**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 3 С. 483−496**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.622

О построении линейно неявных схем, *LN*-эквивалентных неявным методам Рунге–Кутты

А. М. Зубанов, Н. Н. Кутрухин, П. Д. Ширков[a]

Филиал «ДИНО» Международного университета природы, общества и человека «Дубна»,
Россия, 141800, Московская обл., г. Дмитров, мкрн ДЗФС, д. 23

E-mail: [a] pdshirkov@gmail.com

Получено 10 апреля 2012 г.,
после доработки 18 июля 2012 г.

В работе предложен новый класс безитерационных схем (явно-неявных), который позволяет получать методы, повторяющие на линейных неавтономных задачах свойства лучших неявных жестко-точных методов Рунге–Кутты [Хайрер, Ваннер,1999] – *RadauIIA* и *LobattoIIIC*. Для этого используется понятие *LN*-эквивалентности методов [Ширков, 2012]. С использованием среды аналитических вычислений получены уравнения порядка и затухания таких методов и найдены коэффициенты некоторых схем до 3-го порядка включительно. Проводится численное исследование новых методов на классических тестах, применяемых для проверки схем, разрабатываемых для жестких систем.

Ключевые слова: жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, жестко-точные методы Рунге–Кутты и схемы Розенброка, устойчивость и *L*-эквивалентность

Constructing of linearly implicit schemes which are *LN*-equivalent to implicit Runge–Kutta methods

A. M. Zubanov, N. N. Kutruhin, P. D. Shirkov

Dmitrov branch of International University of nature, society and man "Dubna", DZFS, b.23, Dmitrov, Moscow region, 141800, Russia

Abstract. – New family of linearly implicit schemes are presented. This family allows to obtain methods which are equivalent to stiffly accurate implicit Runge–Kutta schemes (such as *RadauIIA* and *LobattoIIIC*) on non-autonomous linear problems. Notion of *LN*-equivalence of schemes is introduced. Order conditions and stability conditions of such methods are obtained with the use of media for computer symbolic calculations. Some examples of new schemes have been constructed. Numerical studying of new method have been done with the use of classical tests for stiff problems.

Keywords: stiff systems of ordinary differential equations, stiffly accurate Runge–Kutta methods and Rosenbrock schemes, stability and *L*-equivalence

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 483–496 (Russian).

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{u}),\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0,$$
$$\vec{u} = (u_1,\dots,u_n)^T,\ \vec{f} = (f_1,\dots,f_n)^T,\ \vec{u}_0 = (u_{01},\dots,u_{0n})^T \in R^n. \tag{1.1}$$

Современная теория и практика численного решения систем ОДУ выделяет среди многообразия методов одношаговые *схемы Рунге–Кутты* (*РК*):

$$\vec{K}_i = \vec{f}\left(t + c_i\tau, \vec{y}(t) + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\vec{K}_j\right),\quad i = 1,\dots,s,$$
$$\vec{y}(t+\tau) = \vec{y}(t) + \tau\sum_{j=1}^{s} b_j\vec{K}_j, \tag{1.2}$$

где s – количество стадий, τ – локальный шаг сетки численного интегрирования задачи (1.1), $\vec{y}(t)$ – ее разностное решение; c_i (абсциссы), a_{ij} и b_j (веса) – коэффициенты схемы, а $\vec{K}_j$ – неизвестные стадии, геометрический смысл которых – направление движения вдоль траектории решения.

Для решения сложных прикладных задач наиболее надежными (а иногда – и единственно пригодными) являются ***жестко-точные методы*** [Хайрер, Ваннер, 1999; Деккер, Вервер, 1988], определяемые простым условием на коэффициенты схемы

$$a_{sj} = b_j,\quad j = 1,\dots,s. \tag{1.3}$$

Такие методы обладают рядом специфических свойств, например:

1) жестко точные методы L-устойчивы;
2) локальные и глобальные погрешности жестко точных методов на линейных неавтономных задачах имеют одинаковую форму главного остаточного члена (т. е. одинаковые порядки малости и по величине шага, и по параметру жесткости).

Однако для выполнения одного шага численного интегрирования неявные методы *РК* требуют организации ньютоновских итераций и контроля их сходимости, что заметно усложняет их использование.

Чтобы упростить процедуру перехода на новый временной слой, Розенброк [Rosenbrock, 1963] предложил записать одну ньютоновскую итерацию для определения неизвестных значений стадий в *диагонально-неявном* РК методе (ДНРК) (1.2) и расставить в полученной записи свободные коэффициенты. При этом (как было показано, например, в [Ширков, 1992 (1)]) вид получаемой схемы будет зависеть от выбора начальных приближений для неизвестных векторов стадий $\vec{K}_j$, $j = 1\dots s$. В наиболее общем случае для их определения приходится решать s систем линейных уравнений размерности n:

$$\left[E - \tau\gamma_i\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}}\left(t + c_i^{(1)}\tau, \vec{y}(t) + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(1)}\vec{K}_j\right)\right]\cdot\vec{K}_j =$$
$$= \vec{f}\left(t + c_i^{(2)}\tau, \vec{y}(t) + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(2)}\vec{K}_j\right) + \tau\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{u}}\left(t + c_i^{(3)}\tau, \vec{y}(t) + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(3)}\vec{K}_j\right)\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_{ij}\vec{K}_j, \tag{1.4}$$

$i = 1, \dots, s,$

где E – единичная матрица, а $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}$ – *матрица Якоби* исходной системы (1.1), вычисляемая, вообще говоря, при различных значениях независимого переменного t и искомого решения $\vec{y}$. Для компактного задания методов (1.4) по аналогии с методами РК удобно использовать таблицы *Бутчера* [Хайрер, Ваннер, 1999; Ширков, 2012; Butcher, 1987].

Такие методы рассматривались в различных работах (см., например, [Хайрер, Ваннер, 1999; Деккер, Вервер, 1988; Калиткин, Панченко, 1999; Кочетков, Ширков, 1997; Кочетков, Ширков, 2001] и приведенную там библиографию), однако они теряют необходимые для жестких задач свойства. Так, в [Ширков, 2012] показано, что среди методов множества (1.4) с действительными коэффициентами нет схем, совпадающих на линейных неавтономных задачах с жестко точными методами РК. То есть для сильно-жестких задач такие методы малопригодны.

В ряде работ [Ширков, 1992 (2); Лимонов и др., 2009; Зубанов и др., 2011] методы *Розенброка* обобщены на случай с комплексными коэффициентами. Однако даже в этом случае (см. [Зубанов, Ширков, 2011]) не удается получить методы высокого порядка (выше второго), совпадающие на линейных задачах с жестко-точными методами хотя бы для автономного случая.

В настоящей работе предложены новые классы одношаговых схем, не требующие итераций при определении стадий и совпадающие по своим свойствам с жестко-точными методами на линейных неавтономных задачах.

2. Устойчивость и *LN*-эквивалентность одношаговых методов

Устойчивость

Для построения новых схем рассмотрим функцию устойчивости неявных методов *РК*. Будем использовать модельную линейную задачу

$$f(t,u) = \lambda(t)u,\; n = 1. \tag{2.1}$$

Если применить любой s-стадийный одношаговый метод (РК (1.2) или Розенброка (1.4)) к задаче (2.1), то разностное решение может быть представлено в виде

$$y(t+t) = R(z_1,\ldots,z_s)\,y(t);\quad z_i = \lambda(t + c_i t),\quad i = 1,\ldots,s, \tag{2.2}$$

где $R(z_1,\ldots,z_s)$ – рациональная функция многих переменных, называемая *функцией устойчивости* метода [Хайрер, Ваннер, 1999; Ширков, 2012; Декер, Вервер, 1988]. Если модельная задача (2.1) автономна $(\lambda(t) = \lambda)$ или если $c_j = \text{const}$ (при всех $j = 1,\ldots,s$), то функция устойчивости зависит только от одного аргумента. При этом $R = P_s(z)/Q_s(z)$, где $P_s(z)$ и $Q_s(z)$ – многочлены степени s (здесь, как и ранее, s – число стадий одношагового метода).

Заметим, что зависимость функции устойчивости (2.2) от многих переменных в случае модельной неавтономной задачи (2.1) является принципиальным моментом для дальнейшего рассмотрения. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 1. Рассмотрим 2-стадийные неявные методы РК. Их функция устойчивости в общем случае имеет вид

$$R(z_1,z_2) = \frac{1 + (b_1 - a_{11})\cdot z_1 + (b_2 - a_{22})\cdot z_1 + D\cdot z_1\cdot z_2}{1 - (a_{11}\cdot z_1 + a_{22}\cdot z_2) + \Delta_A\cdot z_1\cdot z_2},$$
$$D = [\Delta_A - b_1\cdot(a_{22} - a_{12}) - b_2\cdot(a_{11} - a_{21})],$$

где Δ_A – определитель матрицы коэффициентов метода. Отсюда сразу следует, что для жестко-точных методов РК – *LobattoIIIC* и *RadauIIA* – в силу условия (1.3) имеем

$$R(z_1,z_2)=\frac{1+(a_{21}-a_{11})\cdot z_1}{1-(a_{11}\cdot z_1+a_{22}\cdot z_2)+\Delta_A\cdot z_1\cdot z_2}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что при большем числе стадий вид функции устойчивости усложняется, а числитель и знаменатель образуют нелинейные формы от переменных $z_i, i=1,\dots s.$ Именно это обстоятельство и является главным препятствием построения аналогов безытерационых схем на множестве традиционных методов типа Розенброка вида (1.4), эквивалентных жестко точным методам на линейных неавтономных задачах (2.1).

Дадим некоторые важные для дальнейшего изложения определения, связанные с понятием устойчивости методов. Пусть z – комплексная величина.

Определение 1. *Метод называется A-устойчивым, если* $\left|R(z)\right|\le 1$ *для всех z:* $Re(z)\le 0$. *В этом случае функция устойчивости также называется A-устойчивой.*

Из *A-устойчивости* метода следует, что $|y(t+t)|\le\left|y(t)\right|$ для любой пары (τ,λ), удовлетворяющей условию $\tau\lambda=z$. В этом случае разностное решение повторяет свойство устойчивости (невозрастания при $\lambda\ge 0$) точного экспоненциального решения соответствующей модельной задачи (2.1).

Для жестких задач (см., например, [Хайрер, Ваннер, 1999; Ширков, 2012; Декер, Вервер, 1988]) полезно иметь схемы с более сильным свойством устойчивости, которое повторяет асимптотическое поведение точного решения модельной задачи (1.2) при $\tau\lambda\to-\infty$.

Определение 2. *Метод называется L-устойчивым, если он A-устойчив и* $\left|R(z)\right|\to 0$ *при* $Re(z)\to-\infty$. *В этом случае функция устойчивости также называется L-устойчивой.*

Дадим обобщение понятий *A-* и *L*-устойчивости на случай неавтономных задач (2.1):

Определение 3. *Метод называется AN-устойчивым, если* $\left|R(z_1,\dots,z_s)\right|\le 1$ *для всех векторов* $z=(z_1,\dots,z_s)^T$, *у которых* $Re(z_i)\le 0$ *при всех* $1\le i\le s$ *и* $z_i=z_j$, *если* $c_i=c_j$.

Определение 4. *Метод называется LN-устойчивым, если он AN-устойчив и* $\left|R(z_1,\dots,z_s)\right|\to 0$ *для любого* z_i: $Re(z_i)\to-\infty$ $(i=1,\dots,s)$.

Очевидно, что если метод *AN*-устойчив, то он и *A*-устойчив. Аналогичное утверждение справедливо и относительно свойств *LN*- и *L*-устойчивости. Обратное, вообще говоря, неверно. Проиллюстрируем это следующим примером.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим одностадийный метод *Розенброка*, задаваемый таблицами

$$\begin{array}{c|c|c} c_1 & c_2=0.5 & \\ \hline & & b_1=1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \gamma_1=1 \\ \hline & b_1=1 \end{array} \tag{2.4}$$

Эта схема изучена, например, в [Калиткин, Панченко, 1999] (формула (22)). Она имеет 1-й порядок точности, *L*-устойчива и содержит один свободный параметр (c_1), который определяет ее свойства на неавтономной задаче (2.1). Действительно, функция устойчивости метода (2.4) имеет вид

$$R(z_1,z_2)=\frac{1-z_1+z_2}{1-z_1}. \tag{2.5}$$

Легко видеть, что схема будет *LN*-устойчива тогда и только тогда, когда $z_1\equiv z_2$, что равносильно условию $c_1=c_2=0.5.$ В противном случае метод (2.4) не будет даже *AN*-устойчивым, так как на комплексной плоскости $z = x + i \cdot y$ существуют точки $(Re(z_1) < 0, Re(z_2) < < -2 \cdot Re(1 - z_1) < 0)$, для которых $R(z_1, z_2) < -1$.

Из приведенных определений и примеров видно, что для проверки свойств *AN*- и *LN*-устойчивости метода необходимо исследовать поведение функции устойчивости, которая зависит от s комплексных переменных. С ростом числа стадий эта задача становится серьезной проблемой.

LN-эквивалентность одношаговых методов

Для упрощения исследования *AN*-устойчивости схем типа Розенброка в [Ширков, 2012; Ширков, 2001] введено понятие *родственных* (*L*- и *LN*-эквивалентных) методов и сформулирован критерий такой эквивалентности для *ДНРК* методов и схем *Розенброка* с действительными коэффициентами, основанный на сравнении таблиц Бутчера.

Дадим следующее

Определение 5. *Два различных одношаговых метода называются L- (LN-) эквивалентными, если для любой автономной (неавтономной) задачи* (2.1) *и при любых* $\tau > 0$ *их разностные решения совпадают.*

Очевидно, что необходимым и достаточным условием *L*- и *LN*-эквивалентности двух различных одношаговых методов является совпадение их функций устойчивости на соответствующих модельных задачах.

Пример 3. Рассмотрим одностадийный *L*-устойчивый метод Розенброка, задаваемый таблицами (2.4) и условием $c_1 = c_2$. Его функция устойчивости на неавтономной задаче (2.1) имеет вид

$$R(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - z_1}.$$

Точно такую же функцию устойчивости для неавтономной задачи (2.1) имеет и простейший *ДНРК* метод – неявная схема Эйлера. Значит, методы являются *LN*-эквивалентными.

Замечание. В работе [Ширков, 2012] проведено исследование *AN*-устойчивости однократных диагонально-неявных Рунге–Кутты *(ОДНРК)* методов и рассмотрена возможность построения на их основе *ROW*-методов (*методов Розенброка–Ваннера* [Хайрер, Ваннер, 1999]) с улучшенными свойствами устойчивости на линейных неавтономных или нелинейных задачах. Показано, что на основе известных *ОДНРК* методов нельзя построить *LN*-устойчивые *ROW*-методы для численного интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Между тем жестко-точные РК методы являются *LN*-устойчивыми.

3. Схемы с комплексными коэффициентами и факторизованные методы

Рассмотрим два множества схем типа *Розенброка*.

Схемы с комплексными коэффициентами

Начнем с частного случая семейства (1.4) с *комплексными коэффициентами*, у которых первая (с индексом 0; $\gamma_0 = a_{0,0} = \rho_{0,0} = 0$) стадия является вырожденной – обычной явной стадией Рунге–Кутты:

$$\vec{y}(t+\tau) = \vec{y}(t) + \tau \cdot \sum_{i=0}^{s} \mathrm{Re}(\omega_i \cdot \vec{K}_i),$$
$$\left(E - \tau \cdot \gamma_i \cdot J_{i,1}\right) \cdot \vec{K}_i = \vec{F}(\vec{y} + \tau \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \mathrm{Re}(a_{i,j} \cdot \vec{K}_j)) + \tau \cdot J_{i,2} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} \rho_{i,j} \cdot \vec{K}_j\right), \tag{3.1}$$
$$i = 0, \ldots, s.$$

Она нужна, в первую очередь, для того чтобы увеличить количество различных «деревьев» при разложении в ряд Тейлора численного решения (см., например, [Зубанов, Ширков, 2011; Alexander, 1977]). Здесь $J_{i,k} = \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\left(\vec{y} + \tau \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \mathrm{Re}(b^{(k)}{}_{i,j} \cdot \vec{K}_j) \right)$ – якобианы системы (1.1), вычисляемые, вообще говоря, при различных значениях аргумента, а коэффициенты $\omega_i, \gamma_i, a_{i,j}, b^{(k)}_{i,j}, \rho_{i,j}$ – комплексные числа; s – число нетривиальных стадий, E – единичная матрица.

Семейство (3.1), в частности, содержит методы, полученные в [Лимонов и др., 2009] (в этом случае $\omega_0 = a_{i,0} = b^{(k)}_{i,0} = \rho_{i,0} \equiv 0$). Оно исследовано в работе [Зубанов, Ширков, 2011], в которой показано, что среди схем семейства (3.1) ***не существует*** методов, L-эквивалентных методам *RadauIIA* и *LobattoIIIC*.

Факторизованные схемы

Рассмотрим схемы, предложенные в [Зубанов, Ширков, 2011] (они являются обобщением на нелинейные задачи (1.1) *ABC*-схем Филиппова [Филиппов, 2004]):

$$\vec{y}(t+\tau) = \vec{y}(t) + \tau \cdot \sum_{i=0}^{s} b_i \cdot \vec{K}_i,$$

$$\left[E - \tau \cdot \gamma_{i,1} \cdot J_{i,1}(d) + \tau^2 \cdot \gamma_{i,2} \cdot (J_{i,1}(d))^2 \right] \cdot \vec{K}_i = \vec{F}(\vec{y} + \tau \cdot \sum_{j=0}^{i-1} a_{i,j} \cdot \vec{K}_j) + \tau \cdot J_{i,2}(h) \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} g_{i,j} \cdot \vec{K}_j \right), \quad (3.2)$$

$$i = 0, \ldots, s,$$

у которых первая (с индексом 0) стадия также вырождена $(\gamma_{0,j} = a_{0,j} = g_{0,j} = 0)$, а при вычислении якобианов в левой и правой частях (3.3) используются различные наборы коэффициентов:

$$J_{i,1}(d) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\left(\vec{y} + \tau \cdot \sum_{j=0}^{i-1} d^{(k)}{}_{i,j} \cdot \vec{K}_j \right), \quad J_{i,2}(h) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\left(\vec{y} + \tau \cdot \sum_{j=0}^{i-1} h^{(k)}{}_{i,j} \cdot \vec{K}_j \right).$$

Здесь все коэффициенты – действительные числа. Оператор в левой части разлагается на линейные по степени якобиана множители (факторизуется), коэффициенты которых могут принимать комплексные значения. Такие схемы будем называть ***факторизованными методами Розенброка*** (***ФМР***).

На множестве (3.2) удается построить методы, L-эквивалентные жестко-точным методам *РК*.

Пример 4. Рассмотрим методы семейства (3.2) с одной нетривиальной стадией. Если выбрать значения коэффициентов в виде

$$b_1 = 1, \quad b_0 = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1/2, \quad g = -1/2 - a \ \text{(a, d, h – свободные параметры)}, \quad (3.3)$$

то получим подмножество схем, L-эквивалентных 2-стадийному методу *LobattoIIIC*. Его функция устойчивости на автономной задаче (2.1) имеет вид

$$R(z) = \frac{1}{1 - z + z^2/2}.$$

Выбирая значения коэффициентов в виде (a – параметр)

$$b_1 = 1, \quad b_0 = 0, \quad \gamma_1 = 2/3, \quad \gamma_2 = 1/6, \quad g = -1/6 - a, \quad d = h = (1/3 - a^2)/(1 - 2 \cdot a), \quad (3.4)$$

получим подмножество схем семейства (3.2), L-эквивалентных 2-стадийному методу *RadauIIA*. Его функция устойчивости на автономной задаче (2.1) имеет вид:

$$R(z) = \frac{1 + z/3}{1 - 2 \cdot z/3 + z^2/6}.$$

Таким образом, показано, что на множестве (3.2) можно строить схемы *L*-эквивалентные жестко-точным методам *РК*. Однако они не пригодны для неавтономных задач.

4. Новое семейство явно-неявных методов

Построим обобщение семейства (3.2). При этом учтем, что в случае *s*-стадийного метода *РК* нахождение неизвестных стадий для модельной задачи (2.1) может быть сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей, у которой суммарная степень входящих в нее якобианов равна числу стадий (т. е. *s*). Следовательно, знаменатель функции устойчивости есть степенная форма от якобианов (вычисленных при различных значениях абсцисс метода) до порядка *s* включительно.

Рассмотрим явно-неявные методы, задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned}
&\vec{y}(t+\tau)=\vec{y}(t)+\tau\cdot\sum_{i=0}^{s}(b_i\cdot\vec{K}_i),\quad \vec{K}_0=\vec{F}(t+c_0\cdot\tau,\vec{y}(t)),\\
&M_i\cdot\vec{K}_i=H_{0,i}\cdot\vec{F}\left(t+c_3^{(i)}\cdot\tau,y+\tau\cdot\sum_{j=0}^{i-1}a_j^{(i)}\cdot\vec{K}_j\right)+H_i\cdot\sum_{j=0}^{i-1}g_j^{(i)}\cdot\vec{K}_j,\quad i=1,...,s,
\end{aligned}\tag{4.1}$$

где матрицы M_i, $H_{0,i}$ и H_i есть билинейные формы от якобианов системы вида:

$$\begin{aligned}
&M_i=\left[E-\tau\cdot\gamma_1^{(i)}\cdot J_1^{(i)}-\tau\cdot\gamma_2^{(i)}\cdot J_2^{(i)}+\tau^2\cdot\gamma^{(i)}\cdot J_1^{(i)}\cdot J_2^{(i)}\right],\\
&H_{0,i}=\left[h_{0,0}^{(i)}\cdot E-\tau\cdot h_{0,1}^{(i)}\cdot J_1^{(i)}-\tau\cdot h_{0,2}^{(i)}\cdot J_2^{(i)}+\tau^2\cdot h_0^{(i)}\cdot J_1^{(i)}\cdot J_2^{(i)}\right],\\
&H_i=\left[E-\tau\cdot h_1^{(i)}\cdot J_1^{(i)}-\tau\cdot h_2^{(i)}\cdot J_2^{(i)}+\tau^2\cdot h^{(i)}\cdot J_1^{(i)}\cdot J_2^{(i)}\right],\\
&J_k^{(i)}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{u}}\left(t+c_k^{(i)}\cdot\tau,y+\tau\cdot\sum_{j=0}^{i-1}d_{k,j}^{(i)}\cdot\vec{K}_j\right),\ k=1,2;\ i=1,...,s.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

В общем случае число свободных коэффициентов *s*-стадийного метода растет квадратично и имеет вид $2+15*s+1.5*s*(s+1)$. Например, даже при $s=1$ имеем 20 параметров, которые можно использовать для получения схем с нужными свойствами.

Займемся построением аналогов *2-стадийных жестко-точных* методов Рунге–Кутты – *LobattoIIIC* и *RadauIIA*. При этом учтем, что функция устойчивости таких методов имеет вид (2.3). Для получения уравнений порядка и уравнений затухания будем использовать среду аналитических вычислений, описанную в [Зубанов и др., 2011] и развитую на неавтономный случай.

Выделим два подмножества семейства (4.1), (4.2).

Семейство А

В первом случае постараемся минимизировать число стадий. Рассмотрим случай $s=1$ и положим

$$\begin{aligned}
&M_1\equiv M=\left[E-\tau\cdot\gamma_1\cdot J_1-\tau\cdot\gamma_2\cdot J_2+\tau^2\cdot\gamma\cdot J_1\cdot J_2\right],\\
&H_{0,1}\equiv h\cdot E,\ c_3^{(1)}\equiv c_3,\ a_0^{(1)}\equiv a,\\
&H_1=\left[g_0\cdot E-\tau\cdot g_1\cdot J_1-\tau\cdot g_2\cdot J_2+\tau^2\cdot g\cdot J_1\cdot J_2\right],\ g_0^{(1)}\equiv 1,\\
&J_k^{(i)}\equiv J_k=\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{u}}(t+c_k\cdot\tau,y+\tau\cdot d_k\cdot\vec{K}_0),\quad k=1,2.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

Всего имеем 17 коэффициентов. Три из них $(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma)$ будут определены из требований *LN*-эквивалентности получаемых схем жестко-точным методам, а для остальных надо использовать уравнения порядка и различные дополнительные условия.

Функция устойчивости этих методов имеет вид

$$R(\vec{z}) = \frac{1 + D_1(\vec{z}) + D_2(\vec{z}) + D_3(\vec{z})}{1 - \gamma_1 \cdot z_1 - \gamma_2 \cdot z_2 + \gamma \cdot z_1 \cdot z_2}, \quad \vec{z} = (z_0, z_1, z_2, z_3), \tag{4.4}$$

где

$$D_1(\vec{z}) = (b_0 + g_0 \cdot b_1) \cdot z_0 - \gamma_1 \cdot z_1 - \gamma_2 \cdot z_2 + h \cdot b_1 \cdot z_3,$$
$$D_2(\vec{z}) = \gamma \cdot z_1 \cdot z_2 + \cdot z_0 \cdot [a \cdot h \cdot b_1 \cdot z_3 - (b_0 \cdot \gamma_1 + g_1 \cdot b_1) \cdot z_1 - (b_0 \cdot \gamma_2 + g_2 \cdot b_1) \cdot z_2],$$
$$D_3(\vec{z}) = (b_0 \cdot \gamma + g \cdot b_1) \cdot z_0 \cdot z_1 \cdot z_2.$$

При этом для *A*-устойчивости ***необходимо***, чтобы $D_3 = 0$, а для *L*-устойчивости – чтобы дополнительно выполнялось равенство $D_2 = 0$.

Для обеспечения *LN*-эквивалентности получаемых схем 2-стадийным жестко-точным методам необходимо оставить две различные абсциссы (см. (2.3)). Потребуем, чтобы $z_0 \equiv z_2$ и $z_1 \equiv z_3$ (т. е. $c_0 \equiv c_2$ и $c_1 \equiv c_3$). Тогда из сравнения (2.3) и (4.4) получим следующие уравнения (будем называть их *уравнениями затухания,* т. к. они обеспечивают *LN*-устойчивость метода (4.3)):

$$\begin{aligned}
&b_0 \cdot \gamma + b_1 \cdot g = 0, && (1)\\
&b_1 \cdot h = \gamma_1 + (a_{21} - a_{11}), && (2)\\
&b_0 + b_1 \cdot g_0 = \gamma_2, && (3)\\
&b_0 \cdot \gamma_1 + b_1 \cdot g_1 = \gamma + a \cdot [\gamma_1 + (a_{21} - a_{11})], && (4)\\
&b_0 \cdot \gamma_2 + b_1 \cdot g_2 = 0. && (5)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь a_{21} и a_{11} – коэффициенты таблицы Бутчера «родственного» (*LN*-эквивалентного жестко-точного метода).

Уравнения порядка до 3-го включительно имеют вид:

Таблица 1. Уравнения порядка метода (4.3)

***O*(τ)**	F	$1 = b_0 + b_1 \cdot (h + g_0)$	(6)
***O*(τ²)**	F_u	$\frac{1}{2} = b_1 \cdot [h \cdot (a + \gamma_1 + \gamma_2) + g_0 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) - (g_1 + g_2)]$	(7)
	F_t	$\frac{1}{2} = b_0 \cdot c_0 + b_1 \cdot [c_0 \cdot g_0 + c_1 \cdot h]$	(8)
***O*(τ³)**	$F_{u,u}$	$\frac{1}{6} = b_1 \cdot [\frac{h \cdot a^2}{2} + (h + g_0) \cdot (d_1 \cdot \gamma_1 + d_2 \cdot \gamma_2) - (d_1 \cdot g_1 + d_2 \cdot g_2)]$	(9)
	$(F_u)^2 \cdot F$	$\frac{1}{6} = b_1 \cdot \{[h \cdot (a + \gamma_1 + \gamma_2) + g_0 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)$ $- (g_1 + g_2)] \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) + [g - \gamma \cdot (h + g_0)]\}$	(10)
	$F_{t,t}$	$\frac{1}{6} = \frac{b_0 \cdot c_0^2}{2} + \frac{b_1}{2} \cdot [c_0^2 \cdot g_0 + c_1^2 \cdot h]$	(11)
	$F_{u,t} \cdot F$	$\frac{1}{3} = b_1 \cdot [h \cdot (a \cdot c_1 + \gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_0) + g_0 \cdot (\gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_0)$ $- (g_1 \cdot c_1 + g_2 \cdot c_0)]$	(12)
	$F_u \cdot F_t$	$\frac{1}{6} = b_1 \cdot \{h \cdot [c_0 \cdot a + c_1 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2)] + c_0 \cdot [g_0 \cdot (\gamma_1 + \gamma_2) - (g_1 + g_2)]\}$	(13)

Явно-неявные аналоги LobattoIIIC

Для получения методов, *LN*-эквивалентных 2-стадийной схеме *LobattoIIIC* (она имеет 2-й порядок точности), положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0.5.$ Тогда уравнения порядка (таблица 1, (6)–(8)) и уравнения затухания (4.5) легко решаются и можно получить параметрические подмножества.

Приведем некоторые примеры методов этого класса.

LIIIC A.1 (*a*, d_1 и d_2 – любые числа):

$$\begin{aligned}&\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0.5;\\ &c_1 = c_3 = 0,\ c_0 = c_2 = 1;\ b_0 = b_1 = 0.5;\\ &h = 1,\ g_0 = 0,\ g_1 = a + 0.5,\ g_2 = g = -0.5.\end{aligned} \tag{4.6}$$

LIIIC A.2 (метод с оценкой локальной погрешности; *a* и d_1 – любые числа):

$$\begin{aligned}&\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0.5;\\ &c_1 = c_3 = 1/3,\ c_0 = c_2 = 2/3;\ b_0 = b_1 = 0.5;\\ &h = 1,\ g_0 = 0,\ g_1 = a + 0.5,\ g_2 = g = -0.5;\\ &d_2 = d \cdot a - a^2/2 + 1/3,\ d_1 = d.\end{aligned} \tag{4.7}$$

В этом случае локальная погрешность метода имеет вид

$$\vec{e}_{loc} = \frac{\tau^3}{6} \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}} \right)^2 \cdot \vec{F} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial^2 t} \right].$$

и метод имеет «встроенную» стратегию выбора шага. Если выбрать $d = (2 - 3a^2)/(6(1-a)),$ то получим метод с одним вычислением якобиана для автономных задач.

Явно-неявные аналоги RadauIIA

Для получения методов, *LN*-эквивалентных 2-стадийной схеме *RadauIIA* 3-го порядка положим $\gamma_1 = 5/12, \gamma_2 = 1/4, \gamma = 1/6$. Заметим, что хотя уравнений порядка (таблица 1, (6)–(13)) и затухания (4.5) больше, чем свободных параметров (13 уравнений, 12 параметров), часть из уравнений выполняется тождественно в силу выбора значений $(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma)$. Общий вид подмножества методов этого класса также можно задать в параметрическом виде:

RIIA A.1 (*a* и $d_1 = d$ – любые числа, $d_2 = (3a-1)d + 2/3 - a^2/2$):

$$\begin{aligned}&\gamma_1 = 5/12,\ \gamma_2 = 1/4,\ \gamma = 1/6;\\ &c_1 = c_3 = 1/3,\ c_0 = c_2 = 1;\ b_0 = 3/4,\ b_1 = 1/4;\\ &h = 3,\ g_0 = -2,\ g_1 = 3a - 7/12,\ g_2 = -3/4,\ g = -1/2.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Если при этом положить $d = (4 - 3a^2)/(6(1-a)),$ то получим метод с одним вычислением якобиана для автономных задач.

Общая трудоемкость всех методов этого раздела (4.6)–(4.8) при использовании прямых методов линейной алгебры для нахождения неизвестного вектора стадий $\vec{K}_1$ на одном временном шаге составляет (5/3) · n^3 из-за умножения матрицы на матрицу.

Семейство Б

Построим методы, которые по форме своей реализации напоминают одну ньютоновскую итерацию, разрешенную относительно неизвестных стадий. Рассмотрим случай $s = 2$:

$$M_1 \equiv M_2 \equiv M = \left[E - \tau \cdot \gamma_1 \cdot J_1 - \tau \cdot \gamma_2 \cdot J_2 + \tau^2 \cdot \gamma \cdot J_1 \cdot J_2 \right],$$

$$M\cdot\vec{K}_1=\left[E-\tau\cdot g_1J_1-\tau\cdot g_2J_2+\tau^2\cdot g\cdot J_1J_2\right]\cdot\vec{F}(t+c_1\cdot\tau,\vec{y}+\tau\cdot a_1\vec{K}_0),$$
$$M\cdot\vec{K}_2=\left[E-\tau\cdot h_1J_1-\tau\cdot h_2J_2+\tau^2\cdot h\cdot J_1J_2\right]\cdot\vec{F}(t+c_2\cdot\tau,\vec{y}+\tau\cdot a_2\vec{K}_0),\qquad(4.9)$$
$$J_k^{(i)}\equiv J_k=\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{u}}(t+c_k\cdot\tau,y+\tau\cdot d_k\vec{K}_0),\ k=1,2.$$

Здесь имеем 15 коэффициентов. Как и в случае первого подмножества (A), три из них $(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma)$ будут определены из требований *LN*-эквивалентности получаемых схем жестко-точным методам.

Положим в (4.1) $c_0\equiv c_1$ (т. е. $z_0\equiv z_1$). Тогда функция устойчивости этих методов имеет вид

$$R(\vec{z})=\frac{1+D_1(\vec{z})+D_2(\vec{z})+D_3(\vec{z})+D_4(\vec{z})}{1-\gamma_1\cdot z_1-\gamma_2\cdot z_2+\gamma\cdot z_1\cdot z_2},\qquad \vec{z}=(z_0,z_1,z_2),\qquad(4.10)$$

где

$$D_1(\vec{z})=(b_1-\gamma_1)\cdot z_1+(b_2-\gamma_2)\cdot z_2,$$
$$D_2(\vec{z})=(a_1-g_1)\cdot b_1\cdot z_1^2+[\gamma-b_1\cdot g_2-b_2\cdot(h_1-a_2)]\cdot z_1\cdot z_2-b_2\cdot h_2\cdot z_2^2,$$
$$D_3(\vec{z})=-\{a_1b_1g_1\cdot z_1^2+[b_1\cdot(a_1g_2-g)+b_2a_2h_1]\cdot z_1\cdot z_2+[b_2\cdot(a_2h_2-h)]\cdot z_2^2\}\cdot z_1,$$
$$D_4(\vec{z})=[b_1\cdot a_1\cdot g\cdot z_1+b_2\cdot a_2\cdot h\cdot z_2]\cdot z_1^2\cdot z_2.$$

При этом для *A*-устойчивости ***необходимо***, чтобы ***для любых*** z_i $D_4\equiv D_3\equiv 0,$ а для *L*-устойчивости – чтобы дополнительно выполнялось равенство $D_2\equiv 0.$

В данной работе ограничимся случаем $a_1\equiv a_2\equiv 0$ (это соответствует 2 вычислениям правой части на один шаг интегрирования для неавтономного случая и 1 – для автономного). Тогда из условия *L-эквивалентности* искомого метода 2-стадийным жестко точным схемам сразу получим, что

$$g=0,\ h=0;\ g_1=0,\ h_2=0\ \text{и}\ b_1\cdot g_2+b_2\cdot h_1=\gamma.\qquad(4.11)$$

Уравнения порядка до 3-го включительно имеют вид:

Таблица 2. Уравнения порядка метода (4.9)

***O*(τ)**	F	$1=b_1+b_2$	(1)
***O*(τ²)**	F_u	$\frac{1}{2}=b_1\cdot(\gamma_1+\gamma_2-g_2)+b_2\cdot(\gamma_1+\gamma_2-h_1)$	(2)
	F_t	$\frac{1}{2}=b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2$	(3)
***O*(τ³)**	$F_{u,u}$	$\frac{1}{6}=b_1\cdot[d_1\gamma_1+d_2(\gamma_2-g_2)]+b_2\cdot[d_1(\gamma_1-h_1)+d_2\gamma_2]$	(4)
	$(F_u)^2\cdot F$	$\frac{1}{6}=b_1\cdot[(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2-g_2)-\gamma]+b_2\cdot[(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2-h_1)-\gamma]$	(5)
	$F_{t,t}$	$\frac{1}{6}=\frac{b_1\cdot c_1^2}{2}+\frac{b_2\cdot c_2^2}{2}$	(6)
	$F_{u,t}\cdot F$	$\frac{1}{3}=b_1\cdot[c_1\gamma_1+c_2(\gamma_2-g_2)]+b_2\cdot[c_1(\gamma_1-h_1)+c_2\gamma_2]$	(7)
	$F_u\cdot F_t$	$\frac{1}{6}=b_1\cdot c_1\cdot(\gamma_1+\gamma_2-g_2)+b_2\cdot c_2\cdot(\gamma_1+\gamma_2-h_1)$	(8)

Явно-неявные аналоги LobattoIIIC

Для получения методов, *LN*-эквивалентных 2-стадийной схеме *LobattoIIIC* (она имеет 2-й порядок точности), положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0.5.$ Тогда уравнения порядка (таблица 2, (1)–(3)) и уравнения затухания (4.11) легко решаются и можно получить параметрические подмножества.

Приведем пример параметрического семейство методов этого класса.

LIIIC Б.1 (d_1 и d_2 – любые числа):

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0.5;\ c_1 = 0,\ c_2 = 1;\ b_1 = b_2 = 0.5; \\ &g_1 = 0,\ g_2 = 1/3,\ g = 0;\ h_1 = 2/3,\ h_2 = 0,\ h = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

При $d_1 = 1 - 2d_2$ имеем метод с оценкой локальной погрешности:

$$\vec{e}_{loc} = \frac{\tau^3}{6} \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}} \right)^2 \cdot \vec{F} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial^2 t} \right].$$

Если $d_1 = d_2 = 1/3$, то метод использует только один якобиан в случае автономной системы.

Явно-неявные аналоги RadauIIA

Для получения методов, *LN*-эквивалентных 2-стадийной схеме *RadauIIA* 3-го порядка, положим $\gamma_1 = 5/12, \gamma_2 = 1/4, \gamma = 1/6.$ Заметим, что хотя уравнений порядка (таблица 2, (1)–(8)) и затухания (4.5) больше, чем свободных параметров (9 уравнений, 8 параметров), часть из уравнений выполняется тождественно в силу выбора значений $(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma)$. Общий вид подмножества методов этого класса также можно задать в параметрическом виде

RIIA Б.2 ($d_1 + d_2 = 2/3$):

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = 5/12, \gamma_2 = 1/4, \gamma = 1/6; c_1 = 1/3, c_2 = 1; b_1 = 3/4, b_2 = 1/4; \\ &g_1 = 0, g_2 = 0, g = 0; h_1 = 2/3, h_2 = 0, h = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Если $d_1 = d_2 = 1/3$, то получим метод с одним вычислением якобиана для автономных задач.

Трудоемкость методов семейства (4.9) также определяется умножением матриц и в случае использования прямых методов линейной алгебры составляет $(5/3) \cdot \mathrm{n}^3$.

5. Тестирование новых методов

Численные эксперименты с новыми методами проведем используя следующие классические тесты.

Тест 1. Рассмотрим линейное неавтономное уравнение вида [Protero, Robinson, 1974]

$$y' = \lambda \cdot (y - \phi(x)) + \phi'(x),\ y(0) = \phi(0),\ \mathrm{Re}(\lambda) \le 0. \tag{5.1}$$

Начальные данные можно задавать как согласованные с функцией $\varphi(x)\big(y(0) = \varphi(0)\big)$, так и нет $\big(y(0) \ne \varphi(0)\big)$. Точное решение имеет вид

$$y(x) = \varphi(x) + \exp(\lambda \cdot x) \cdot (y(0) - \varphi(x)),$$

где $\varphi(x)$ – любая гладкая функция.

Эта задача широко используется для проверки пригодности методов для решения жестких задач [Хайрер, Ваннер, 1999; Деккер, Вервер, 1988]. В частности, на задаче (5.1) жестко-точные методы (в отличие от остальных неявных методов) имеют одинаковый асимптотический вид локальной и глобальной погрешности, убывающий как при уменьшении шага сетки τ, так и с ростом параметра жесткости $z = \tau\lambda$. Это свойство отражено в таблице 3 (см., например, [Хайрер, Ваннер, 1999]).

Таблица 3. Асимптотический вид погрешности неявных методов РК

Метод (s стадий)	**Порядок метода**	**Стадийный порядок**	**Локальная погрешность**	**Глобальная погрешность**
Гаусс	$2 \cdot s$	s	τ^{s+1}	τ^{s}
Радо IA	$2 \cdot s - 1$	$s - 1$	τ^{s}	τ^{s}
Радо IIA	$2 \cdot s - 1$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{z^{-1} \cdot \tau^{s+1}}$	$\boldsymbol{z^{-1} \cdot \tau^{s+1}}$
Лобатто IIIA	$2 \cdot s - 2$	s	$z^{-1} \cdot \tau^{s+1}$	$z^{-1} \cdot \tau^{s}$
Лобатто IIIB	$2 \cdot s - 2$	$s - 2$	$z \cdot \tau^{s-1}$	$z \cdot \tau^{s-2}$
Лобатто IIIC	$2 \cdot s - 2$	$\boldsymbol{s - 1}$	$\boldsymbol{z^{-1} \cdot \tau^{s}}$	$\boldsymbol{z^{-1} \cdot \tau^{s}}$

Тест 2. Для второго теста выберем нелинейную автономную систему [Деккер, Вервер, 1988; Kaps, 1981]:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -(\lambda + 2) \cdot y_1(t) + \lambda \cdot (y_2(t))^2, \quad y_1(0) = 1,\ \lambda \ge 0, \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) - (y_2(t))^2, \quad y_2(0) = 1. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Решение (5.2) не зависит от параметра жесткости λ и имеет вид

$$y_1(t) = \exp(-2 \cdot t),\ \ y_2(t) = \exp(-t).$$

Результаты тестирования собраны в таблицах 4 и 5, в которых CROS1C – классический метод Розенброка с комплексными коэффициентами [Rosenbrock , 1962/1963]; FR2 (3.4), FR3 (3.5) – факторизованные методы из [Зубанов, Ширков, 2011], *L*-эквивалентные 2-стадийным жестко-точным методам *РК* соответственно 2 и 3 порядка. Новое семейство (4.1)–(4.2) представлено подмножеством (4.9) (схемы (4.12) и (4.13) соответственно). Отметим, что для второго теста оба метода (*LN*-эквивалентных жестко-точным схемам РК) позволили восстановить теоретический порядок точности до $\lambda = 10^{14}$ включительно (т. е. фактически до предела мантиссы).

Результаты тестирования новых методов находятся в хорошем согласии с теорией и практикой численных методов для жестких систем ОДУ и указывают на перспективу их использования при решении прикладных задач. Особый интерес представляет получение схем, *LN-эквивалентных* 3-стадийным жестко-точным методам.

Таблица 4. Тест (5.1), шаг 0.025

λ	CROS1C		FR2 (3.4)	FR3 (3.5)	LIIIC_Б.1	RIIA_Б.2
	Точность	Порядок	Порядок	Порядок	Порядок	Порядок
–10 ^ 1	3,68E-05	7,3426	1,8057	2,9644	1,9024	2,9696
–10 ^ 2	1,30E-05	2,5204	2,6293	2,7556	1,4459	2,7525
–10 ^ 3	9,01E-05	2,0998	2,1830	2,2278	1,0255	2,2127
–10 ^ 4	2,25E-04	2,0289	2,0264	2,0342	0,9916	2,0178
–10 ^ 5	2,65E-04	2,0219	2,0123	2,0131	0,9910	1,9966
–10 ^ 6	2,70E-04	2,0212	2,0109	2,0110	0,9910	1,9945
–10 ^ 7	2,70E-04	2,0212	2,0108	2,0108	0,9910	1,9948

Таблица 5. Тест (5.2), шаг 0.025

λ	CROS1C		FR2 (3.4)	FR3(3.5)	LIIIC_Б.1	RIIA_Б.2
	Точность	Порядок	Порядок	Порядок	Порядок	Порядок
10 ^ 1	9,34E-08	1,9085	1,9220	2,9432	1.9221	2.9503
10 ^ 2	3,49E-08	2,1949	1,8116	2,7386	1.8116	3.7018
10 ^ 3	9,41E-08	2,0995	1,9719	2,2173	1.9719	3.2582
10 ^ 4	3,11E-07	2,0305	1,9843	2,0245	1.9842	3.0526
10 ^ 5	3,74E-07	2,0234	1,9844	2,0033	1.9844	3.0266
10 ^ 6	3,82E-07	2,0227	1,9844	2,0012	1.9844	3.0240
10 ^ 7	3,83E-07	2,0226	1,9844	2,0010	1.9844	3.0237

Вероятно, основным недостатком новых схем является высокая степень обусловленности решаемых линейных систем по сравнению с традиционными методами за счет умножения матриц Якоби. Это явление может привести к необходимости использования мантиссы большей длины.

Список литературы

Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988.

Зубанов А. М., Коконков Н. И., Ширков П. Д. Одностадийный метод Розенброка с комплексными коэффициентами и автоматическим выбором шага // Матем. моделирование. – М.: Наука, – 2011. – Том 23, № 3. – С. 127–138.

Зубанов А. М., Ширков П. Д. Методы типа Розенброка, *L*-эквивалентные неявным методам Рунге–Кутты // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: Ежегодный сборник научных трудов, вып. 14, труды 2-й Международной Конференции «Моделирование нелинейных процессов и систем» (под ред. Л. А. Уваровой). – М.: Янус-К, 2011. – С. 137–146.

Калиткин Н. Н., Панченко С. Л. Оптимальные схемы для жестких неавтономных систем // Матем. моделирование. – М.: Наука, 1999. – Том 11, № 6. – С. 52–75.

Кочетков К. А., Ширков П. Д. *L*-затухающие ROW-методы третьего порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Том 37, № 6. – С. 699–710.

Кочетков К. А., Ширков П. Д. *L*-затухающие ROW-методы с точной оценкой локальной погрешности // Матем. моделирование. – М.: Наука, 2001. – Том 13, № 8. – С. 38–43.

Лимонов А. Г., Альшин А. Б., Альшина Е. А. Двухстадийные комплексные схемы Розенброка для жестких систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – Том 49, № 2. – С. 270–287.

Филиппов С. С. АВС-схемы для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады РАН, 2004. – Т. 399, № 2. – С. 170–172.

Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999.

Ширков П. Д. *L*-устойчивость диагонально-неявных схем Рунге–Кутты и методов Розенброка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Том 32, № 9. – С. 1422–1432.

Ширков П. Д. *AN*-устойчивость ROW-методов // Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, – 2001. – № 16. – 20 с.

Ширков П. Д. Оптимальные *L*-затухающие двухстадийные схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для ОДУ // Матем. моделирование. – М.: Наука, 1992. – Том 4, № 8. – С. 47–57.

Ширков П. Д. Устойчивость ROW методов для неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Матем. моделирование. – М.: Наука, – 2012. – Том 24, № 5. – С. 97–111.

Alexander R. Dioganaly implicit Runge–Kutta methods for stiff ODEs. //SIAM J. Numer. Anal., vol. 14, 1977. – P. 1006–1021.

Butcher J. The numerical Analysis of Ordinary Differential Equations. (Runge–Kutta and General Linear Methods). – Great Britain: J. Wiley and Sons Ltd., 1987.

Kaps P. Roserbrock-type methods // Numerical method for solving stiff initial value problems, G. Dalhquist and R. Jeltsch (eds.), 1981, Bericht, No. 9, Inst. Fuer Geometrie und Praktische Math. Der RWTH Aachen.

Protero A., Robinson A. On the stability and accuracy of one-step methods for solving stiff systems of ordinary differential equations // Math. of Comput., 1974, vol. 28. – P. 145–162.

Rosenbrock H. Some general implicit processes for numerical solution of differential equations // Computer J., vol. 5, № 4, 1962/1963. – P. 329–330.