**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 3 С. 475−482**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.833

Метод возможных направлений в задачах нелинейного программирования для биматричных игр

Д. С. Набатова

ФГОБУ ВПО Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 49

E-mail: nabatova805@mail.ru

*Получено 9 апреля 2012 г.,
после доработки 10 июля 2012 г.*

Рассматривается задача определения ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре. Поиск решения связывается с задачей нелинейного программирования. Исследуются применение метода возможных направлений для решения такой задачи.

Ключевые слова: биматричная игра, ситуация равновесия по Нэшу, задача нелинейного программирования, метод возможных направлений

The method of feasible directions in problems nonlinear programming for bimatrix games

D. S. Nabatova

Financial university at the government of the Russian Federation, 49 Leningradskiy prospect, Moscow, 125993, Russia

Abstract. – The problem of the Nash equilibrium in bimatrix game is considered. The search for a solution is associated with a problem of nonlinear programming. Application of the method of feasible directions for the solution of such a problem is investigated.

Keywords: bimatrix game, the Nash equilibrium, a problem of nonlinear programming, the method of feasible directions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 475–482 (Russian).

Введение

Исследование прикладных аспектов игровых моделей для различных областей, в которых существуют конфликты, показывает, что традиционно применяемые антагонистические игры не всегда адекватно отражают реальную ситуацию. Для такого круга задач в качестве математической модели могут быть использованы биматричные игры.

Как понятно из названия, биматричные игры описываются двумя платежными матрицами. Это говорит о том, что для любой ситуации в игре каждая сторона получает свой выигрыш. Сумма выигрышей не является постоянной величиной. Для определения всех ситуаций в игре при выборе игроками своих чистых стратегий используются две матрицы, A и B, размерность которых определяется числом чистых стратегий у игроков: m – у первого игрока, n – у второго.

В основе принципа оптимальности для таких игр лежит понятие ситуации равновесия по Нэшу.

Модель

Рассмотрим биматричную игру, описываемую платежными матрицами A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Целью игры для каждого игрока является достижение наибольшего выигрыша.

Рассмотрим смешанное расширение биматричной игры.

Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – вероятностные векторы такие, что

$$X = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i \geq 0, \quad i = 1 \dots m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}, \tag{1}$$

$$Y = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_j \geq 0, \quad j = 1 \dots n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}. \tag{2}$$

Выигрыши игроков на смешанном расширении определяются следующим образом:

$$H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad \text{– для первого игрока,} \tag{3}$$

$$H_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \quad \text{– для второго игрока.} \tag{4}$$

Ситуация равновесия по Нэшу в биматричной игре – это векторы из смешанного расширения $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, для которых справедливы соотношения

$$H_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \text{ для любого } \mathbf{x} \in X, \tag{5}$$

$$H_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq H_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}\ ) \text{ для любого } \mathbf{y} \in Y. \tag{6}$$

Будем полагать, что элементы платежных матриц не являются отрицательными. Если это не так, то нужно рассматривать игру, стратегически эквивалентную исходной игре, для которой условие неотрицательности выполнено [Воробьев, 1984].

Покажем, что решение игры с неотрицательными матрицами связано с задачей нелинейного программирования с помощью доказательства двух теорем [Партсахаратхи, 1974].

Теорема 1. *Для того чтобы пара векторов* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *из смешанного расширения биматричной игры являлась ситуацией равновесия по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа p и q, для которых выполнялись бы соотношения*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le p\,,\ i = 1...m; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i^* \le q\,,\ j = 1...n; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* (a_{ij} + b_{ij}) = p + q. \tag{9}$$

Доказательство. Если пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ – ситуация равновесия по Нэшу, то эти соотношения выполнены, а p и q значения цены игры для первого и второго игроков ситуации равновесия.

$$p = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* a_{ij} = H_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*),$$

$$q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* b_{ij} = H_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*).$$

Неравенства (7)–(8) можно получить, если в соотношения (5)–(6), определяющие ситуацию равновесия по Нэшу, вместо произвольных векторов подставить в неравенство (7) последовательно m векторов из ортонормированного базиса R^m, а в неравенство (8) – n векторов из базиса R^n.

Достаточность. Пусть $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), p, q$ удовлетворяют условиям (7)–(9). Выберем пару векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из смешанного расширения. Умножим первые m неравенств на компоненты вектора **x** и, сложив их, получим

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le \sum_{i=1}^{m} x_i\, p,$$

учитывая (1) и (3)

$$H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \le p.$$

Аналогично для n неравенств (8):

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^* \le \sum_{j=1}^{n} y_j q,$$

учитывая (2) и (4), получим

$$H_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \le q.$$

Если вместо произвольных векторов (**x**, **y**) выбрать пару $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, то

$$H_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le p \quad \text{и} \quad H_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le q,$$

и для последнего соотношения (9) из теоремы:

$$H_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = p \quad \text{и} \quad H_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = q.$$

Пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ удовлетворяет определению ситуации равновесия по Нэшу. А p и q — значения цены игры для каждого игрока.

Теорема 2. *Для того чтобы пара* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *являлась ситуацией равновесия биматричной игры, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых неотрицательных чисел p и q набор* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), p, q$ *представлял собой решение следующей задачи нелинейного программирования:*

максимизировать

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (a_{ij} + b_{ij}) - p - q \tag{10}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le p,\ y_j \ge 0,\ i = 1...m, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le q,\ x_i \ge 0,\ j = 1...n, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Для любой пары векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, удовлетворяющих ограничениям (11)–(13), значения целевой функции будут неположительными.

Необходимость. Пусть $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ — ситуация равновесия. Положим

$$p = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* a_{ij} \ \text{ и } \ q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* b_{ij}.$$

Очевидно, что p и q определяют значения цены игры ситуации равновесия. Рассмотрим пару $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ векторов, удовлетворяющих неравенствам (11)–(12). Выберем в качестве $\mathbf{x}$ для неравенств (11) m векторов из базиса R^m, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le p,\ i = 1\ldots m.$$

Для неравенств (12) выберем n векторов из базиса R^n:

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i^* \le q,\ j = 1\ldots n.$$

Ограничения, связанные с условиями неотрицательности и нормирования, выполняются для всех векторов смешанного расширения.

Очевидно, что набор $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), p, q$ является допустимым и при этом значение целевой функции равно нулю, т. е. функция достигает своего максимума и $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), p, q$ — решение задачи.

Достаточность. Пусть $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), p, q$ — решение задачи нелинейного программирования (10)–(13). На этих значениях целевая функция достигает своего максимума, ее значение равно нулю:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* (a_{ij} + b_{ij}) - p - q = 0.$$

Умножим m неравенств (11) на компоненты $\mathbf{x}^*$ и, сложив их, получим

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* \sum_{j=1}^{n} y_j^* a_{ij} \le p.$$

Пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ является решением, и функция (10) достигает максимума, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* a_{ij} = p.$$

Аналогично для $\mathbf{y}^*$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* b_{ij} = q.$$

Таким образом, для того чтобы определить ситуацию равновесия в биматричной игре, необходимо и достаточно решить задачу нелинейного программирования, поставленную в теореме 2.

Этот результат аналогичен теореме для антагонистических игр, но с одним принципиальным отличием: получившаяся задача является нелинейной.

Целевая функция в полученной задаче является квадратичной, а система ограничений — линейной. Рассмотрим применение метода возможных направлений для решения. Идея метода: необходимо определить вектор возможного направления **d** такой, что значение целевой функции в направлении этого вектора не ухудшается и оно не выводит за пределы допустимой области [Базара, Шетти, 1982]. Пусть общая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{z}) \to \max,\\
&\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_t),\\
&C\mathbf{z} \le \mathbf{s},\\
&E\mathbf{z} = \mathbf{e},
\end{aligned}$$

где C – матрица порядка $r \times t$, E – матрица порядка $l \times t$, **s** – r-мерный вектор, а **e** – l-мерный вектор. Пусть задана точка $\mathbf{z}_k$, $C^T = (C_1^T, C_2^T)$ и $\mathbf{s}^T = (\mathbf{s}_1^T, \mathbf{s}_2^T)$, так что $C_1\mathbf{z}_k = \mathbf{s}_1$ и $C_2\mathbf{z}_k < \mathbf{s}_2$; иначе говоря, матрица C_1 состоит из ограничений-неравенств, которые в точке $\mathbf{z}_k$ являются активными.

Тогда такой вектор **d** можно получить из решения следующей задачи.

Задача **P**:

$$\begin{aligned}
&\nabla f(\mathbf{z})^T \cdot \mathbf{d} \to \max,\\
&\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{d} \le 0,\\
&\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = 0.
\end{aligned}$$

Задача **P** является задачей линейного программирования, и ее решение может быть получено с помощью симплекс-метода. После того как возможное направление **d** определено, вычисляется следующая точка:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{d}^k,$$

где λ_k — оптимальное значение шага. В общем случае шаг вычисляется аналогично методу наискорейшего спуска. Вычисления проводятся до тех пор, пока целевая функция в текущей точке не обратится в ноль.

Вычислим градиент целевой функции и матрицы ограничений для задачи нелинейного программирования определения ситуации равновесия в биматричной игре.

Целевая функция зависит от $m+n+2$ переменных. Это компоненты векторов **x** и **y**, а также p и q.

Вычислим градиент:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})y_1+(a_{12}+b_{12})y_2+\ldots+(a_{1n}+b_{1n})y_n \\ (a_{21}+b_{21})y_1+(a_{22}+b_{22})y_2+\ldots+(a_{2n}+b_{2n})y_n \\ \ldots \\ (a_{m1}+b_{m1})y_1+(a_{m2}+b_{m2})y_2+\ldots+(a_{mn}+b_{mn})y_n \\ (a_{11}+b_{11})x_1+(a_{21}+b_{21})x_2+\ldots+(a_{m1}+b_{m1})x_m \\ (a_{12}+b_{12})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2+\ldots+(a_{m2}+b_{m2})x_m \\ \ldots \\ (a_{1n}+b_{1n})x_1+(a_{2n}+b_{2n})x_2+\ldots+(a_{mn}+b_{mn})x_m \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Или в матричной форме:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (A+B)\mathbf{y} \\ (A+B)^T\mathbf{x} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Система ограничений-неравенств выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{m1}x_m-q\le 0; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{m2}x_m-q\le 0; \\ \ldots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{mn}x_m-q\le 0; \\ b_{11}y_1+b_{12}y_2+\ldots+b_{1n}y_n-p\le 0; \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\ldots+b_{2n}y_n-p\le 0; \\ \ldots \\ b_{m1}y_1+b_{m2}y_2+\ldots+b_{mn}y_n-p\le 0. \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^T & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & B & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{A}$ – квадратная матрица размера $(m+n+2)\times(m+n+2)$.

Ограничения-равенства для векторов **x** и **y** имеют вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Матрица E для ограничений-равенств состоит из двух строк:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что рассматриваемая игра должна иметь неотрицательные элементы платежных матриц. Если это не так, то необходимо найти такое число α, чтобы

$$a_{ij} + \alpha \geq 0, \quad b_{ij} + \alpha \geq 0 \text{ для } i = 1...m, \quad j = 1...n..$$

Новые платежные матрицы с элементами $a'_{ij} = a_{ij} + \alpha$, $b'_{ij} = b_{ij} + \alpha$ будут стратегически эквивалентными исходным матрицам, т. е. ситуации равновесия для них будут равными, а цены игры ситуации равновесия отличаться на величину α.

Результаты

Более подробно последовательность шагов для вычисления пары $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ – векторов, определяющих ситуацию равновесия в биматричной игре с платежными матрицами *A* и *B*, рассмотрим на примере.

Пример вычислений. Найти ситуацию равновесия по Нэшу для игры с платежными матрицами *A* и *B*. Формат игры 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем задачу нелинейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_i y_j (a_{ij} + b_{ij}) - p - q \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i b_{ij} \leq q, \quad j = 1...4,$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_j a_{ij} \leq p, \quad i = 1...3,$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{y} \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{4} y_j = 1.$$

Зададим начальное приближение. Рассмотрим первый столбец матрицы *A* и найдем максимальный элемент $a_{13} = 7$:

$$\mathbf{y}^{(0)} = (1; 0; 0; 0).$$

Чтобы начальная точка удовлетворяла ограничениям, у $\mathbf{x}^{(0)}$ должна быть отлична от нуля третья координата:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0; 0; 1),$$

тогда $p^{(0)} = 7$ и $q^{(0)} = 3$.

Вычислим компоненты градиента

$$\nabla f = (7; 4; 10; 10; 8; 4; 10; -1; -1)^T,$$

составим задачу **P**:

$$7d_1 + 4d_2 + 10d_3 + 10d_4 + 8d_5 + 4d_6 + 10d_7 - d_8 - d_9 \to \max.$$

Активное ограничение для вектора $\mathbf{x}^{(0)} = (0;0;1)$ соответствует первому столбцу матрицы A:

$$7d_3 - 4d_9 \le 0.$$

Активное ограничение для вектора $\mathbf{y}^{(0)} = (1;0;0;0)$ соответствует третьей строке матрицы B:

$$3d_4 - 4d_8 \le 0.$$

Ограничения равенства для компонент $\mathbf{d}$ составляются так, чтобы не выйти за границы допустимой области:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 0,$$
$$d_4 + d_5 + d_6 + d_7 = 0.$$

Окончательно получим задачу линейного программирования для определения вектора $\mathbf{d}$:

$$\begin{gathered} 7d_1 + 4d_2 + 10d_3 + 10d_4 + 8d_5 + 4d_6 + 10d_7 - d_8 - d_9 \to \max, \\ 7d_3 - 4d_9 \le 0, \\ 3d_4 - 4d_8 \le 0, \\ d_1 + d_2 + d_3 = 0, \\ d_4 + d_5 + d_6 + d_7 = 0. \end{gathered}$$

Отметим, что для вектора $\mathbf{d}$ нет ограничений неотрицательности.

Используя двойственный симплекс-метод, найдем решение задачи

$$\mathbf{d} = (0;0.364;-0.364;-0.364;0.364;0;0;2.182;1.818)^T, \quad \lambda_{\max} = 1.$$

Вычислим $\mathbf{x}^{(1)} = (0;0.364;0.636), \mathbf{y}^{(1)} = (0.636;0.364;0;0), p^{(1)} = 4.818, q^{(1)} = 4.818.$

Значение целевой функции для таких значений равно нулю. Получено решение: ситуация равновесия в биматричной игре.

Заключение

Биматричные игры имеют более широкий круг практического применения. В литературе мало представлено идей и методов их решения. Между тем алгоритмов решения задач квадратичного программирования существует достаточно. Их использование позволяет обеспечить сходимость с одной сторон, и сравнивать решения, полученные разными способами – с другой. Таким образом, можно получить гарантированный результат.

Список литературы

Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.

Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984.

Партсахаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. – М.: Мир, 1974.