространстве L, $L^{\mathbb{C}}$ — комплексификация L. Пусть $T\in B(H)$ — симметричный положительно-определенный ядерный оператор, удовлетворяющий равенствам $Te_n=\lambda_n e_n$. Обозначим через μ_A семейство гауссовских мер с нулевым средним и корреляционным оператором $A^{-1}T(A^*)^{-1}$, где A — обратимый оператор, лежащий в $B(H)$. Следуя терминологии, принятой в монографии [Смолянов, Шавгулидзе, 1990], введем следующее определение.

Определение. Говорят, что $\chi\colon B(H^{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}\times H\to\mathbb{C}$ интегрируема по мере Фейнмана, если функция $R(A,B,\lambda)=\int_H\chi(B,\lambda,x)\mu_A(dx)$ конечна в некоторой непустой области $X\subset B(H)\times B(H)\times\mathbb{R}$ и аналитически продолжается в комплексную область $X\subset Z\subset B(H^{\mathbb{C}})\times B(H^{\mathbb{C}})\times\mathbb{C}$. Величину этого аналитического продолжения при комплексных A, B, λ называют интегралом Фейнмана от функции χ и обозначают через $\int_H\chi(B,\lambda,x)\exp\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax,Ax)\}dx$.

Пусть $I\in B(H)$ — единичный оператор, μ — гауссовская мера с нулевым средним и корреляционным оператором T. Обозначим через π_n ортогональный проектор, действующий из H в $H_n=<e_1,\ldots,e_n>$. Считаем, что $q\colon H\times H\times H\times H\to\mathbb{R}$ — линейное по каждой из переменных непрерывное симметричное отображение и $q(x,x,x,x)>0$ для всех x из H, не равных нулю. Положим $p(x)=(q(x,x,x,x))^{1/4}$. Предполагается, что $p(x+y)\le p(x)+p(y)$ для любых x, y, лежащих в H, и существует такое $c>0$, что $|q(x_1,x_2,x_3,x_4)|\le cp(x_1)p(x_2)p(x_3)p(x_4)$ для любых $x_1,x_2,x_3,x_4\in H$. Для произвольного оператора $R\in B(H)$ обозначим через $q(x,x,x,R\cdot)$ вектор из H, определяемый своими скалярными произведениями с произвольными векторами y из H по формуле $(q(x,x,x,R\cdot),y)=q(x,x,x,Ry)$. Пусть $F(H)$ — пространство функций $f\colon H\to\mathbb{C}$, для каждой из которых имеется аналитическое продолжение $\widetilde{f}\colon H^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ такое, что $|\widetilde{f}(z)|\le c_1\exp\{c_2|p(z)|^{4-\varepsilon}\}$ для некоторых констант $c_1,c_2>0$, $4\ge\varepsilon>0$ и всех $z\in H^{\mathbb{C}}$.

Лемма. *Пусть A и C — произвольные обратимые операторы из $B(H^{\mathbb{C}})$. Тогда существует ядерный положительно-определенный оператор $S\in B(H)$ такой, что $Se_i=\gamma_i e_i$, и при этом $1/(n+1)^2\ge\gamma_n/(n+1)^2\ge\gamma_{n+1}>0$;*

$$\frac{\|\pi_n x\|^2}{(p(S_n x))^2}\le 2\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2},\tag{1}$$

где $S_n=S\pi_n$; для некоторой $M>0$ и для любых $\omega>1$

$$\int_H\lim_{n\to+\infty}|J_n(x)|^2\exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}\right\}\mu(dx)\le M\exp\{\omega(\|AC^{-1}\|+1)\},\tag{2}$$

где

$$J_n(x) = \det(\pi_n - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\pi_n AC^{-1}S_n - \pi_n AC^{-1}S_n x \otimes \frac{2\omega}{(p(Sx))^2}\pi_n x +$$
$$+ \pi_n AC^{-1}S_n x \otimes \frac{2\omega\|x\|^2}{(p(Sx))^6}q(Sx, Sx, Sx, S_n\cdot)) \quad \forall x \neq 0.$$

Доказательство. Построим оператор S с собственными значениями $\gamma_i \leq 1$, удовлетворяющий неравенству (1). Если числа γ_i уменьшить, дополнительно требуя выполнения оценок $\gamma_n/(n+1)^2 \geq \gamma_{n+1} > 0$, (1) останется верным (доказательство существования такого оператора см. в [Смолянов, Шавгулидзе, 2006]). Положим

$$J_n^m(x) = \det(\pi_m - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\pi_m AC^{-1}S_n - \pi_m AC^{-1}S_n x \otimes \frac{2\omega}{(p(Sx))^2}\pi_m x +$$
$$+ \pi_m AC^{-1}S_n x \otimes \frac{2\omega\|x\|^2}{(p(Sx))^6}q(Sx, Sx, Sx, S_m\cdot)), \ \overline{J}_n(x) = \sup_{m\geq n}|J_n^m(x)|.$$

Тогда

$$J_n^m(x) = \det(\pi_m + a_1^m(x)\otimes b_1^m(x) + \ldots + a_n^m(x)\otimes b_n^m(x)), \text{ где } a_j^m(x) = \pi_m AC^{-1}e_j,$$
$$b_j^m(x) = -\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\gamma_j e_j - \frac{2\omega}{(p(Sx))^2}(S_n x, e_j)\pi_m x + \frac{2\omega\|x\|^2}{(p(Sx))^6}(S_n x, e_j)\times$$
$$\times q(Sx, Sx, Sx, S_m\cdot), \ j = 1, \ldots, n.$$

Несложно показать, что для произвольных векторов a_j, b_j из пространства $H_m^{\mathbb{C}}$ определитель $\det(I+a_1\otimes b_1+\ldots+a_n\otimes b_n)$ представляет собой линейную комбинацию слагаемых, являющихся произведениями сомножителей вида (a_i, b_j), $i, j = 1, \ldots, n$. При этом число слагаемых в сумме и коэффициенты перед произведениями зависят от n и не зависит от m, число сомножителей в произведениях не превосходит n. Значит,

$$(\det(\pi_m + a_1^m\otimes b_1^m + \ldots + a_{n+1}^m\otimes\gamma b_{n+1}^m))^2 = \kappa + \gamma\rho(\gamma),$$

где $\rho(\gamma)$ — многочлен от γ. Подставляя $\gamma = 0$, получаем

$$\kappa = (\det(\pi_m + a_1^m\otimes b_1^m + \ldots + a_n^m\otimes b_n^m))^2.$$

Следовательно,

$$(J_{n+1}^m(x))^2 = (J_n^m(x))^2 + \gamma_{n+1}C(x, \gamma_{n+1}, m, n), \tag{3}$$

где $C(x, \gamma_{n+1}, m, n)$ является суммой соответствующих произведений. При этом для некоторой константы $L(n)$ верна оценка

$$|C(x, \gamma_{n+1}, m, n)| \leq C_n(x) = L(n)\left(\frac{\|x\|^6}{(p(Sx))^6}\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\right)^{2n+2}. \tag{4}$$

Начнем уменьшать числа γ_n по индукции. γ_1 изменять не будем и предположим, что $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ выбраны. Применим к равенству (3) оценку (4):

$$|J_{n+1}^m(x)|^2 \leq |J_n^m(x)|^2 + \gamma_{n+1}C_n(x) \leq (\overline{J}_n(x))^2 + \gamma_{n+1}C_n(x) \text{ при } m \geq n+1.$$

Тогда

$$(\overline{J}_{n+1}(x))^2 \leq (\overline{J}_n(x))^2 + \gamma_{n+1} C_n(x).$$

Неравенство $t^N e^{-t} \leq N^N$ верно при $N \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. Положив $t = \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}$, придем к оценке

$$C_n(x) \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}\right\} \leq L(n)\Big(\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\Big)^{2n+2} \times$$
$$\times ((6n+6))^{6n+6} \frac{1}{\|x\|^{12n+12}}.$$

Пусть

$$E(n) = \Big(L(n)((6n+6))^{6n+6}(2n+2)!\Big)^{-1}.$$

Уменьшим γ_{n+1} так, чтобы

$$0 < \gamma_{n+1} < \min\left[\frac{E(n)}{\int\limits_H \|x\|^{-(12n+12)}\mu(dx) + 1}, \frac{\gamma_n}{(n+1)^2}, \lambda_{n+1}\right].$$

В результате получим

$$\int\limits_H \gamma_{n+1} C_n(x) \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{p(Sx)^2}\right\}\mu(dx) \leq \frac{\Big(\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\Big)^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\int\limits_H (\overline{J}_1(x))^2 \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{p(Sx)^2}\right\}\mu(dx) \leq L_1(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^2,$$

где L_1 — некоторая константа. Заметим, что $J_n^n(x)$ совпадает с $J_n(x)$ из условия леммы.

Далее, $((\overline{J}_1(x))^2 + \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \gamma_{j+1} C_j(x)) \exp\{-\|x\|^4/(p(Sx))^2\}$ является мажорантой для последовательности $(J_n^n(x))^2 \exp\{-\|x\|^4/(p(Sx))^2\}$, поскольку

$$\int\limits_H \{(\overline{J}_1(x))^2 + \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_{j+1} C_j(x)\} \exp\left\{-\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^2}\right\}\mu(dx) \leq L_1(\omega(\|AC^{-1}\| + 1))^2 +$$
$$+ \frac{\Big(\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\Big)^4}{4!} + \ldots + \frac{\Big(\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\Big)^{2n}}{(2n)!} + \ldots \leq (2L_1 + 1)\exp\{\omega(\|AC^{-1}\| + 1)\}.$$

Значит, утверждение леммы следует из теоремы Лебега. ■

Замечание 1. В доказанной лемме и далее в теореме 1 произведение (a, b) для $a = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $b = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i e_i$, лежащих в $H^{\mathbb{C}}$, определяется как аналитическое продолжение скалярного произведения в H: $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in F(H)$, A, $C \in B(H^{\mathbb{C}})$ *— обратимые операторы такие, что* $AC^{-1} = \lambda I + TB$ *для некоторых* $B \in B(H^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. *При этом* $|\lambda| > \|T\|\|B\|$. *Предположим, что* $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ *— аналитическая кривая такая, что* $\varphi(t) \notin \sigma(A)$ *для любого* $t \in [0,1]$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|A\|$. *Тогда существует интеграл Фейнмана*

$$\int\limits_H \widetilde{f}(Cx)\exp\{-(p(Cx))^4\}\exp\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax, Ax)\}dx \tag{5}$$

и найдутся такие оператор $S \in B(H)$ *и константа* $\omega > 1$, *что интеграл* (5) *равен гауссовскому интегралу*

$$\int\limits_H \widetilde{f}\left(CA^{-1}x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx\right)\exp\left\{-(p(CA^{-1}x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx))^4\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}(T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2}\omega^2\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}(T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx)\right\}\frac{J(x)}{2}\mu(dx), \tag{6}$$

где $J(x) = \lim\limits_{n\to\infty} J_n(x)$ $\forall x \neq 0$, $J_n(x)$ *— функционал из леммы.*

Доказательство. Когда обратимые операторы A и C лежат в $B(H)$, интеграл (5) — гауссовский. Значит, он равен интегралу

$$\int\limits_H f(CA^{-1}y)\exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\}dy,$$

который преобразуется к пределу конечнократных интегралов

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_H f(CA^{-1}\pi_n y)\exp\{-(p(CA^{-1}\pi_n y))^4\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\}dy =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} c_n(T)\int\limits_{H_n} f(CA^{-1}y)\exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\}dy,$$

$$\text{где } c_n(T) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\lambda_1\ldots\lambda_n}}.$$

Зафиксируем номер n и сделаем замену переменных

$$y(x) = \begin{cases} x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\pi_n AC^{-1}Sx, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases} \tag{7}$$

где S — оператор из леммы. В результате получим равенство

$$c_n(T)\int\limits_{H_n} f(CA^{-1}y)\exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\}dy =$$
$$= c_n(T)\int\limits_{H_n} f(CA^{-1}x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx)\exp\left\{-(p(CA^{-1}x - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx))^4\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}(T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2}\omega^2\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}(T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx)\right\}J_n(x)\mu(dx). \tag{8}$$

Заметим, что оно верно для достаточно малых ω, поскольку тогда замена (7) будет биекцией. Левая часть в (8) не зависит от ω, поэтому, в силу аналитичности правой части, равенство (8) справедливо для любых $\omega > 0$. Пусть $\omega > 1$.

Потребуем, чтобы, помимо указанных выше условий, были выполнены следующие ограничения:

$$AC^{-1} = \lambda I + TB \text{ для некоторых } B \in B(H) \text{ и } \lambda > 0, \text{ таких, что } \lambda > \|T\|\|B\|.$$

Докажем, что интегралы (5) и (6) равны. Нам достаточно проверить случай

$$AC^{-1} = \lambda I + \pi_k TB\pi_k,$$

поскольку общее утверждение следует из него путем предельного перехода по $k \to \infty$. Преобразуем J_n:

$$J_n(x) = \det(\pi_n - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\lambda S_n - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\pi_k TBS_k + \pi_n AC^{-1}S_n x \otimes (-\frac{2\omega}{(p(Sx))^2}\pi_n x +$$
$$+ \frac{2\omega\|x\|^2}{(p(Sx))^6}q(Sx, Sx, Sx, S_n\cdot))).$$

Главным слагаемым в нем будет $\det(\pi_n - \omega\|x\|^2/(p(Sx))^2\lambda S_n)$, остальные члены, в силу конечномерности $\pi_k TBS_k$ и тензорного произведения двух векторов, имеют более высокий порядок, их число определяется номером k и не зависит от n. Далее,

$$\det\left(\pi_n - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\lambda S_n\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\lambda\gamma_i\right) = \sum_{k=0}^{n}\Gamma_k(n)(-\lambda\omega)^k\left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^k$$

для некоторых $\Gamma_k(n)$, зависящих от γ_i. Разобьем последнюю сумму на три слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\Gamma_k(n)(-\lambda\omega)^k\left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^k + \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{n-1}\Gamma_k(n)\times$$
$$\times(-\lambda\omega)^k\left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^k + \gamma_1\ldots\gamma_n(-\lambda\omega)^n\left(\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}\right)^n = \sigma_1(n) + \sigma_2(n) + \sigma_3(n).$$

Тогда правый интеграл в равенстве (8) станет суммой трех соответствующих интегралов $I_1(n)$, $I_2(n)$, $I_3(n)$. У подынтегральных функций в $I_1(n)$ и $I_2(n)$ главными членами в экспонентах при достаточно больших $\lambda > 1$ будут

$$\exp\left\{-\frac{\omega^4}{2}\frac{\|x\|^8}{(p(Sx))^4}\right\}\exp\left\{-\frac{\omega^2\lambda^2}{2}\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}(T^{-1}Sx, Sx)\right\}.$$

Комбинируя сказанное, приходим к необходимости оценки следующего интеграла:

$$\Gamma_k(n)(-\lambda\omega)^k c_n(T)\int_{H_n}\left(\frac{\|x\|}{p(Sx)}\right)^{2k}\exp\left\{-\frac{\omega^4}{2}\frac{\|x\|^8}{(p(Sx))^4}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\omega^2\lambda^2}{2}\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}(T^{-1}Sx, Sx)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}x, x)\right\}dx. \tag{9}$$

По свойствам оператора S $\Gamma_k(n) \le a_k\gamma_1\dots\gamma_k$, где a_k не зависит от n. Далее рассматриваем нечетные $n = 2m+1$.

При $k = 0,\dots,[\frac{n}{2}]$

$$\omega^k\left(\frac{\|x\|}{p(Sx)}\right)^{2k}\exp\left\{-\frac{\omega^4}{2}\frac{\|x\|^8}{(p(Sx))^4}\right\} \le \frac{b_k}{\omega^k\|x\|^{2k}}$$

для некоторой последовательности b_k, поскольку $\exp\{-t^4+t^2\} \le L$, L — константа и $\tau^N e^{-\tau} \le N^N$ при $N\in\mathbb{N}$, $\tau \ge 0$.

Так как n — нечетное, интеграл $c_n(T)\int\limits_{H_n} 1/\|x\|^{2k}\exp\{-(T^{-1}x,x)/2\}dx$ сходится и $1/\|x\|^i \le$ $\le 1/\|x\|^j$ при $i \ge j$, $i,j\in\mathbb{N}$, получаем, что подынтегральная функция в $I_1(n)$ оценивается сверху рядом

$$1+\gamma_1 L\frac{a_1b_1}{\omega}\frac{1}{\|\pi_{2+1}x\|^2}+\gamma_1\gamma_2 L\frac{a_2b_2}{\omega^2}\frac{1}{\|\pi_{4+1}x\|^4}+\dots.$$

Накладывая дополнительные ограничения на числа γ_i, добиваемся суммируемости ряда на H по мере μ. Теперь из теоремы Лебега, примененной к $I_1(n)$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} I_1(n) = \int\limits_H f\left(CA^{-1}x+\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx\right)\exp\left\{-(p(CA^{-1}x+\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}Sx))^4\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\omega\frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2}(T^{-1}AC^{-1}Sx,x)-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4}(T^{-1}AC^{-1}Sx,AC^{-1}Sx)\right\}J(x)\mu(dx). \tag{10}$$

При $k = [\frac{n}{2}]+1,\dots,n-1$ после замены $x = S^{-1}y$ в интеграле (9) приходим к выражению

$$\frac{\Gamma_k(n)(\lambda\omega)^k c_n(T)}{\gamma_1\dots\gamma_n}\int\limits_{H_n}\left(\frac{\|S^{-1}y\|}{p(y)}\right)^{2k}\exp\left\{-\frac{\omega^4}{2}\frac{\|S^{-1}y\|^8}{(p(y))^4}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\omega^2\lambda^2}{2}\frac{\|S^{-1}y\|^4}{(p(y))^4}(T^{-1}y,y)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}S^{-1}y,S^{-1}y)\right\}dx. \tag{11}$$

Пусть $\Omega(e)de$ — элемент сферы $\{\|e\| = 1\}$ в H_n. Тогда для интеграла (11) получаем следующую оценку:

$$\frac{a_k(\lambda\omega)^k c_n(T)}{\gamma_{k+1}\dots\gamma_n}\int\limits_{\|e\|=1}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\|S^{-1}e\|}{p(e)}\right)^{2k} r^{n-1}\exp\left\{-\frac{\omega^4}{2}\frac{\|S^{-1}e\|^8}{(p(e))^4}r^4\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\omega^2\lambda^2}{2}\frac{\|S^{-1}e\|^4}{(p(e))^4}(T^{-1}e,e)r^2\right\}\Omega(e)dedr.$$

Далее, преобразование $\rho = \omega\lambda\frac{\|S^{-1}e\|^2}{(p(e))^2}r$ приводит к

$$\frac{a_kc_n(T)}{\gamma_{k+1}\dots\gamma_n}\int\limits_{\|e\|=1}\int\limits_0^{+\infty}(\omega\lambda)^{k-n}\left(\frac{\|S^{-1}e\|}{p(e)}\right)^{2k-2n}\rho^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(p(e))^4\rho^4}{\lambda^4}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}e,e)\rho^2\right\}\times$$
$$\times\Omega(e)ded\rho = \frac{a_kc_n(T)}{\gamma_{k+1}\dots\gamma_n}\int\limits_{H_n}\frac{1}{(\omega\lambda)^{n-k}}\left(\frac{p(z)}{\|S^{-1}z\|}\right)^{2(n-k)}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(p(z))^4}{\lambda^4}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}z,z)\right\}dz. \tag{12}$$

Так как для $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{n-k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\frac{t}{a}}{a^{2(n-k)-1}\left(1+\frac{t^2}{a^2}\right)^{n-k}} \le \frac{\zeta}{a^{2(n-k)-1}},$$

где $\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)}$, и $(p(z))^{2(n-k)} \exp\{-(p(z))^4/2\} \le \theta_k$ для некоторой последовательности θ_k, то правый интеграл в равенстве (12) не превосходит

$$\gamma_k \zeta^{n-k+1} \theta_k a_k c_n(T) \int_{H_{k-1}} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}z, z)\right\} dz_1 \ldots dz_{k-1}}{\left(z_1^2 + \ldots + z_{k-1}^2\right)^{\frac{n-k-1}{2}}}.$$

Последнее выражение конечно в силу выбора чисел k. Уменьшая нужным образом γ_i, добиваемся, чтобы $I_2(n)$ оценивался сверху остатком сходящегося ряда. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} I_2(n) = 0. \tag{13}$$

Перейдем к случаю $k = n$. Применив рассмотренные выше переходы и использовав нечетность n, получим

$$I_3(n) = -c_n(T) \int_{H_n} f\left(CA^{-1}\left\{\frac{(p(z))^2}{\omega\lambda \|S^{-1}z\|^2} S^{-1}z\right\} + z/\lambda\right) \exp\left\{-\left(p\left(CA^{-1}\left\{\frac{(p(z))^2}{\omega\lambda\|S^{-1}z\|^2} S^{-1}z\right\} + z/\lambda\right)\right)^4\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\left(T^{-1}AC^{-1}z, \frac{(p(z))^2}{\omega\lambda\|S^{-1}z\|^2} S^{-1}z\right) - \frac{1}{2\lambda^2}(T^{-1}AC^{-1}z, AC^{-1}z)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(p(z))^4}{(\omega\lambda)^2 \|S^{-1}z\|^4} (T^{-1}S^{-1}z, S^{-1}z)\right\} dz. \tag{14}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p(\pi_n z))^2}{\omega \|S^{-1}\pi_n z\|^2} S^{-1}\pi_n z = 0 \text{ при } z \ne 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} I_3(n) = -\int_H f(z/\lambda) \exp\{-(p(z/\lambda))^4\} \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}(T^{-1}AC^{-1}z, AC^{-1}z)\right\} dz =$$

$$= -\int_H f(CA^{-1}z) \exp\{-(p(CA^{-1}z))^4\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}z, z)\right\} dz. \tag{15}$$

Переходя в равенстве (8) к пределу при $n \to \infty$ и используя (10), (13), (15), заключаем, что

$$\int_H f(CA^{-1}y) \exp\{-(p(CA^{-1}y))^4\} \mu(dy) = \int_H f\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-(p(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx))^4\right\} \exp\{\omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} (T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} \times$$

$$\times (T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx)\} J(x) \mu(dx) - \int_H f(CA^{-1}z) \exp\{-(p(CA^{-1}z))^4\} \mu(dz).$$

Следовательно, при достаточно больших λ интегралы (5) и (6) равны. При остальных λ равенство вытекает из аналитичности.

В интеграле (6) $\exp\{-(p(CA^{-1}x - \omega\|x\|^2/(p(Sx))^2Sx))^4\}$ раскладывается на множители так, что последний имеет вид $\exp\{-\omega^4\|x\|^8/(p(Sx))^4\}$. Он оценивает функцию f и экспоненты. Тогда, применяя неравенство Коши–Буняковского и лемму, получаем существование рассмотренного интеграла при комплексных A, C таких, что

$$AC^{-1} = \lambda I + TB,\ B \in B(H^{\mathbb{C}}),\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ и } |\lambda| > \|T\|\|B\|.$$

Таким образом, интеграл Фейнмана (5) — это значение гауссовского интеграла (6) при комплексных параметрах. ■

Приводимая далее теорема 2 является следствием теоремы 1. Для того чтобы ее сформулировать, введем дополнительные обозначения. Пусть Q — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_q$ и нормой $\|\cdot\|_q$, $f_1, \dots, f_n, \dots$ — ортонормированный базис в пространстве Q, $\widehat{T} \in B(Q)$ — симметричный положительно-определенный ядерный оператор с собственными векторами $f_1, \dots, f_n, \dots$, $I_q \in B(Q)$ — единичный оператор. Положим

$$\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} u(t,q) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1} f_i, f_j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(t,q)$$

для произвольного обратимого оператора $A \in B(Q)$ и функции $u\colon [0,\infty) \times Q \to \mathbb{C}$.

Замечание 2. Оператор A^* определяется, аналогично сопряженному оператору, равенством $(Ax,y)_q = (x,A^*y)_q$ $\forall x,y \in Q^{\mathbb{C}}$, в котором скалярное произведение заменено его аналитическим продолжением в комплексную область.

Предположим, что $p_k\colon Q \times \ldots \times Q \to \mathbb{R}$ — k-линейная непрерывная симметричная форма, $k = 1,2,3,4$; $p_4(q,q,q,q) > 0$ при любом q, лежащем в Q и не равном нулю. Пусть также $m(q) = (p_4(q,q,q,q))^{1/4}$ и для некоторых $l_k > 0$ справедливы неравенства: $|p_k(q_1,\dots,q_k)| \le l_k m(q_1)\ldots m(q_k)$, $k = 1,2,3,4$. Через $v(q)$ обозначим сумму $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i(q,\dots,q)$.

Тогда эволюционное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,q) = \frac{1}{2}\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} u(t,q) + v(Cq)u(t,q) \tag{16}$$

и начальное условие

$$u(0,q) = u_0(Cq) \tag{17}$$

определяют задачу Коши для данного уравнения.

Пусть $t > 0$; $G(Q)$ — пространство функций $w\colon Q \to \mathbb{C}$, для каждой из которых существует аналитическое продолжение $\widetilde{w}\colon Q^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, и при этом найдутся константы $C > 0$, $1/(4\|\widehat{T}\|) > \varepsilon > 0$ такие, что $|\widetilde{w}(z)| \le C\exp\{\varepsilon\|z\|^2\}$ для любых z из $Q^{\mathbb{C}}$. Положим $E = \{x \in C([0,t],Q) : x(t) = 0\}$.

Следующая теорема описывает связь между решением задачи (16), (17) и интегралами Фейнмана.

Теорема 2. *Пусть $u_0 \in G(Q)$, операторы $A, C \in B(Q^{\mathbb{C}})$ обратимы и $AC^{-1} = \lambda I_q + \widehat{T}B$ для некоторых $B \in B(Q^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $|\lambda| > \|\widehat{T}\|\|B\|$. Предполагается также, что существует* *аналитическая кривая* $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ *такая, что* $\varphi(t) \notin \sigma(A)$ *для любого* $t \in [0,1]$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|A\|$. *Тогда задача Коши имеет решение, представимое фейнмановским интегралом,*

$$u(t,q) = \int\limits_E \exp\left\{\int\limits_0^t v(C(q + x(\tau)))d\tau\right\} u_0(C(x(0) + q)) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau\right\} dx.$$

Доказательство. Пусть A, $B \in B(Q)$, A — обратимый оператор, λ — положительное число, $\lambda > \|\widehat{T}\|\|B\|$. Положим $C = (\lambda I_q + \widehat{T}B)^{-1}A$. На пространстве E_0, состоящем из функций $x \in E$ таких, что $x(\tau) \in A^{-1}\widehat{T}^{1/2}Q$ для любого $\tau \in [0,t]$, почти всюду на $[0,t]$ существует $x'(\tau) \in A^{-1}\widehat{T}^{1/2}Q$, и $\int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau < \infty$, определена квадратичная форма $b(x) = \int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau$, порождающая меру Винера [Смолянов, Шавгулидзе, 1990]. В дальнейшем понадобятся следующие интегралы по данной мере:

$$a_1(t,q,A,B,\lambda) = \int\limits_E \exp\left\{\int\limits_0^t v(C(q + x(\tau)))d\tau\right\} u_0(C(x(0) + q)) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau\right\} dx, \qquad (18)$$

$$a_2(t,q,A,B,\lambda) = \int\limits_E [\frac{1}{2}\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} \exp\left\{\int\limits_0^t v(C(q + x(\tau)))d\tau\right\} u_0(C(x(0) + q)) +$$
$$+ v(Cq)\exp\left\{\int\limits_0^t v(C(q + x(\tau)))d\tau\right\} u_0(C(x(0) + q))] \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_q d\tau\right\} dx. \qquad (19)$$

Поскольку параметры вещественны, a_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} a_1(t,q,A,B,\lambda) = \frac{1}{2}\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} a_1(t,q,A,B,\lambda) + v(Cq)a_1(t,q,A,B,\lambda)$$

и начальному условию $a_1(t,q,A,B,\lambda) = u_0(Cq)$ (см. [Далецкий, Фомин, 1983]). Следовательно,

$$a_1(t,q,A,B,\lambda) = \int\limits_0^t a_1(\tau,q,A,B,\lambda)d\tau + u_0(Cq). \qquad (20)$$

Это равенство продолжается по аналитичности на комплексные параметры в силу существования и аналитичности фейнмановских интегралов (18), (19). Чтобы доказать последнее, возьмем произвольное $0 < \delta < 1/2$ и построим новое пространство H_δ. Каждый элемент $\psi \in E$ представим в виде $\psi(\tau) = h(\tau) + e(\tau)\psi(0)$, где $e(\tau) = (t - \tau)/t$. Тогда $h(0) = h(t) = 0$ и $h(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n\tau/t)$ для некоторых $b_n \in Q$ и всех τ на отрезке $[0,t]$. Обозначим через H_δ пространство функций $h \in C([0,t],Q)$, для каждой из которых $h(0) = h(t) = 0$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2\delta}\|b_n\|_q^{\,2} < \infty$.

Оно является гильбертовым относительно скалярного произведения, определяемого формулой $(h_1, h_2)_\delta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2\delta}(b_n^1, b_n^2)_q$ для $h_i(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^i \sin(\pi n\tau/t)$, $i = 1, 2$, $\tau \in [0, t]$. Значит, система $\left\{\frac{1}{i^\delta}\sin(\pi i\tau/t) f_j\right\}_{i,j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис H^δ. Далее,

$$w(h) = \int\limits_0^t (\widehat{T}^{-1}h'(\tau), h'(\tau))_q d\tau = \frac{\pi^2}{2t}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(1-\delta)} n^{2\delta}(\widehat{T}^{-1}b_n, b_n)_q.$$

Следовательно, квадратичная форма w порождает в H_δ гауссовскую меру с ядерным корреляционным оператором. Полагая в теореме 1 $H = H_\delta \oplus Q$, получаем существование интегралов Фейнмана (18), (19). Из равенства (20) вытекают два условия:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_1(t, q, A, B, \lambda) = a_2(t, q, A, B, \lambda),$$
$$a_1(0, q, A, B, \lambda) = u_0(Cq).$$

Учитывая свойства оператора S из теоремы 1, получаем следующее равенство:

$$a_2(t, q, A, B, \lambda) = \frac{1}{2}\Delta_{A^{-1}\widehat{T}(A^*)^{-1}} a_1(t, q, A, B, \lambda) + v(Cq) a_1(t, q, A, B, \lambda).$$

Остается заметить, что $u(t, q) = a_1(t, q, A, B, \lambda)$ является решением исходной задачи (16), (17). ■

Автор выражает благодарность Е. Т. Шавгулидзе за постановку задачи, внимание к работе и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

Альбеверио С., Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Некоторые методы квантования конечномерных гамильтоновых систем со связями // ДАН. 1998. Т. 361, № 4. — С. 727–730.

Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983.

Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Бесконечномерные уравнения Шрёдингера с полиномиальными потенциалами и интегралы Фейнмана по траекториям // ДАН. 2006. Т. 408, № 1. — С. 28–33.

Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. — М.: МГУ, 1990. — С. 45–53.

Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Формулы Фейнмана для решений бесконечномерных уравнений Шрёдингера с полиномиальными потенциалами // ДАН. 2003. Т. 390, № 3. — С. 321–324.

Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 84, P. 238–242.