**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 2 С. 431–450**

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.865

Математическое моделирование оптимального рынка конкурирующих товаров в условиях лага поставок

В. В. Поддубный[a], О. В. Романович[b]

Томский государственный университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36

E-mail: [a] vvpoddubny@gmail.com, [b] hjkm@ngs.ru

Получено 18 апреля 2012 г.

Предлагается нелинейная рестриктивная (подчиняющаяся ограничениям типа неравенств) динамическая математическая модель свободного рынка многих товаров в условиях лага поставок товаров на рынок и линейной зависимости вектора спроса от вектора цен. Ставится задача отыскания оптимальных с точки зрения прибыли продавца цен и поставок товаров на рынок. Показано, что максимальная суммарная прибыль продавца выражается непрерывной кусочно-гладкой функцией вектора объемов поставок с разрывом производных на границах зон товарного дефицита, затоваривания и динамического равновесия рынка по каждому из товаров. С использованием аппарата предикатных функций построен вычислительный алгоритм оптимизации поставок товаров на рынок.

Ключевые слова: математическое моделирование, рынок многих товаров, цена, спрос, предложение, лаг поставок, дискретное время, динамика, нелинейность, прибыль продавца, кусочная гладкость, алгоритм оптимизации

Mathematical modeling of the optimal market of competing goods in conditions of deliveries lags

V. V. Poddubny, O. V. Romanovich

Tomsk State University, 36 Lenina avenue, Tomsk, 634050, Russia

Abstract. — The nonlinear restrictive (with restrictions of the inequalities type) dynamic mathematical model of the committed competition vacant market of many goods in conditions of the goods deliveries time-lag and of the linear dependency of the demand vector from the prices vector is offered. The problem of finding of prices and deliveries of goods into the market which are optimal (from seller's profit standpoint) is formulated. It is shown the seller's total profit maximum is expressing by the continuous piecewise smooth function of vector of volumes of deliveries with breakup of the derivative on borders of zones of the goods deficit, of the overstocking and of the dynamic balance of demand and offer of each of goods. With use of the predicate functions technique the computing algorithm of optimization of the goods deliveries into the market is built.

Keywords: mathematical modeling, market of many goods, price, demand, offer, lag of deliveries, discrete time, dynamics, nonlinearity, seller's profit, piecewise smoothness, optimization algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 431–450 (Russian).

Введение

Предлагаемая математическая модель свободного рынка многих конкурирующих (и/или сопутствующих) товаров в условиях запаздывания поставок товаров на рынок при линейной функции спроса является обобщением и развитием предложенной ранее математической модели рынка одного товара [Поддубный, Романович, 2011а; Поддубный, Романович, 2011б].

Пусть P — цена товара, Q — объем поставляемого на рынок товара.

В классической теории рыночного равновесия Л. Вальраса – А. Маршалла («паутинообразная» модель, модель Эванса и др.) [Гальперин и др., 2006] равновесное состояние рынка одного товара достигается при таких значениях P^*, Q^* переменных P и Q, при которых линии спроса и предложения товара пересекаются. Обычно полагают, что эти линии в окрестности точки равновесия — прямые: $Q^d = Q_m - aP$ (линия спроса), $Q = Q_n + bP$ (линия предложения), где $Q_m > Q_n$, $a > 0$, $b > 0$ — параметры этих линий, так что точка равновесия достигается при $Q^d = Q$ (спрос равен предложению):

$$Q_m - aP^* = Q_n + bP^*,$$

откуда и находится точка (P^*, Q^*) рыночного равновесия, то есть равновесное состояние рынка:

$$P^* = \frac{Q_m - Q_n}{a + b}, \; Q^* = Q_n + bP^* = \frac{aQ_m + bQ_n}{a + b}.$$

В реальных условиях линию спроса можно с определенной степенью точности построить на основе эмпирических данных об объемах продаж товара при различных ценах, что позволяет считать линию спроса известной. Но линия предложения обычно остается неизвестной.

Возникает вопрос о том, каким образом можно найти точку рыночного равновесия и исследовать поведение рынка в окрестности точки равновесия без использования линии предложения. Какая стратегия поставки товара на рынок является оптимальной с точки зрения максимума прибыли продавца?

В работах [Поддубный, Романович, 2011а; Поддубный, Романович, 2011б] мы рассматривали рынок одного товара как оптимально самоуправляемую динамическую систему, автоматически устанавливающую оптимальное (в смысле максимума прибыли продавца) значение цены товара при заданной линии спроса и при оптимальной детерминированной стратегии поставки товара на рынок в условиях запаздывания (лага) поставок.

В настоящей работе мы исследуем предельные (потенциальные) возможности получения максимальной суммарной прибыли продавца на свободном рынке многих товаров с последующим синтезом оптимальной детерминированной стратегии поставки товаров на рынок.

Пусть состояние рынка n товаров в момент t дискретного времени (на t-ом временно́м интервале, шаге функционирования рынка, $t = 0, 1, 2, \ldots$) характеризуется n-вектором цен товаров $P(t)$ и n-вектором объемов $Q(t)$ поставляемых на рынок товаров.

Для определения точки рыночного равновесия и исследования динамики цен товаров в процессе перехода рынка из некоторого возмущенного (неравновесного) состояния к равновесному необходимо ввести в рассмотрение, кроме линий спроса, критерий оптимальности поведения продавца на рынке. Этот критерий, очевидно, должен основываться на том, что продавец стремится, с одной стороны, удовлетворить потребность покупателя в каждом из товаров (конечно, не из альтруистических соображений, а исключительно из соображений собственной выгоды: если покупательский спрос не удовлетворен, продавец просто недополучает прибыль), а с другой стороны — обеспечить себе максимальную прибыль. Согласно этому критерию, «невидимая рука рынка» (по образному выражению Адама Смита из его книги «Богатство народов», изданной в 1776 году) обеспечит оптимальные цены товаров при любых, в том числе оптимальных, размерах поставок товаров на рынок.

Построим математическую модель рынка, следующего этому критерию.

Математическая постановка задачи

Пусть в момент t дискретного времени n-вектор-столбец спроса $Q^d(t)$ на товары линейно зависит от n-вектора-столбца $P(t)$ цен товаров:

$$Q^d(t) = Q_m - AP(t), \tag{1}$$

где Q_m — n-вектор-столбец параметров, A — $n \times n$-матрица коэффициентов, не зависящих от времени, цен и объемов поставок товаров и определяющих ценовую эластичность спроса по каждому из товаров: $e_{ij} = (\partial Q_i^d)/(\partial P_j)(P_j/Q_i^d) = -A_{ij}(P_j/Q_i^d)$, $(i, j = \overline{1,n})$. При выходе n-вектора $P(t)$ за пределы области, определяемой векторным неравенством $Q_m - AP(t) \geq 0$, соответствующие компоненты вектора спроса $Q^d(t)$ должны обращаться в 0. Поэтому

$$Q_i^d(t) = \begin{cases} Q_{mi} - (AP(t))_i, & \text{если } Q_{mi} - (AP(t))_i > 0, \\ 0, & \text{если } Q_{mi} - (AP(t))_i \leq 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Пусть в момент времени t (точнее, в начале t-го интервала дискретного времени функционирования рынка) на рынок поставляется $Q_i(t)$ единиц i-го товара ($i = \overline{1,n}$). Если предложение $Q_i(t)$ превышает спрос $Q_i^d(t)$ на этот товар при n-векторе цен $P(t)$ (на этот товар и все конкурирующие и сопутствующие товары), то, очевидно, продавец сможет продать только $Q_i^d(t)$ единиц i-го товара. Если же предложение $Q_i(t)$ меньше спроса $Q_i^d(t)$, то продан будет весь i-й товар, поступивший на рынок. Следовательно, n-вектор объемов продаж $Q^s(t)$ на t-ом интервале дискретного времени может быть выражен рестриктивным (подчиняющимся ограничениям типа неравенств) соотношением:

$$Q_i^s(t) = \begin{cases} Q_i^d(t), & \text{если } Q_i^d(t) < Q_i(t), \\ Q_i(t), & \text{если } Q_i^d(t) \geq Q_i(t), \end{cases} \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

что можно кратко записать в виде

$$Q^s(t) = \min(Q^d(t), Q(t)),$$

где $\min(Q^d(t), Q(t))$ понимается как результат покомпонентного сравнения векторов $Q^d(t)$ и $Q(t)$. При $Q_i^d(t) > Q_i(t)$ имеем **дефицит** i-го товара (зона 1), при $Q_i^d(t) < Q_i(t)$ — **затоваривание** рынка по i-му товару (зона 2), при $Q_i^d(t) = Q_i(t)$ — **динамическое равновесие** рынка по i-му товару (зона 3).

Объемы остатков товаров, не проданных на t-м интервале времени, выразятся n-вектором:

$$Q^o(t+1) = Q(t) - Q^s(t). \tag{4}$$

Представим n-вектор объемов $Q(t)$ товаров, поставляемых на рынок в момент времени t, в виде суммы n-вектора объемов $Q^o(t)$ остатков товаров от продаж на предыдущем интервале дискретного времени и перешедших на рынок в момент t и товаров в объеме n-вектора $Q_i^z(t)$, заказанных продавцом дополнительно для поставки на рынок к этому моменту времени:

$$Q(t) = Q^o(t) + Q^z(t), \tag{5}$$

что приводит к рекуррентному соотношению для остатков непроданных товаров:

$$Q^o(t+1) = Q^o(t) + Q^z(t) - Q^s(t). \tag{6}$$

Пусть цены единиц товаров при их заказе (покупке на оптовом рынке или у производителя) составляют n-векторную величину P_1, а цены хранения единиц товаров, не проданных на предыдущем интервале дискретного времени, составляют n-вектор P_2. Тогда прибыль продавца, получаемая к концу t-го интервала дискретного времени, составит величину

$$J(t) = Q^{sT}(t)P(t) - Q^{zT}(t)P_1 - Q^{oT}(t)P_2 - \frac{1}{2}(P(t) - P(t-1))^T R(P(t) - P(t-1)), \tag{7}$$

где T — знак транспонирования; первое слагаемое $Q^{sT}(t)P(t)$ является выручкой от продаж $Q^s(t)$ единиц товара по ценам $P(t)$; второе слагаемое — затраты продавца на закупку дополнительного количества $Q^z(t)$ товара по ценам P_1; третье слагаемое $Q^{oT}(t)P_2$ — затраты продавца на хранение остатков непроданного товара в объемах $Q^o(t)$ по ценам P_2.

Четвертое слагаемое является штрафной функцией, «штрафом», налагаемым на продавца за изменение цен $P(t)$ товаров в момент времени t по отношению к ценам товаров $P(t-1)$ на предыдущем, $(t-1)$-ом интервале дискретного времени. Здесь R — положительно определенная матрица (в простейшем случае — диагональная). Штрафная функция обеспечивает определенную инерционность рынка по отношению к изменениям цен товаров (за резкое повышение цены могут последовать санкции законодательного характера, за резкое снижение цены — «санкции» конкурентов, выражающиеся в нанесении ущерба продавцу в размере, эквивалентном этой штрафной функции). Введение штрафной функции в целевую функцию математической модели рынка отражает учет некоторых реальных ограничений на «свободу конкуренции».

В случае диагональной матрицы R каждый диагональный элемент $R_{ii} > 0$ (вес штрафной функции по i-му товару) может быть величиной постоянной, но может зависеть от знака разности $P_i(t) - P_i(t-1)$ таким образом, например, что $R_{ii} = R_{i+}$ при $P_i(t) > P_i(t-1)$ и $R_{ii} = R_{i-}$ при $P_i(t) < P_i(t-1)$, причем $R_{i+} \neq R_{i-}$, что моделирует явление «ценового гистерезиса» рынка (при $R_{i+} < R_{i-}$ рынок менее охотно снижает цену, чем повышает ее). Для простоты будем считать далее, что $R_{i+} = R_{i-} = R_i$ (отсутствие ценового гистерезиса).

Возникает вопрос о том, какое значение должен принять n-вектор $P(t)$ цен товаров в момент времени t, если на предыдущем интервале он равнялся $P(t-1)$, и какую величину $Q^z(t)$ дополнительной поставки товаров на рынок должен произвести продавец, чтобы прибыль продавца при заданной линии спроса (1) на t-ом интервале дискретного времени была максимальной:

$$J(t) \Longrightarrow \sup_{P(t),\, Q^z(t)}. \tag{8}$$

При этом, естественно, должны выполняться ограничения на величину n-вектора $P(t)$ возможных цен товаров сверху (2) и снизу:

$$P(t) > P_1 \tag{9}$$

и на величину дополнительного заказа товара $Q^z(t)$:

$$Q^z(t) \geq 0. \tag{10}$$

Пусть вектор объемов поставки товаров на рынок в момент времени t есть $Q(t)$. Найдем оптимальный (обеспечивающий максимум прибыли продавца (7)) вектор цен $P(t)$ товаров при фиксированном значении $Q(t)$:

$$J(t) \Longrightarrow \max_{P(t)|Q(t)}. \tag{11}$$

При решении этой задачи, учитывая ее рестриктивный в силу соотношения (3) характер, очевидно, следует принимать во внимание, что каждый товар может оказаться в момент времени t в любой из 3-х указанных выше зон (дефицита, затоваривания или баланса спроса и предложения). Поскольку целевая функция $J(t)$ по каждому товару в каждой зоне ведет себя по-разному, при решении задачи оптимизации необходим перебор 3^n зон состояния рынка по всем товарам.

Частный случай: рынок одного товара ($n = 1$)

Условно-оптимальная цена товара

Для выявления особенностей решения этой задачи рассмотрим сначала простейший частный случай — рынок одного товара ($n = 1$). В этом случае все векторы состояния рынка становятся скалярами, матрица A также становится скаляром $a > 0$, формула (3) принимает вид $Q^d(t) = Q_m - aP(t)$, и мы имеем всего 3 зоны состояния рынка: зону, соответствующую дефициту товара на рынке (зона 1, в которой $Q(t) < Q^d(t)$), зону затоваривания рынка (зона 2, в которой $Q(t) > Q^d(t)$) и зону баланса спроса и предложения (зона 3, область динамического равновесия, в которой $Q(t) = Q^d(t)$). Рассмотрим эти зоны подробнее.

1. В зоне товарного дефицита $Q(t) < Q^d(t)$, и в соответствии с соотношением (3) имеем $Q^s(t) = Q(t)$, так что

$$J(t) = Q(t)P(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Longrightarrow \sup_{P(t)|Q(t)} . \tag{12}$$

Это квадратичная функция переменной $P(t)$, выпуклая вверх. Следовательно, точка максимума достигается при

$$\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)} = Q(t) - R(P(t) - P(t-1)) = 0,$$

откуда

$$P(t) = P(t-1) + \frac{Q(t)}{R} = P^{(1)}(t). \tag{13}$$

Как видим, $P^{(1)}(t)$ растет с ростом $Q(t)$ по линейному закону. Выражение (13) справедливо не при любом $Q(t)$, а лишь при $Q(t)$, удовлетворяющем условию $Q(t) < Q^d(t)$ принадлежности к зоне 1. Это условие с учетом (1) при $n = 1$ и (13) имеет вид:

$$Q(t) < Q_m - aP^{(1)}(t) = Q_m - aP(t-1) - \frac{a}{R}Q(t),$$

откуда

$$Q(t) < \frac{R(Q_m - aP(t-1))}{a + R} = Q^{(1)}(t). \tag{14}$$

Таким образом, в области 1 $P(t)$ линейно растет с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(1)}(t)\,|_{Q(t)=0} = P(t-1)$$

до значения

$$P^{(1)}(t)\,|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a + R} = P^{(1)}_{\max}(t),$$

причем условие принадлежности $Q(t)$ к области 1 выражается неравенством (14).

2. В зоне затоваривания рынка $Q(t) > Q^d(t)$, и в соответствии с выражением (3) имеем $Q^s(t) = Q^d(t)$, так что с учетом (1) при $n = 1$

$$J(t) = (Q_m - aP(t))P(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P(t) - P(t-1))^2 \Longrightarrow \sup_{P(t)|Q(t)}. \tag{15}$$

Это квадратичная выпуклая вверх функция переменной $P(t)$. Следовательно, точка максимума достигается при

$$\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)} = Q_m - 2aP(t) - R(P(t) - P(t-1)) = 0,$$

откуда

$$P(t) = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a + R} = P^{(2)}(t). \tag{16}$$

Как видим, $P^{(2)}(t)$ не зависит от $Q(t)$ (остается постоянной при любом $Q(t)$ в этой области). Выражение (16) справедливо лишь при условии, что $Q(t) > Q^d(t)$, то есть при условии

$$Q(t) > Q_m - aP^{(2)}(t) = \frac{(a+R)Q_m - aRP(t-1)}{2a+R},$$

откуда

$$Q(t) > \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + aQ_m}{2a+R} = Q^{(2)}(t). \tag{17}$$

Последнее неравенство определяет условие принадлежности $Q(t)$ зоне 2. Нетрудно показать, что $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$. Действительно, используя выражения (14) и (17), получим

$$Q^{(2)}(t) - Q^{(1)}(t) = \frac{a^2(Q_m + RP(t-1))}{(a+R)(2a+R)} > 0,$$

что и требовалось доказать.

3. В зоне баланса спроса и предложения (то есть в области динамического равновесия рынка) $Q(t) = Q^d(t)$, и в соответствии с выражением (3) имеем, как и в области 2, объем продаж, равный спросу, то есть $Q^s(t) = Q^d(t)$, и прибыль $J(t)$ в виде (15). При этом, однако, $Q(t) = Q_m - aP(t)$, откуда

$$P(t) = \frac{Q_m - Q(t)}{a} = P^{(3)}(t). \tag{18}$$

Границами области 3 по $Q(t)$ являются точки $Q^{(1)}(t)$ и $Q^{(2)}(t)$:

$$Q^{(1)}(t) \le Q(t) \le Q^{(2)}(t). \tag{19}$$

Как видим из (18), в этой области $P^{(3)}(t)$ линейно убывает с ростом $Q(t)$ от значения

$$P^{(3)}(t)\,|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t)$$

до значения

$$P^{(3)}(t)\,|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t).$$

Пример 1. На рис. 1 в качестве примера изображена зависимость условно-оптимальной (при фиксированном $Q(t)$) цены $P(t)$ товара при следующих параметрах: $Q_m = 4$, $a = 0{,}4$, $P_1 = 3$, $R = 50$, $P(t-1) = 7$. При этом $Q^{(1)}(t) = 1{,}191$, $Q^{(2)}(t) = 1{,}213$, $P^{(1)}_{\max}(t) = 7{,}024$, $P^{(2)}(t) = 6{,}969$. Полужирным шрифтом выделены номера зон.

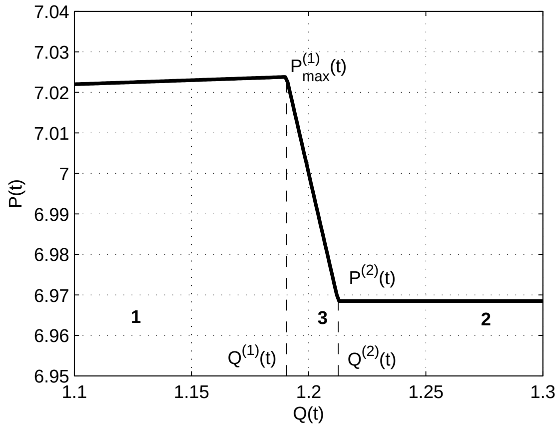

Рис. 1. Условно-оптимальная цена товара

Условно-максимальная прибыль. Оптимальная цена товара и максимальная прибыль

Найдем теперь оптимальную цену товара и оптимальный уровень поставки товара на рынок, обеспечивающие максимальную прибыль продавца, если $P(t-1)$, $P^{(1)}_{\max}(t)$ и $P^{(2)}(t)$ удовлетворяют ограничениям (9). Решение этой задачи проведем по зонам (по зоне 1 — дефицита товара, по зоне 2 — затоваривания рынка, по зоне 3 — баланса спроса и предложения, то есть динамического рыночного равновесия).

1. В зоне 1 $0 \le Q(t) \le Q^{(1)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(1)}(t)$ в выражение (12) для $J(t)$ имеем:

$$J(t) = \frac{Q(t)^2}{2R} + (P(t-1) - P_1)Q(t) + Q^o(t)(P_1 - P_2) = J^{(1)}(t). \tag{20}$$

Как видим, $J^{(1)}(t)$ монотонно растет с ростом $Q(t)$ по линейно-квадратичному закону, достигая максимального значения на границе области при $Q(t) = Q^{(1)}(t)$:

$$J^{(1)}_{\max}(t) = J^{(1)}(t)\,|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}\,. \tag{21}$$

Если остаток товара $Q^o(t)$ от продаж предыдущего интервала дискретного времени не превышает величину $Q^{(1)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^z(t) = Q^{(1)}(t) - Q^o(t)$ (в частности, $Q^z(t) = 0$ при $Q^o(t) = Q^{(1)}(t)$) обеспечивает максимум прибыли. Иначе, при $Q^o(t) > Q^{(1)}(t)$, следует искать решение задачи оптимизации прибыли в областях 2 или 3.

2. В зоне 2 $Q(t) > Q^{(2)}(t)$. После подстановки в $J(t)$ для этой зоны $P(t) = P^{(2)}(t)$, не зависящего от $Q(t)$, имеем:

$$J(t) = (Q_m - aP^{(2)}(t))P^{(2)}(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}(P^{(2)}(t) - P(t-1))^2 = J^{(2)}(t). \tag{22}$$

Как видим, $J^{(2)}(t)$ монотонно убывает с ростом $Q(t)$ по линейному закону, так что достигает в этой зоне наибольшего значения при $Q(t) = Q^{(2)}(t)$:

$$J^{(2)}_{\max}(t) = J^{(2)}(t)\,|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)}\,. \tag{23}$$

Если $Q^o(t) \leq Q^{(2)}(t)$, то дополнительный заказ и поставка товара на рынок в объеме $Q^z(t) = Q^{(2)}(t) - Q^o(t)$ обеспечивает получение этого максимума прибыли. Если же $Q^o(t) > Q^{(2)}(t)$, то $Q^z(t) = 0$, и достигается лишь значение прибыли $J^{(2)}(t)\,|_{Q(t)=Q^o(t)} < J^{(2)}_{\max}(t)$.

3. В зоне 3 $Q^{(1)}(t) \leq Q(t) \leq Q^{(2)}(t)$. После подстановки $P(t) = P^{(3)}(t)$ в $J(t)$ для этой зоны, имеем:

$$J(t) = Q(t)\frac{Q_m - Q(t)}{a} - Q(t)P_1 + Q^o(t)(P_1 - P_2) - \frac{R}{2}\Big(\frac{Q_m - Q(t)}{a} - P(t-1)\Big)^2 = J^{(3)}(t). \tag{24}$$

Это выпуклая вверх линейно-квадратичная функция переменной $Q(t)$. В точке максимума $J^{(3)}(t)$ по $Q(t)$

$$\frac{\partial J^{(3)}(t)}{\partial Q(t)} = \frac{1}{a^2}[R(Q_m - aP(t-1)) + a(Q_m - aP_1) - (2a+R)Q(t)] = 0, \tag{25}$$

откуда

$$Q(t) = \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + a(Q_m - aP_1)}{2a+R} = Q^{(3)}(t). \tag{26}$$

В этой точке $J^{(3)}(t)$ достигает максимального значения. Нетрудно видеть, что $Q^{(1)}(t) < Q^{(3)}(t) < Q^{(2)}(t)$, то есть точка максимума $Q^{(3)}(t)$ лежит в области 3. Действительно, с учетом того, что $Q_m > P(t-1) > P_1$, имеем:

$$Q^{(3)}(t) - Q^{(1)}(t) = -\frac{aR(Q_m - aP(t-1))}{(2a+R)(a+R)} + \frac{a(Q_m - aP_1)}{2a+R} > \frac{a^2(Q_m - aP(t-1))}{(2a+R)(a+R)} > 0.$$

С другой стороны,

$$Q^{(3)}(t) - Q^{(2)}(t) = -\frac{aP_1}{2a+R} < 0.$$

Максимальное значение прибыли в зоне 3 равно (при $Q^o(t) < Q^{(3)}(t)$):

$$J^{(3)}_{\max}(t) = J^{(3)}(t)\,|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}\,. \tag{27}$$

Это значение является и глобально максимальным, потенциально возможным при $Q^o(t) \leq Q^{(3)}(t)$. Если же $Q^{(3)}(t) < Q^o(t) \leq Q^{(2)}(t)$, то глобально максимальное значение прибыли не может быть достигнуто, и достигается только условно-максимальное значение (при фиксированном $Q^o(t)$) внутри зоны 3, лежащее между $J^{(3)}_{\max}(t)$ и $J^{(2)}(t)$.

Нетрудно показать, что

$$\frac{dJ^{(3)}(t)}{dQ(t)}\Big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{dJ^{(1)}(t)}{dQ(t)}\Big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} - P_1 > 0,$$

$$\frac{dJ^{(3)}(t)}{dQ(t)}\Big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{dJ^{(2)}(t)}{dQ(t)}\Big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = -P_1 < 0,$$

то есть условно-оптимальная прибыль $J(t)$ — непрерывная и всюду дифференцируемая (во всех зонах, включая границы зон) функция переменной $Q(t)$.

На рис. 2 для примера 1, рассмотренного выше (в предыдущем подразделе), приведен ход условно-оптимальной прибыли (при фиксированном $Q(t)$ и при $Q^o(t) = 0$) с указанием точки глобального максимума ($Q^{(3)}(t) = 1.203$, $J^{(3)}_{\max}(t) = 4.802$).

Очевидно, глобальный максимум прибыли может быть получен только в том случае, если объем остатка товара, не проданного на предыдущем интервале времени, не превышает величину

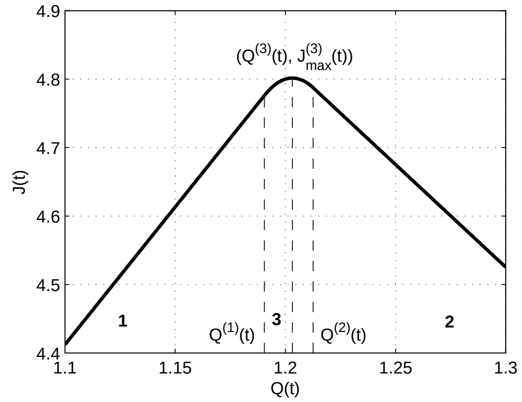

Рис. 2. Условно-максимальная прибыль

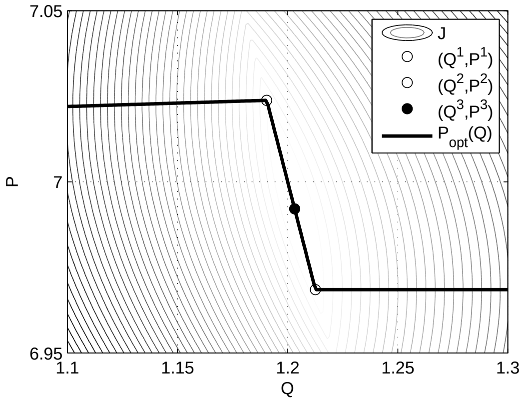

Рис. 3. Топокарта поверхности прибыли

оптимального объема поставки товара на рынок: $Q^o(t) \le Q^{(3)}(t)$. В противном случае прибыль продавца будет меньше максимально возможной. Причем, если при этом объем остатков товара будет оставаться в зоне 3, то есть будет лежать в интервале $Q^{(3)}(t) < Q^o(t) \le Q^{(2)}(t)$, то рынок будет оставаться в состоянии динамичекого равновесия (спрос на товар будет оставаться равным предложению, в качестве которого будет выступать остаток товара). И только при $Q^o(t) > Q^{(2)}(t)$ предложение товара перейдет в зону 2, и начнется затоваривание рынка.

На рис. 3 представлена топокарта поверхности $J(t)$ как функция координат $Q(t)$, $P(t)$. Линии горизонтальных сечений более высокого уровня — более светлые, низкого — более темные. На этом же рисунке светлыми кружочками показаны границы зон, черным кружочком показана точка абсолютного максимума прибыли. Полужирной линией представлена кривая условно-оптимальной цены $P(t)$ как функция предложения товара $Q(t)$ (та же, что на рис. 1). Как видим, эта кривая в зонах 1 и 2 проходит по линиям градиента $J(t)$, то есть перпендикулярно линиям равного уровня поверхности прибыли, а в зоне 3 — по гребню поверхности прибыли, где спрос равен предложению. Двигаясь вдоль кривой условно-оптимальной цены, можно проследить, как меняется условно-максимальная прибыль продавца.

Обратим внимание, что представленная на рис. 3 поверхность прибыли в координатах Q, P — непрерывная функция координат, дифференцируемая всюду, кроме линии $Q = Q_m - aP$ раздела зон 1 и 2, на которой частные производные терпят разрывы 1 рода (сохраняется дифференцируемость целевой функции только вдоль границы раздела этих зон, то есть в зоне 3). Следовательно, из-за ограничений типа неравенств (3) целевая функция рынка является кусочно-дифференцируемой (кусочно-гладкой) функцией $Q(t)$, $P(t)$. Абсолютный максимум прибыли продавца достигается в зоне 3 на границе раздела зон 1 и 2.

Равновесная цена и равновесная прибыль

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *В условиях справедливости соотношений* (1)–(7) *максимальная прибыль продавца на рынке одного товара на каждом интервале дискретного времени t достигается при равенстве и только при равенстве спроса и предложения* $Q^d(t) = Q_m - aP(t) = Q(t)$ *в точке*

$$\widehat{P}(t) = \frac{Q_m - \widehat{Q}(t)}{a},$$

$$\widehat{Q}(t) = \frac{R(Q_m - aP(t-1)) + a(Q_m - aP_1)}{2a + R},$$

где P_1 — закупочная цена товара, $P(t-1)$ — цена товара в предыдущем периоде, $\widehat{Q}(t)$ — оптимальный объем поставки товара на рынок в момент времени t, $\widehat{P}(t)$ — оптимальная цена товара в этот момент времени.

Следствием этой теоремы является рекуррентное соотношение, определяющее динамику оптимальной цены товара в случае, когда предыдущее значение цены — тоже оптимальное ($P(t-1) = \widehat{P}(t-1)$):

$$\widehat{P}(t+1) = \frac{R}{2a+R}\widehat{P}(t) + \frac{Q_m + aP_1}{2a+R}, \ \widehat{P}(0) = P_0. \tag{28}$$

Это уравнение справедливо при условии, что объемы остатков непроданного товара не превышают величины оптимальной поставки товара на рынок.

Поскольку $R/(2a+R) < 1$, последовательность оптимальных цен $\{\widehat{P}(t)\}$ при $t \to \infty$ стремится к конечному пределу

$$P^* = \frac{Q_m + aP_1}{2a}, \tag{29}$$

являющемуся асимптотически равновесным значением цены. Эта величина сразу находится из (28), так как при $t \to \infty$ и $\widehat{P}(t+1) \to P^*$, и $\widehat{P}(t) \to P^*$, так что в состоянии асимптотического равновесия уравнение (28) принимает вид: $P^* = (R/(2a+R))P^* + (Q_m + aP_1)/(2a+R)$, откуда и следует значение P^*, представленное в (29). Соответствующее ему асимптотически равновесное значение уровня поставки товара на рынок точно совпадает с величиной покупательского спроса на товар по оптимальной цене P^*:

$$Q^* = Q_m - aP^* = \frac{Q_m - aP_1}{2}, \tag{30}$$

и, что интересно, равно половине покупательского спроса на товар по цене закупки P_1.

Решение разностного уравнения (28) представляет собой затухающую экспоненту:

$$\widehat{P}(t) = \alpha^t(P_0 - P^*) + P^* = \exp(-\beta t)(P_0 - P^*) + P^*, \tag{31}$$

где $\alpha = R/(2a+R) < 1$, $\beta = |\ln(R/(2a+R))|$. При $P_0 \neq P^*$ оптимальная цена постепенно приближается к асимптотически равновесной. При $P_0 = P^*$ сразу имеем асимптотически равновесную цену: $\widehat{P}(t) \equiv P^*$.

По мере приближения цены товара к асимптотически равновесному значению P^* прибыль продавца приближается к своему асимптотически равновесному значению. Если при асимптотическом равновесии рынка $Q^o < Q^*$, то асимптотически равновесная прибыль равна

$$J^* = Q^*(P^* - P_1) + Q^o(P_1 - P_2). \tag{32}$$

Общий случай: рынок многих товаров ($n > 1$)

Вернемся к случаю рынка многих товаров. Все переменные состояния рынка опять становятся n-векторами-столбцами. Как мы видели в предыдущем разделе, в случае одного товара прибыль продавца $J(t)$ является непрерывной кусочно-дифференцируемой (кусочно-гладкой) функцией $P(t)$ и $Q(t)$ с разрывом частных производных по $P(t)$ и $Q(t)$ на границе раздела зон 1 и 2 состояния рынка. В силу ограничений типа неравенств (3) целевая функция (7) (суммарная прибыль продавца в момент времени t) в случае многих товаров также, очевидно, имеет скачки градиентов по $P(t)$ и $Q(t)$ на границах раздела зон дефицита и затоваривания рынка по каждому из товаров, то есть является кусочно-гладкой.

Очевидно, провести аналогичное предыдущему исследование 3^n зон состояния многих (n) товаров не представляется возможным. Однако путем определенного преобразования (унифицированного индикаторного представления) кусочно-дифференцируемой по многим переменным целевой функции (7) это сделать удается.

Унифицированное индикаторное представление целевой функции рынка. Гипотетическая прибыль продавца

Для унификации представления целевой функции в случае многих ($n > 1$) товаров введем индикаторные диагональные булевы $n \times n$-матрицы-предикаты $C^{(k)}(t)$, где $k = 1, 2, 3$ — номера зон. Диагональные элементы этих матриц указывают гипотетическое состояние рынка по каждому товару ($C_{ii}^{(k)}(t) = 1$ — присутствие в t-й момент времени i-го товара в k-й зоне, $C_{ii}^{(k)}(t) = 0$ — отсутствие). Каждый товар не может находиться одновременно более чем в одной зоне состояния рынка. Поэтому в каждой строке $n \times 3$-матрицы $C(t)$, составленной из n-векторов-столбцов диагональных элементов матриц $C^{(1)}(t), C^{(2)}(t), C^{(3)}(t)$, так что $C_{ik}(t) = C_{ii}^{(k)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 3}$, может находиться одна и только одна единица (остальные два элемента строки равны нулю). Каждой такой матрице соответствует своя расстановка (размещение с повторениями) 3-х элементов (зон состояний товара) по n товарам. Всего таких разных расстановок 3^n. Это и есть число возможных расстановок зон состояний по всем товарам в каждый момент дискретного времени. Целевая функция $J(t)$ принимает тогда вид гладкой (непрерывной и дифференцируемой по $P(t)$ и $Q(t)$) квадратичной по $P(t)$ и линейной по $Q(t)$ формы с гипотетическими матрицами-предикатами $C^{(k)}(t)$:

$$J(t) = Q^T(t)C^{(1)}(t)P(t) + (Q_m - AP(t))^T(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))P(t) - Q^T(t)P_1 + Q^{oT}(t)(P_1 - P_2) -$$

$$-\frac{1}{2}(P(t) - P(t-1))^T R(P(t) - P(t-1)) \Longrightarrow \max_{P(t),Q(t)}. \qquad (33)$$

Условно-оптимальные цены и оптимальное предложение товаров

Исследуем поведение гипотетической (при фиксированной матрице $C(t)$) прибыли продавца (33). Вычислим градиент $\nabla_P J(t)$ и гессиан $\nabla_P^2 J(t)$ этой функции при фиксированном $Q(t)$ с учетом симметрии диагональных матриц $C^{(k)}(t)$:

$$\nabla_P J(t) = \frac{\partial J(t)}{\partial P(t)} = C^{(1)}(t)Q(t) - A^T(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))P(t) +$$

$$+(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))(Q_m - AP(t)) - R(P(t) - P(t-1)),$$

$$\nabla_P^2 J(t) = \frac{\partial^2 J(t)}{\partial P(t)^2} = -A^T(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t)) - (C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))A - R.$$

Если в зонах 1 и 2 гессиан $\nabla_P^2 J(t)$ целевой функции $J(t)$ — отрицательно определенная матрица (а необходимым и достаточным условием этого является, как известно [Гантмахер, 1967, с. 277], отрицательность всех главных миноров матрицы $\nabla_P^2 J(t)$, что определяет ограничения на элементы матрицы A), то в этих зонах $J(t)$ вогнута по $P(t)$ и достигает максимума по $P(t)$ при фиксированном $Q(t)$. Необходимым условием максимума является равенство нулю градиента: $\partial J(t)/\partial P(t) = 0$. Последнее равенство — уравнение для $P(t)$ в зонах 1 и 2. В зоне 3 имеем баланс спроса и предложения товаров: $Q^d(t) = Q(t)$, то есть, с учетом (1), уравнение $Q_m - AP(t) = Q(t)$ для $P(t)$. Объединяя логически уравнения для всех зон, получаем систему:

$$\left(C^{(1)}(t) + C^{(2)}(t)\right)\nabla_P J(t) + C^{(3)}(t)\left(Q_m - AP(t) - Q(t)\right) = 0.$$

Решая эту систему относительно $P(t)$, находим:

$$P(t) = \alpha(t) + \beta(t)Q(t), \qquad (34)$$

$$\alpha(t) = (C^{(1)}(t) + C^{(2)}(t))\{(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))(A + A^T) + R\}^{-1}\cdot$$

$$\cdot[(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))Q_m + RP(t-1)] + C^{(3)}(t)A^{-1}Q_m, \quad (35)$$

$$\beta(t) = (C^{(1)}(t) + C^{(2)}(t))\{(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))(A + A^T) + R\}^{-1}C^{(1)}(t) - C^{(3)}(t)A^{-1}. \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что в случае одного товара, когда $n = 1$, $C^{(k)}(t)$ — скаляры, при $C^{(1)}(t) = 1$ ($C^{(2)}(t) = C^{(3)}(t) = 0$) получаем формулу (13) для $P(t)$ 1-й зоны, при $C^{(2)}(t) = 1$ ($C^{(1)}(t) = C^{(3)}(t) = 0$) — формулу (16) для 2-й зоны, при $C^{(3)}(t) = 1$ ($C^{(1)}(t) = C^{(2)}(t) = 0$) — формулу (18) для 3-й зоны.

Возвращаясь снова к случаю многих товаров и подставляя выражение (34) для $P(Q)$ в выражение (33) для J, получаем условно-квадратичную зависимость $J(Q)$. Максимизируя J по Q, находим оптимальное предложение товаров (обозначим его через $\widehat{Q}(t)$):

$$\widehat{Q}(t) = V^{-1}(t)u(t), \quad (37)$$

$$u(t) = C^{(1)}(t)\alpha(t) - \beta^T(t)A^T(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))\alpha(t) + \beta^T(t)(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))(Q_m - A\alpha(t)) -$$
$$-\beta^T(t)R(\alpha(t) - P(t-1)) - P_1, \quad (38)$$

$$V(t) = -C^{(1)}(t)\beta(t) - \beta^T(t)C^{(1)}(t) + \beta^T(t)A^T(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))\beta(t) +$$
$$+\beta^T(t)(C^{(2)}(t) + C^{(3)}(t))A\beta(t) + \beta^T(t)R\beta(t). \quad (39)$$

Оптимальный заказ товаров и алгоритм выделения решения

Предложение товаров в объеме $\widehat{Q}(t)$, однако, не всегда достижимо, поскольку предложение товаров на рынок складывается, в соответствии с формулой (5), из остатков $Q^o(t)$ товаров, не проданных на предыдущем интервале времени, и объемов $Q^z(t)$ товаров, дополнительно поступивших на рынок от заказа, произведенного τ шагами ранее (в момент $t - \tau$). Очевидно, если объем $Q^o_j(t)$ остатков некоторого j-го товара превышает соответствующую компоненту вектора $\widehat{Q}_j(t)$, то даже в отсутствие дополнительных поставок ($Q^z_j(t) = 0$) этого товара на рынок объем $Q_j(t)$ его поставки в момент t будет превышать величину $\widehat{Q}_j(t)$, и рынок окажется затоваренным по этому товару. Условие достижения максимума прибыли не может быть при этом выполнено.

С другой стороны, если объем $Q^o_j(t)$ остатков некоторого j-го товара меньше соответствующей компоненты вектора $\widehat{Q}_j(t)$, то с помощью дополнительной поставки этого товара в объеме $Q^z_j(t) = \widehat{Q}_j(t) - Q^o_j(t)$ можно ликвидировать дефицит этого товара и обеспечить оптимальную поставку товара на рынок и максимум прибыли продавца.

Следовательно, оптимальная стратегия заказов товаров для их поставки на рынок должна состоять в том, чтобы, рассчитав в момент времени $t - \tau$ прогнозируемое на момент времени t состояние оптимального рынка, получить оптимальное значение $\widehat{Q}(t)$ вектора желаемой поставки товаров на рынок и заказать в момент времени $t - \tau$ дополнительное количество каждого j-го товара, равное разности $\widehat{Q}_j(t) - Q^o_j(t)$, если прогнозируется $Q^o_j(t) < \widehat{Q}_j(t)$, и не заказывать дополнительно j-й товар, если прогнозируется обратное:

$$Q^z_j(t) = \begin{cases} \widehat{Q}_j(t) - Q^o_j(t), & \text{если } Q^o_j(t) < \widehat{Q}_j(t), \\ 0, & \text{если } Q^o_j(t) \geq \widehat{Q}_j(t), \end{cases} \quad j = \overline{1, n}. \quad (40)$$

Кратко это можно записать в виде:

$$Q^z(t) = \max(\widehat{Q}(t) - Q^o(t), 0),$$

где $\max(\widehat{Q}(t) - Q^o(t), 0)$ понимается как вектор, составленный из максимальных значений одноименных компонент вектора $\widehat{Q}(t) - Q^o(t)$ и нуль-вектора.

Поскольку на каждом шаге дискретного времени t может иметь место только одна расстановка товаров по зонам и она неизвестна, приходится искать 3^n решений задачи оптимизации, соответствующих 3^n гипотетическим значениям матричного предиката C. Для каждого решения находится фактическое значение S этого матричного предиката, рассчитываемое по получаемым значениям векторов цен товаров, объемов остатков, оптимальных допустимых дополнительных заказов, спроса и предложения. Критерием отбора правильного решения является совпадение фактического и гипотетического предикатов. Алгоритм такого перебора и сравнения построен и программно реализован в данной работе.

Асимптотически оптимальное равновесное состояние рынка (точка покоя)

В условиях динамического равновесия рынка спрос $Q^d(t) = Q_m - AP(t)$ на все товары равен уровню $\widehat{Q}(t)$ их поставки на рынок, то есть все товары находятся в зонах 3. Тогда, если даже на рынке могут оставаться непроданные товары в объемах $Q^o(t)$, не превышающих оптимальные значения $\widehat{Q}(t)$, дополнительные заказы в объемах $Q^z(t) = \widehat{Q}(t) - Q^o(t)$ полностью обеспечат спрос и максимум прибыли продавца. Действительно, если все товары — в зоне 3, то предложение равно спросу, объему продаж и сумме объемов заказа и остатков товаров, в силу чего имеем

$$J(t) = (Q_m - AP(t))^T(P(t) - P_1) + Q^{oT}(t)(P_1 - P_2) - \frac{1}{2}(P(t) - P(t-1))^T R(P(t) - P(t-1)).$$

Найдем градиент и гессиан этой функции по $P(t)$:

$$\frac{dJ(t)}{dP(t)} = -A^T(P(t) - P_1) + (Q_m - AP(t)) - R(P(t) - P(t-1)),$$

$$\frac{d^2J(t)}{dP^2(t)} = -(A + A^T + R).$$

Максимум $J(t)$ по $P(t)$ достигается при равенстве нулю градиента и отрицательной определенности матрицы-гессиана, откуда при положительной определенности матрицы $A + A^T + R$ получаем оптимальное значение вектора цен:

$$\widehat{P}(t) = (A + A^T + R)^{-1}(Q_m + A^T P_1 + RP(t-1).$$

Для положительной определенности матрицы $A+A^T+R$ необходимо и достаточно положительности всех диагональных миноров этой матрицы [Гантмахер, 1967, с. 277]. Этим условиям должна подчиняться матрица A.

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *В условиях справедливости соотношений* (1)–(7) *и положительной определенности матрицы $A + A^T + R$ максимальная прибыль продавца на рынке многих товаров на каждом интервале дискретного времени t достигается при равенстве и только при равенстве спроса и предложения $Q^d(t) = Q_m - AP(t) = Q(t)$ в точке*

$$\widehat{P}(t) = (A + A^T + R)^{-1}(Q_m + A^T P_1 + RP(t-1),$$

$$\widehat{Q}(t) = Q_m - A(A + A^T + R)^{-1}(Q_m + A^T P_1 + RP(t-1),$$

где P_1 — вектор закупочных цен товаров, $P(t-1)$ — вектор цен товаров в предыдущем периоде, $\widehat{Q}(t)$ — вектор оптимальных объемов поставки товаров на рынок в момент времени t, $\widehat{P}(t)$ — вектор оптимальных цен товаров в этот момент времени.

Следствием этой теоремы является рекуррентное соотношение, определяющее динамику вектора оптимальных цен товаров в случае, когда предыдущее значение вектора цен — тоже оптимальное ($P(t-1) = \widehat{P}(t-1)$):

$$\widehat{P}(t+1) = (A + A^T + R)^{-1}(R\widehat{P}(t) + (Q_m + A^T P_1)),\ \widehat{P}(0) = P_0. \tag{41}$$

Это уравнение справедливо при условии, что объемы остатков непроданного товара не превышают величины оптимальной поставки товаров на рынок.

Последовательность векторов оптимальных цен $\{\widehat{P}(t)\}$ при $t \to \infty$ стремится к конечному пределу

$$P^* = (A + A^T)^{-1}(Q_m + A^T P_1), \tag{42}$$

являющемуся асимптотически равновесным значением вектора цен (состоянием покоя рынка). Эта величина сразу находится из (41), так как при $t \to \infty$ и $\widehat{P}(t+1) \to P^*$, и $\widehat{P}(t) \to P^*$, так что в состоянии асимптотического равновесия уравнение (41) принимает вид $(A + A^T + R)P^* = RP^* + (Q_m + AP_1)$, откуда и следует значение P^*, представленное в (42). Соответствующее ему асимптотически равновесное значение уровня поставки товаров на рынок точно совпадает с величиной покупательского спроса на товары по оптимальным ценам P^*:

$$Q^* = Q_m - AP^* = A^T(A + A^T)^{-1}Q_m - A(A + A^T)^{-1}A^T P_1. \tag{43}$$

Если какая-либо компонента вектора Q^* становится отрицательной, она приравнивается нулю в соответствии с (2):

$$Q_i^* = \begin{cases} Q_{mi} - (AP^*)_i, & \text{если } Q_{mi} - (AP^*)_i > 0, \\ 0, & \text{если } Q_{mi} - (AP^*)_i \leq 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \tag{44}$$

Это означает, что некоторые товары на равновесном рынке могут не пользоваться спросом и не поставляются на рынок.

Решение векторного разностного уравнения (41) представляет собой затухающую векторную экспоненту:

$$\widehat{P}(t) = \alpha^t(P_0 - P^*) + P^* = \exp(-\beta t)(P_0 - P^*) + P^*, \tag{45}$$

где $\alpha = (A + A^T + R)^{-1}R$, $\beta = |\ln((A + A^T + R)^{-1}R)|$. При $P_0 \neq P^*$ вектор оптимальных цен постепенно приближается к асимптотически равновесному значению. При $P_0 = P^*$ сразу имеем асимптотически равновесный вектор цен: $\widehat{P}(t) \equiv P^*$.

По мере приближения вектора цен товаров к асимптотически равновесному значению P^* прибыль продавца приближается к своему асимптотически равновесному значению. Если при асимптотическом равновесии рынка $Q^o < Q^*$, то асимптотически равновесная прибыль равна

$$J^* = Q^*(P^* - P_1) + Q^o(P_1 - P_2). \tag{46}$$

Нетрудно видеть, что теорема 1 и ее следствие являются частным случаем теоремы 2 и ее следствия при $n = 1$.

Имитационное моделирование переходных процессов на рынке

Проведем имитационное моделирование функционирования рынка многих товаров во времени и исследуем траектории перехода рынка к оптимальному состоянию асимптотического равновесия после возмущения рынка (вывода его из состояния равновесия).

Пусть до некоторого начального момента времени $t = 0$ в течение интервала времени $t = \overline{-\tau, -1}$, где τ — лаг (задержка) поставки товаров на рынок, рынок многих товаров находился в состоянии равновесия, при котором, согласно (42), $P(t) = P^* = (A + A^T)^{-1}(Q_m + A^T P_1)$, $Q(t) = Q^* = Q_m - AP^*$. На этом интервале времени имеем равновесные равные друг другу объемы спроса $Q^d(t) = Q^{d*} = Q_m - AP^*$, предложения $Q(t) = Q^* = Q^{d*}$, продаж $Q^s(t) = Q^{d*}$, заказов $Q^z(t) = Q^{d*}$ (остатки непроданных товаров отсутствуют: $Q^o(t) = Q^{o*} = 0$, за их хранение не нужно платить, что уменьшает издержки продавца).

Пусть в момент времени $t = 0$ с помощью некоторого внешнего воздействия рынок выводится из состояния равновесия скачкообразным изменением цен товаров, принимающих значения $P(0) = P_0 \neq P^*$, и, возможно, искусственным созданием на рынке излишков товаров в объеме $Q^o(0) = Q^o_0$. Это приводит к изменению спроса на товары $Q^d(0) = Q_m - AP_0 \neq Q^{d*}$. А поскольку поставки товаров в объемах равновесного заказа $Q^z(t) = Q^{d*}$ продолжают поступать на рынок еще в течение τ интервалов дискретного времени (из-за лага поставок), на рынке возникает затоваривание теми товарами, цены на которые возросли, и дефицит тех товаров, цены на которые упали. В соответствии с этим изменяются объемы продаж и суммарная прибыль продавца. В течение τ шагов дискретного времени рынок будет неуправляемым (изменить поставки товаров с целью коррекции ситуации и оптимизации рынка невозможно из-за лага поставок). Однако, начиная с момента $t = 0$, можно путем моделирования динамики рынка в соответствии с алгоритмом моделирования прогнозировать состояние рынка на τ шагов вперед и вычислять оптимальное значение вектора $\widehat{Q}(\tau)$ поставки товаров на рынок к моменту τ. Если к этому моменту времени остатки $Q^o(\tau)$ каких-то непроданных товаров будут меньше соответствующих компонент вектора $\widehat{Q}(\tau)$, в момент времени $t = 0$ потребуется произвести заказ этих товаров в объемах соответствующих компонент разности $Q^z(\tau) = \widehat{Q}(\tau) - Q^o(\tau)$, чтобы к моменту τ на рынок поступило оптимальное количество этих товаров, соответствующее динамическому равновесию рынка по этим товарам. По этим товарам в момент времени τ рынок окажется, таким образом, в зоне 3. Если же для каких-то товаров остатки в момент времени τ будут превышать значения соответствующих компонент вектора $\widehat{Q}(\tau)$, дополнительного заказа этих товаров делать не нужно, так как их достаточно для удовлетворения спроса, но затоваривание рынка по этим товарам на момент времени τ останется не ликвидированным, что повлияет на цены товаров в момент времени τ. По этим товарам рынок останется в зоне 2. Продолжая процесс моделирования и предсказания состояния рынка на следующие моменты времени, мы придем к ситуации, когда все остатки товаров будут проданы и рынок перейдет в состояние динамического равновесия (в зону 3) по всем товарам. Последующее развитие состояния рынка будет динамически равновесным с постепенным движением к асимптотически равновесному состоянию (состоянию покоя).

Пример 2. Рассмотрим пример рынка $n = 3$ товаров с лагом поставки $\tau = 10$ на интервале дискретного времени от $t = -\tau$ до $t = T = 1000$ при параметрах рынка

$$R = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

параметрах вектора спроса

$$Q_m = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

(все товары — конкурирующие, так как все недиагональные элементы матрицы A отрицательны) и начальных условиях

$$P(0) = P_0 = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 27 \end{pmatrix}, \; Q^o(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Главные диагональные миноры матрицы A положительны:

$$\det\begin{pmatrix} 0{,}8 \end{pmatrix} = 0{,}8 > 0, \; \det\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} = 0{,}24 > 0, \; \det\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \det(A) = 0{,}048 > 0.$$

Следовательно, матрица A — положительно-определенная. Тогда и матрицы $A + A^T$ и $A + A^T + R$ — положительно-определенные, и в соответствии с теоремой 2 существует оптимальное равновесное состояние рынка.

На рис. 4–16 приведены результаты имитационного моделирования рынка 3-х товаров со значениями параметров и начальных условий из примера 2.

На рис. 4, 5 представлены графики оптимальной динамики цен трех конкурирующих товаров, начальные цены двух из которых (1-го и 2-го) ниже равновесных, а третьего — выше равновесной. Из графиков видно, что со временем цены всех трех товаров приближаются к асимптотически равновесным значениям (к точке покоя) P^*.

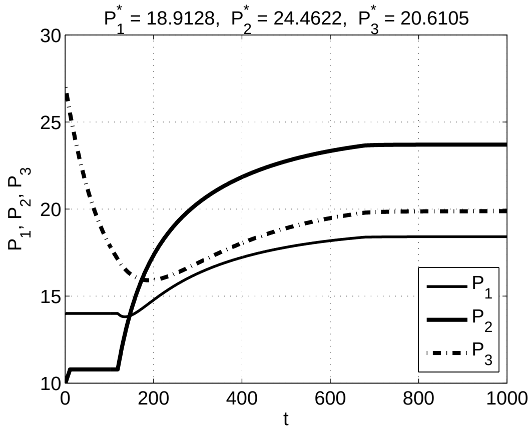

Рис. 4. Динамика цен

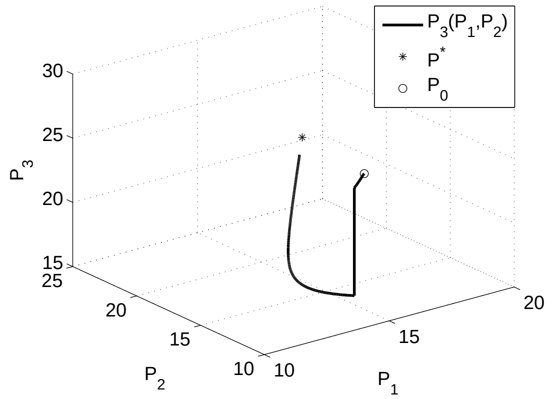

Рис. 5. Фазовая траектория цен

На рис. 6, 7 представлены графики динамики спроса на рассматриваемую тройку конкурирующих товаров при оптимальной динамике цен. Видно, что на 2-й и 3-й товары достигается устойчивый асимптотический спрос, тогда как на 1-й товар спрос асимптотически спадает до нуля. Это — один из результатов влияния друг на друга конкурирующих товаров.

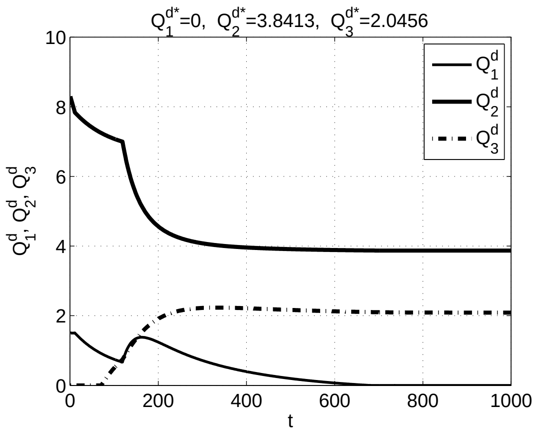

Рис. 6. Динамика спроса

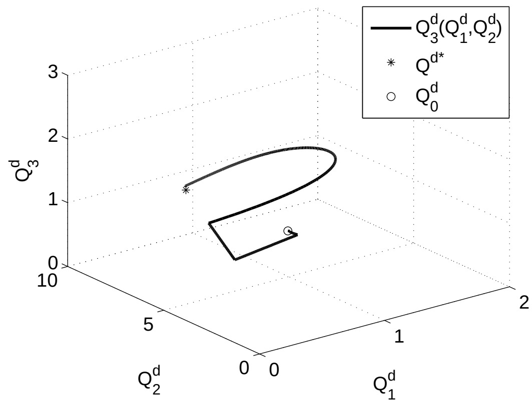

Рис. 7. Фазовая траектория спроса

На рис. 8, 9 представлены графики динамики дополнительных поставок рассматриваемой тройки конкурирующих товаров, заказ которых сделан τ шагами ранее при прогнозировании на момент времени t оптимальных цен. На графиках видно, что в течение начального участка времени от 0 до $\tau = 10$ на рынок поступают постоянные заказы, сделанные на предыдущем равновесном интервале функционирования рынка. Как видно из рис. 10, 11, в течение этого начального интервала накапливаются остатки непроданных товаров, рынок затоваривается, так что в конце этого интервала заказы товаров прекращаются. В течение достаточно длительного времени происходит распродажа накопленных остатков, пока не наступает дефицит товаров. Объем заказов резко возрастает по 2-му товару и постепенно возрастает по 1-му и 3-му товарам. Рынок начинает равновесное движение к асимптотическому равновесию, в котором спрос на 1-й товар падает до 0. Поэтому и заказы на этот товар в некоторый момент времени начинают снижаться и доходят до 0. Заказы на 2-й и 3-й товары достигают стационарного уровня, обеспечивающего асимптотическое равновесие рынка.

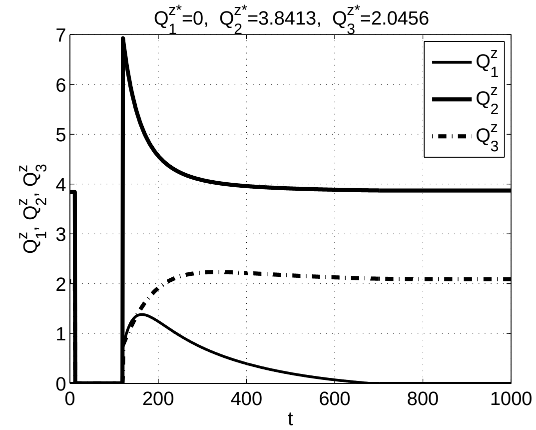

Рис. 8. Динамика заказов

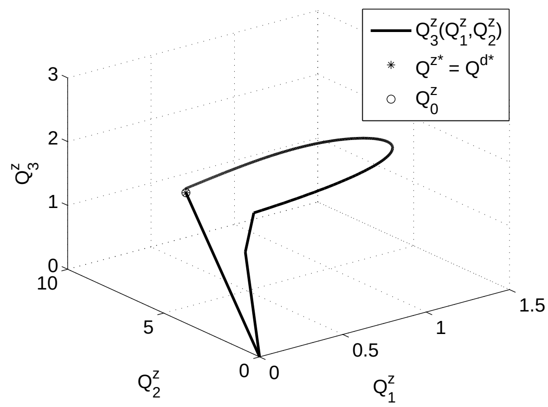

Рис. 9. Фазовая траектория заказов

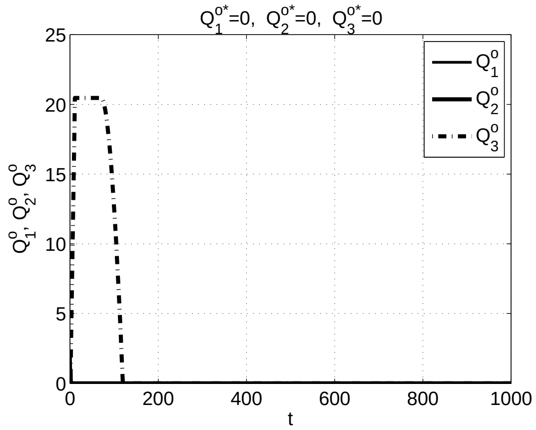

Рис. 10. Динамика остатков

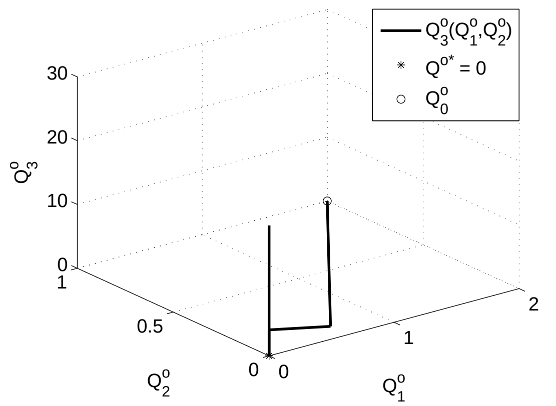

Рис. 11. Фазовая траектория остатков

На графиках рис. 12, 13 представлена динамика оптимальных допустимых суммарных (остатков плюс заказов) поставок товаров на рынок.

На рис. 14, 15 представлены графики динамики продаж товаров. Видно, что имеется некоторый интервал времени, на котором продажи падают до нуля. Это происходит, когда пользующиеся платежеспособным спросом 1-й и 2-й товары отсутствуют на рынке из-за нарушения рыночного равновесия, а 3-й товар по этой же причине оказывается настолько дорогим, что ста-

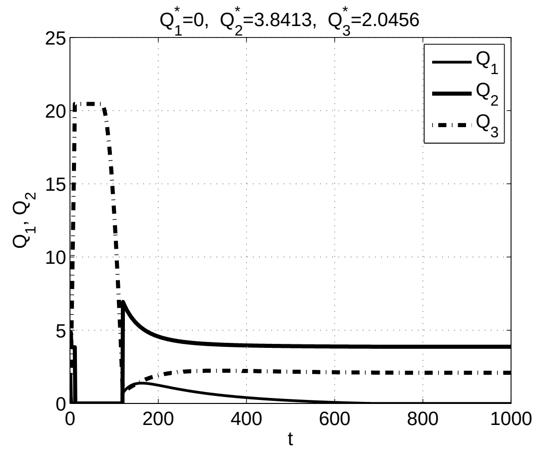

Рис. 12. Динамика поставки

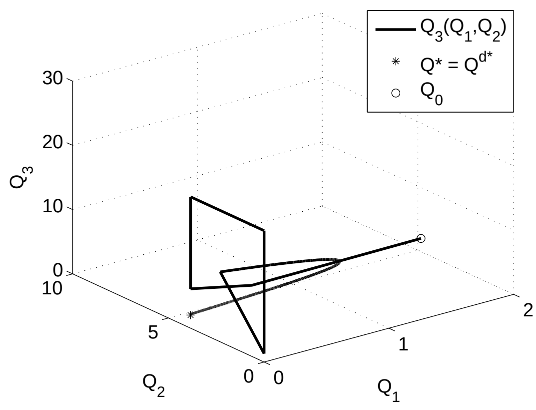

Рис. 13. Фазовая траектория поставки

новится «не по карману» покупателей (это следствие чисто линейной модели спроса (2)). Затем динамика продаж восстанавливается, постепенно приближаясь к асимптотически оптимальному уровню Q^{s*}.

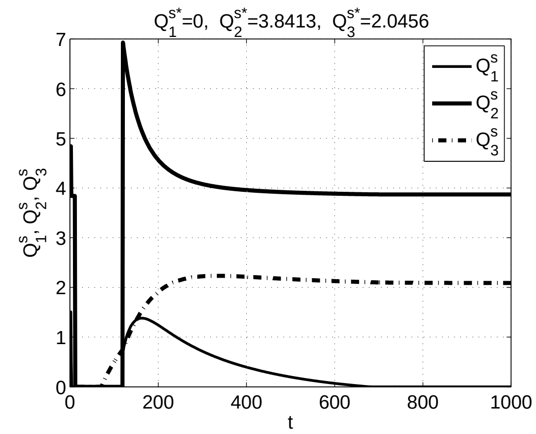

Рис. 14. Динамика продаж

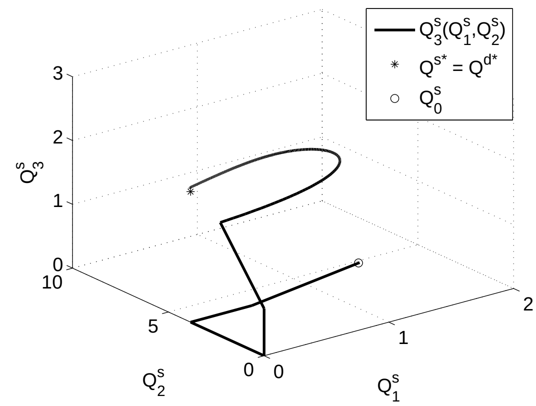

Рис. 15. Фазовая траектория продаж

Наконец, на рис. 16 представлена динамика максимально допустимой прибыли продавца. Видно, что в результате вывода рынка из равновесия суммарная (по всем товарам) прибыль продавца падает до отрицательного значения (убытки превышают выручку), и никакими силами продавец не может быстро восстановить состояние рентабельности рынка из-за сдерживающего влияния трех факторов: ограниченности платежеспособного спроса покупателей, лага поставок товаров и инерционности рынка. Постепенно, опираясь на оптимальную стратегию поставки товаров на рынок, рынок автоматически выходит из состояния кризиса, вызванного нарушением его равновесия, и переходит к равновесному движению, к асимптотическому равновесию, обеспечивающему максимальную прибыль продавца и полное удовлетворение потребительского спроса.

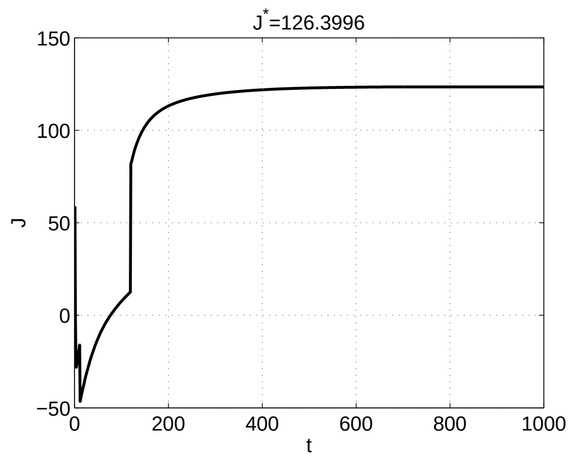

Рис. 16. Динамика прибыли

Краткая сводка результатов

Итак, в рассмотренной модели инерционного рынка как одного, так и многих товаров с фиксированной линией спроса предполагается, что объем продаж каждого товара на каждом шаге (интервале) дискретного времени определяется минимальной из двух величин: объема поставляемого на рынок товара (предложения товара) и объема спроса. При этом выделяются 3 зоны объемов поставок: зона дефицита товара (зона 1), зона затоваривания рынка (зона 2) и зона динамического равновесия рынка (зона 3). В первой зоне спрос превышает предложение, так что продавец недополучает прибыль. Во второй зоне предложение превышает спрос, так что продавец несет убыток из-за приобретения лишнего количества товара, не нашедшего спроса. В третьей зоне спрос равен предложению, поставляется на рынок и продается ровно столько товара, сколько нужно для удовлетворения покупательского спроса. Найдены границы, разделяющие эти зоны. Предполагается, что прибыль продавца равна разности между выручкой от продажи товара и затратами. Это затраты на приобретение товара и хранение остатков непроданного товара, а также «штрафы» за резкое изменение цены товара. Штрафная функция определяет инерционность рынка. Поскольку объемы продаж зависят (через линию спроса) от цены товара и соотношения спроса и предложения, для каждой зоны находятся свои условно-оптимальные (при фиксированном предложении) цены товара, зависящие от уровня предложения в каждой зоне, обеспечивающие максимум прибыли продавца при каждом фиксированном объеме предложения товара.

Оказалось, что зона динамического равновесия рынка (зона 3), в которой предложение равно спросу, представляет собой некоторый диапазон возможных предложений и соответствующий ему диапазон условно-оптимальных цен товара, среди которых имеется точка оптимальной цены, соответствующая оптимальному объему поставки товара на рынок, обеспечивающая абсолютный максимум прибыли продавца. Цена товара в этой точке не максимальная, а оптимальная, обеспечивающая максимальную прибыль продавца. Показано, что эта точка может быть достигнута только в том случае, если объем остатка непроданного товара не превышает оптимального объема поставки товара на рынок. Полученные соотношения позволяют построить рекуррентное уравнение, определяющее движение цен товаров от некоторого неравновесного оптимального значения к равновесному.

Показано, что состояние рынка многих ($n > 1$) товаров характеризуется указанными тремя возможными зонами по каждому из товаров, что приводит к 3^n возможных зон состояния рынка. Вследствие ограничений типа неравенств, присущих рассматриваемой математической модели рынка, целевая функция рынка (суммарная прибыль продавца) является кусочно-дифференцируемой функцией векторов цен и предложений товаров с разрывами градиента этой функции на линиях равенства спроса и предложения, то есть на линиях разделов зон 1 и 2 (в зоне 3), что затрудняет решение задачи векторной оптимизации этой функции. Построение аналитического решения задачи для каждой из 3^n зон не представляется возможным. В связи с этим предложен оригинальный подход к унифицированному представлению целевой кусочно-дифференцируемой функции через систему индикаторных матричных предикатных функций, что позволило представить целевую функцию многих переменных как условно-гладкую, всюду дифференцируемую при гипотетических значениях предикатных функций, и получить аналитическое решение задачи многомерной оптимизации. Накладными расходами этого приема является необходимость вычисления решения задачи при каждой из 3^n гипотез о состоянии рынка и выбора из этих решений истинного, соответствующего решению исходной задачи. На этой основе построен алгоритм имитационного моделирования оптимального рынка многих конкурирующих и/или сопутствующих товаров.

На примере имитационного моделирования рынка 3-х товаров проиллюстрированы некоторые основные закономерности взаимодействия товаров на рынке почти свободной конкуренции («почти», потому что штрафная составляющая целевой функции, придающая рынку инерционность, является внешним фактором, несколько ограничивающим свободную конкуренцию).

Список литературы

Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Морозов В. И. Микроэкономика: В 2-х т. Т.1. — С.-Пб.: Экономическая школа, 2006. — 352 с.

Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 576 с.

Поддубный В. В., Романович О. В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система // Труды X Международной ФАМЭТ'2011 конференции / Под ред. О. Ю. Воробьева. — Красноярск: КГТЭИ – СФУ, 2011. — С. 318–323.

Поддубный В. В., Романович О. В. Рестриктивная динамическая модель инерционного рынка с оптимальной поставкой товара на рынок в условиях запаздывания // Вестник Томского государственного университета. УВТИ. — 2011. — № 4 (17). — С. 16–24.