КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 2 С. 253–265

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.91.1

Симметрии уравнения Гамильтона–Якоби

Г. Н. Яковенко

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: yakovenkog@gmail.com

Получено 22 апреля 2010 г.

Вводится понятие преобразования симметрии уравнения Гамильтона–Якоби. Для группы симметрий показывается, как должны быть связаны с функцией Гамильтона коэффициенты инфинитезимального оператора группы. Приводятся примеры вычисления симметрий и примеры вычисления на основе симметрии полных интегралов.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона–Якоби; преобразование симметрии; продолжение точечных преобразований на производные; полный интеграл

Symmetries of the Hamilton–Jacobi equation

G. N. Yakovenko

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 9 Institutsky per., Dolgoprudny, 141700, Russia

Abstract. — The notion of symmetry transformations of the Hamilton–Jacobi equation. For the group of symmetries is shown how to be associated with the Hamiltonian function coefficients of the infinitesimal operator of the group. The examples of calculation of the symmetries and examples calculations based on the full symmetry of the integrals.

Keywords: Hamilton–Jacobi equation, a symmetry transformation; continuation of point transformations on the derivatives, the complete integral

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 253–265 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00228) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2012 годы)» (проект 2.1.1/3604).

Введение

Уравнение Гамильтона–Якоби наряду с уравнениями Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Уиттекера, Якоби, лежит в основе аналитической механики. В конечномерной механике при помощи полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби находится общее решение уравнений Лагранжа и Гамильтона. Достаточно разработаны методы вычисления полного интеграла [Гантмахер, 2001; Яковенко, 2004]. В теории оптимального управления метод Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзика основан на уравнении Гамильтона–Якоби [Аграчёв, 2005; Афанасьев, 2003]. Уравнение Гамильтона–Якоби является мостом между «осязаемой» механикой и квантовой механикой: в основе уравнений Шрёдингера, Паули, Дирака, Клейна–Гордона, Прока, Липпмана–Швингера лежит уравнение Гамильтона–Якоби [Ярошевский, 2001]. Уравнение Гамильтона–Якоби указывает на аналогию между уравнениями движения материальной точки и уравнением эйконала в геометрической оптике [Ольшанский, 1970].

1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Преобразование переменных

Положение конечномерной механической системы задается обощенными координатами $q_1, \ldots, q_n$. Динамика системы определяется функцией Гамильтона $H(t, q, p)$, $\quad q,\ p \in \mathbb{R}^n$, по которой вычисляется уравнение Гамильтона–Якоби [Гантмахер, 2001; Яковенко, 2004]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{1}$$

В качестве решения уравнения (1) понимается функция $S(t, q)$, удовлетворяющая уравнению. Введем обозначения

$$r_0 = \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad r_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad r = \left\| \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{matrix} \right\|, \qquad R = \left\| \begin{matrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

В этих обозначениях уравнение (1) примет вид

$$r_0 + H(t, q, r) = 0. \tag{3}$$

Подвергнем переменные t, q, S диффеоморфизму[1]

$$\begin{aligned} \widehat{t} &= f_0(t,\ q,\ S), \\ \widehat{q_i} &= f_i(t,\ q,\ S), \qquad i = \overline{1, n}, \\ \widehat{S} &= g(t,\ q,\ S). \end{aligned} \tag{4}$$

Продолжим преобразование (4) на переменные r_0, r_i (см. (2). Рассмотрим многообразие $S = \varphi(t,\ q)$. В результате преобразования (4) оно перейдет в многообразие

$$\widehat{S} = \widehat{\varphi}(\widehat{t},\ \widehat{q}). \tag{5}$$

[1] Функции, участвующие в построениях, предполагаются достаточно гладкими; рассуждения, определения, утверждения — локальны.

Аналогично (2) введем обозначения

$$\widehat{r_0} = \frac{\partial\widehat{S}}{\partial\widehat{t}}, \qquad \widehat{r_i} = \frac{\partial\widehat{S}}{\partial\widehat{q_i}}, \qquad i = \overline{1,\, n}, \qquad \widehat{r} = \begin{Vmatrix} \widehat{r_1} \\ \widehat{r_2} \\ \vdots \\ \widehat{r_n} \end{Vmatrix}, \qquad \widehat{R} = \begin{Vmatrix} \widehat{r_0} \\ \widehat{r_1} \\ \vdots \\ \widehat{r_n} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Учтем в (5) преобразование (4)

$$g(t,\, q,\, S) = \widehat{\varphi}\Big(f_0(t,\, q,\, S),\; f(t,\, q,\, S)\Big). \tag{7}$$

Продифференцируем (7) по t, с учетом обозначений (2) и (6) получим

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial S} r_0 = \widehat{r_0}\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial S} r_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{r_i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial S} r_0\right). \tag{8}$$

Дифференцирование (7) по q_j приводит к аналогичному результату:

$$\frac{\partial g}{\partial q_j} + \frac{\partial g}{\partial S} r_j = \widehat{r_0}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_j} + \frac{\partial f_0}{\partial S} r_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{r_i}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \frac{\partial f_i}{\partial S} r_j\right). \tag{9}$$

Запишем(8), (9) в матричном виде

$$A = B\widehat{R}. \tag{10}$$

Помимо (6), использованы обозначения

$$A = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial S} r_0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial q_1} + \dfrac{\partial g}{\partial S} r_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial q_n} + \dfrac{\partial g}{\partial S} r_n \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$$B = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_0}{\partial t} + \dfrac{\partial f_0}{\partial S} r_0 & \dfrac{\partial f_1}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial S} r_0 & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial t} + \dfrac{\partial f_n}{\partial S} r_0 \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_0}{\partial S} r_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial S} r_1 & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_n}{\partial S} r_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial q_n} + \dfrac{\partial f_0}{\partial S} r_n & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_n} + \dfrac{\partial f_1}{\partial S} r_n & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial q_n} + \dfrac{\partial f_n}{\partial S} r_n \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

В предположении

$$\det B \neq 0 \tag{13}$$

уравнение (10) разрешается относительно $\widehat{R}$, что определяет преобразование

$$\begin{aligned} \widehat{r_0} &= h_0(t, q, S, R), \\ \widehat{r_i} &= h_i(t, q, S, R), \qquad i = \overline{1,\, n}, \end{aligned} \tag{14}$$

переменных r_0, r_i, однозначно заданное диффеоморфизмом (4). Преобразование (14) называется *продолжением* на переменные r_0, r_i преобразования (4).

2. Преобразование симметрии

Предполагаем, что преобразования (4), (14) имеют обратное

$$
\begin{aligned}
t &= f_0^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}),\\
q_i &= f_i^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}), \qquad i = \overline{1, n},\\
S &= g^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}),\\
r_0 &= h_0^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{R}),\\
r_i &= h_i^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{R}), \qquad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Подстановка преобразований (15) в уравнение (3) приводит к уравнению Гамильтона–Якоби в новых переменных

$$
h_0^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{R}) + H\left(f_0^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}),\ f_i^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}),\ h^*(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{R})\right) = 0. \tag{16}
$$

Для того чтобы придать этому уравнению вид (1), разрешим его, если возможно, относительно $\widehat{r}_0$:

$$
\widehat{r}_0 = \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{t}} = -\widehat{H}\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{r}\right) = -\widehat{H}\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{q}}\right). \tag{17}
$$

Отметим, что в результате замены переменных (15) у функции $\widehat{H}\left(\widehat{x}, \widehat{S}, \widehat{r}\right)$ может появиться зависимость от переменной $\widehat{S}$.

Определение 1. Преобразование (4) называется *преобразованием симметрии* уравнения Гамильтона–Якоби (1), если в новых переменных уравнение (17) имеет вид (1) и задаётся той же функцией Гамильтона $H(\cdot, \cdot, \cdot)$, что и (1):

$$
\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{t}} + H\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{q}}\right) = 0. \tag{18}
$$

3. Группа симметрий

Пусть задана однопараметрическая группа диффеоморфизмов

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} &= f_0(t, q, S, a),\\
\widehat{q}_i &= f_i(t, q, S, a), \qquad i = \overline{1, n},\\
\widehat{S} &= g(t, q, S, a).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

При $a = 0$ преобразование в (19) — тождественное преобразование:

$$
\begin{aligned}
\widehat{t} &= f_0(t, q, S, 0) = t,\\
\widehat{q}_i &= f_i(t, q, S, 0) = q_i, \qquad i = \overline{1, n},\\
\widehat{S} &= g(t, q, S, 0) = S.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Семейство (19) при условии (20) — решение системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений[1]

$$\begin{aligned} &\frac{d\widehat{t}}{da} = \xi(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S}), \qquad \widehat{t}(0) = t,\\ &\frac{d\widehat{q}_i}{da} = \eta_i(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S}), \qquad \widehat{q}_i(0) = q_i, \quad i = \overline{1,n},\\ &\frac{d\widehat{S}}{da} = \mu(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S}), \qquad \widehat{S}(0) = S. \end{aligned} \tag{21}$$

Правые части $\xi(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S})$, $\eta_i(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S})$ и $\mu(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S})$) в (21) вычисляются по уравнениям (19):

$$\begin{aligned} &\xi(t,q,S) = \left.\frac{\partial f_0(t,q,S,a)}{\partial a}\right|_{a=0},\\ &\eta_i(t,q,S) = \left.\frac{\partial f_i(t,q,S,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad i = \overline{1,n},\\ &\mu(t,q,S) = \left.\frac{\partial g(t,q,S,a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \end{aligned} \tag{22}$$

Продолжим каждое преобразование группы (19) на переменные r_0, r_i (см. (14)). Получим преобразование

$$\begin{aligned} &\widehat{r_0} = h_0(t,q,S,R,a),\\ &\widehat{r_i} = h_i(t,q,S,R,a), \qquad i = \overline{1,\,n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Соотношения (19), (23) задают однопараметрическую продолженную группу преобразований пространства переменных t, q, S, R [Овсянников 78]. Уравнениям (19), (23) группы ставится в соответствие автономная система дифференциальных уравнений, состоящая из (21) и системы

$$\frac{d\widehat{r_i}}{da} = \zeta_i(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S},\widehat{R}), \qquad \widehat{r_i}(0) = r_i, \quad i = \overline{0,n}. \tag{24}$$

Правые части $\zeta_i(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S},\widehat{R})$ вычисляются по правым частям равенств (23):

$$\begin{aligned} &\zeta_0(t,q,S,R) = \left.\frac{\partial h_0(t,q,S,R,a)}{\partial a}\right|_{a=0},\\ &\zeta_j(t,q,S,R) = \left.\frac{\partial h_j(t,q,S,R,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{25}$$

Для выражения функций ζ через функции ξ, η_i и μ подставим уравнения группы (19) в соотношения (8), (9). Применим к полученным равенствам оператор $\left.\frac{\partial}{\partial a}\right|_{a=0}$, с учетом (20), (21), (24) получим

$$\begin{aligned} &\zeta_0 = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial S}r_0 - \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial S}r_0\right)r_0 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial t} + \frac{\partial\eta_k}{\partial S}r_0\right)r_k,\\ &\zeta_j = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial S}r_j - \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\xi}{\partial S}r_j\right)r_0 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial q_j} + \frac{\partial\eta_k}{\partial S}r_j\right)r_k,\\ &j = \overline{1,\,n}. \end{aligned} \tag{26}$$

[1] Предполагается, что параметр a в (19) — канонический параметр первого рода [Овсянников, 78].

Каждое преобразование группы (19) переводит уравнение Гамильтона–Якоби (1) в уравнение (16) в новых переменных. При $a = 0$ преобразование является тождественным (см. (20)), уравнение (16) совпадает с (3) и разрешимо относительно переменной r_0: $r_0 = -H(t, q, r)$, откуда следует, что существует окрестность $a = 0$, в которой уравнение (16) разрешимо относительно r_0 и приводится к виду (17).

Определение 2. Группа (19) называется *группой симметрий — допускаемой группой —* уравнения Гамильтона–Якоби (1), если каждое ее преобразование является для уравнения (1) преобразованием симметрии в смысле определения 1.

В случае групповой симметрии возможно другое эквивалентное определение.

Определение 3. Группа (19) называется *группой симметрий — допускаемой группой —* уравнения Гамильтона–Якоби (1), если каждое ее преобразование любое решение $S(t, q)$ уравнения (1) переводит в его же решение $\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q})$.

Теорема 1. *Определения* 2 *и* 3 *эквивалентны:*

$$\{\text{Определение 2}\} \Leftrightarrow \{\text{Определение 3}\}.$$

Доказательство. Включение $\Rightarrow$ очевидно: решение $S(t, q)$ уравнения (1) каждое преобразование (19) переводит в функцию $\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q})$, которая по определению 2 удовлетворяет уравнению (18), совпадающему с (1) с точностью до обозначений. Включение $\Leftarrow$ утверждает, что результат $\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q})$ преобразования решения $S(t, q)$ уравнения (1) удовлетворяет уравнению (18), откуда не следует, что результат (17) преобразования уравнения (1) совпадет с (18). Рассмотрим полный интеграл $S(t, q, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, уравнения (1). Преобразование (4) переведет $S(t, q, \beta)$ в n-параметрическое семейство решений $\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q}, \beta)$ уравнения (18). Требование

$$\det \left\| \frac{\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q}, \beta)}{\partial \widehat{q}_i \partial \beta_k} \right\| \neq 0,$$

предъявляемое к полному интегралу, при $a = 0$ выполняется (см. (20), поэтому оно выполняется и в некоторой окрестности $a = 0$. Таким образом, $\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q}, \beta)$ — полный интеграл, и по нему однозначно восстанавливается уравнение Гамильтона–Якоби (18) [Гантмахер, 2001; Яковенко, 2004]. ■

4. Критерий симметрии

Пусть группа (19) допускается уравнением Гамильтона–Якоби (1). По определению 2 это означает, что при любом значении параметра a справедливо уравнение (18) или с использованием обозначений (6) — уравнение (предполагается замена входящих переменных уравнениями группы (19), (23))

$$\widehat{r}_0 + H\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{r}\right) \overset{a}{\equiv} 0. \tag{27}$$

Дифференцирование (27) по a с учетом уравнений (21) и (24) приводит к соотношению

$$\begin{gathered} \zeta_0(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{R}) + \xi(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}) \frac{\partial H\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{r}\right)}{\partial \widehat{t}} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}) \frac{\partial H\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{r}\right)}{\partial \widehat{q}_j} + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{S}, \widehat{R}) \frac{\partial H\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \widehat{r}\right)}{\partial \widehat{r}_j} = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Для приведения связи (28) между группой симметрий и функцией Гамильтона H к работоспособному виду проделаем следующие шаги.

1. Переобозначим в (26) переменные t, q, S, R в переменные $\widehat{t}$, $\widehat{q}$, $\widehat{S}$, $\widehat{R}$:

$$\begin{aligned}
&\zeta_0(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S},\widehat{R}) = \\
&= \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{t}} + \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_0 - \left(\frac{\partial\xi}{\partial\widehat{t}} + \frac{\partial\xi}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_0\right)\widehat{r}_0 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{t}} + \frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_0\right)\widehat{r}_k, \\
&\zeta_j(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S},\widehat{R}) = \\
&= \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j - \left(\frac{\partial\xi}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\xi}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j\right)\widehat{r}_0 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j\right)\widehat{r}_k, \\
&j = \overline{1,\, n}.
\end{aligned} \tag{29}$$

2. Подставим $\widehat{r}_0 = -H\left(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{r}\right)$ из (27) в (29):

$$\begin{aligned}
&\zeta_0(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S},\widehat{R}) = \\
&= \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{t}} - \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{S}}H + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\widehat{t}} - \frac{\partial\xi}{\partial\widehat{S}}H\right)H - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{t}} - \frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{S}}H\right)\widehat{r}_k, \\
&\zeta_j(\widehat{t},\widehat{q},\widehat{S},\widehat{R}) = \\
&= \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\xi}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j\right)H - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j\right)\widehat{r}_k, \\
&j = \overline{1,\, n}.
\end{aligned} \tag{30}$$

3. Подставим ζ_0 и ζ_j из (30) в (28):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\mu}{\partial\widehat{t}} - \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{S}}H + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\widehat{t}} - \frac{\partial\xi}{\partial\widehat{S}}H\right)H - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{t}} - \frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{S}}H\right)\widehat{r}_k + \\
+\xi\frac{\partial H}{\partial\widehat{t}} + \sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial H}{\partial\widehat{q}_j} + \\
+\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial\mu}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\mu}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\xi}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j\right)H - \right. \\
\left. -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{q}_j} + \frac{\partial\eta_k}{\partial\widehat{S}}\widehat{r}_j\right)\widehat{r}_k\right\}\frac{\partial H}{\partial\widehat{r}_j} = 0.
\end{gathered} \tag{31}$$

Функции ξ, η, μ зависят от переменных $\widehat{t}$, $\widehat{q}$, $\widehat{S}$, функция H — от переменных $\widehat{t}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r}$. Равенство (31) выполняется тождественно по независимым переменным $\widehat{t}$, $\widehat{q}$, $\widehat{S}$, $\widehat{r}_1, \ldots, \widehat{r}_n$, поэтому его эквивалентно можно записать в других независимых переменных t, q, S, $p_1, \ldots, p_n$.

4. В (31) «снимаем шляпы» с переменных $\widehat{t}$, $\widehat{q}$, $\widehat{S}$, переменные $\widehat{r}_1, \ldots, \widehat{r}_n$ заменяем на $p_1, \ldots, p_n$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\mu}{\partial t} - \frac{\partial\mu}{\partial S}H + \left(\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial\xi}{\partial S}H\right)H - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial t} - \frac{\partial\eta_k}{\partial S}H\right)p_k + \\
+\xi\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial H}{\partial q_j} +
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial\mu}{\partial q_j}+\frac{\partial\mu}{\partial S}p_j+\left(\frac{\partial\xi}{\partial q_j}+\frac{\partial\xi}{\partial S}p_j\right)H-\right.\\
&\left.\quad-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial q_j}+\frac{\partial\eta_k}{\partial S}p_j\right)p_k\right\}\frac{\partial H}{\partial p_j}=0.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

В (32) функции ξ, η, μ зависят от переменных t, q, S, функция H — от переменных t, q, p. Проведенные построения дают возможность считать доказанным следующий результат.

Теорема 2. *Группа* (19) *является группой симметрий уравнения Гамильтона–Якоби* (1) *тогда и только тогда, когда правые части* $\xi(t, q, S)$*,* $\eta(t, q, S)$*,* $\mu(t, q, S)$ *системы* (21)*, порождающей группу, и функция Гамильтона* $H(t, q, p)$*, на основе которой построено уравнение* (1)*, удовлетворяют соотношению* (32).

5. Примеры вычисления симметрий

Пример 1. Функции Гамильтона

$$H=\dot\varphi(t) \tag{33}$$

соответствует уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\dot\varphi(t)=0. \tag{34}$$

Подстановка (33) в (32) определяет уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mu}{\partial t}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)\dot\varphi(t)-\frac{\partial\xi}{\partial S}\dot\varphi^2(t)-\\
&-\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial S}\dot\varphi(t)\right)p+\xi\ddot\varphi(t)=0.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Коэффициенты при p^n, $n=0,1$, не зависят от p, поэтому должны равняться нулю (расщепление по p), что приводит к уравнениям

$$p^0:\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial S}\dot\varphi(t)=0, \tag{36}$$

$$p^1:\quad \frac{\partial\mu}{\partial t}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial\mu}{\partial S}\right)\dot\varphi(t)-\frac{\partial\xi}{\partial S}\dot\varphi^2(t)+\xi\ddot\varphi(t)=0. \tag{37}$$

Общим решением уравнения (36) является функция

$$\eta(S+\varphi(t), q). \tag{38}$$

Уравнение (37) эквивалентно записывается следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu+\dot\varphi(t)\xi)-\dot\varphi(t)\frac{\partial}{\partial S}(\mu+\dot\varphi(t)\xi)=0. \tag{39}$$

Уравнение (39) имеет аналогично уравнению (36) общее решение

$$\mu+\dot\varphi(t)\xi=\nu(S+\varphi(t), q). \tag{40}$$

Сформулируем окончательный результат. Уравнение Гамильтона–Якоби (36) допускает группу симметрий (19), которая определяется правыми частями системы (21):

$$\begin{gathered}\xi(t,\,q,\,S), \quad \eta(S+\varphi(t),\,q),\\ \mu(t,\,q,\,S)=\nu(S+\varphi(t),\,q)-\dot\varphi(t)\xi(t,\,q,\,S),\end{gathered} \tag{41}$$

где $\xi(t,\,q,\,S)$, $\eta(x,\,q)$ и $\nu(x,\,q)$ произвольные функции своих аргументов.

Пример 2. Функции Гамильтона

$$H=p \tag{42}$$

соответствует уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial q}=0. \tag{43}$$

Подстановка (42) в (32) после естественных упрощений определяет уравнение

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\mu}{\partial q}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial q}-\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)p=0. \tag{44}$$

Расщепление по p приводит к уравнениям

$$p^0: \quad \frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\mu}{\partial q}=0, \tag{45}$$

$$p^1: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial q}-\frac{\partial\eta}{\partial q}=0. \tag{46}$$

Общим решением уравнения (45) является функция

$$\mu(q-t,\,S). \tag{47}$$

Уравнение (46) эквивалентно записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi-\eta)+\frac{\partial}{\partial q}(\xi-\eta)=0. \tag{48}$$

Уравнение (48) имеет аналогично уравнению (45) общее решение

$$\eta-\xi=\nu(q-t,\,S). \tag{49}$$

Сформулируем окончательный результат. Уравнение Гамильтона–Якоби (43) допускает группу симметрий (19), которая определяется правыми частями системы (21):

$$\xi(t,\,q,\,S), \quad \eta=\xi(t,\,q,\,S)+\nu(q-t,\,S), \quad \mu(q-t,\,S), \tag{50}$$

где $\xi(t,\,q,\,S)$, $\nu(x,\,q)$ и $\mu(x,\,S)$ — произвольные функции своих аргументов.

Пример 3. Функции Гамильтона

$$H=\frac{1}{2}p^2 \tag{51}$$

соответствует уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 0. \tag{52}$$

Подстановка (51) в (32) после естественных упрощений определяет уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mu}{\partial t} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \mu}{\partial q}\right)p + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial q} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)p^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial q} - \frac{\partial \eta}{\partial S}\right)p^3 + \frac{1}{4}\frac{\partial \xi}{\partial S}p^4 = 0.\end{gathered} \tag{53}$$

Расщепление по p приводит к пяти уравнениям, результатом исследования которых является общее решение (вычисления аналогичны приведённым выше):

$$\begin{gathered}\xi = 2b_1 t + b_4 q + 2a_3 t^2 + a_2 q^2 + 2a_1 tq + c_1, \\ \eta = (b_1 + b_2)q + b_3 t + b_4 S + 2a_1 tS + 2a_3 tq + 2a_2 Sq + a_1 q^2 + c_2, \\ \mu = 2b_2 S + b_3 q + 2a_1 Sq + a_3 q^2 + 2a_2 S^2 + c_3,\end{gathered} \tag{54}$$

a_i, b_j, c_k — произвольные постоянные.

6. Использование симметрий для нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби

В соответствии с определением 3 группа симметрий (19), во-первых, переводит решения уравнения (1) в его же решения, во-вторых, добавляет в решение произвольную постоянную — параметр группы. Предлагается следующая схема построения полного интеграла. Изначально нужно знать частное решение уравнения (1) и его группу симметрий. Взаимодействие приводит к однопараметрическому семейству решений. Каждая новая группа симметрий добавляет параметр в семейство решений, что в конце концов может привести к полному интегралу.

Пример 4. Уравнение (34) имеет очевидное частное решение

$$S_0 = q - \varphi(t). \tag{55}$$

Рассмотрим группу симметрий, которой в (41) соответствуют

$$\xi = \varphi(t)/\dot{\varphi}(t), \qquad \eta \equiv 0, \qquad \nu = S + \varphi(t), \qquad \mu = S. \tag{56}$$

Решение системы (21) приводит к уравнениям группы

$$\varphi(\widehat{t}) = e^a \varphi(t), \qquad \widehat{q} = q, \qquad \widehat{S} = e^a S. \tag{57}$$

Подстановка частного решения (55) в $\widehat{S} = e^a S$ и переход к новым переменным приводят к полному интегралу:

$$\widehat{S} = e^a S_0 = e^a(q - \varphi(t)) = e^a q - e^a \varphi(t) = e^a \widehat{q} - \varphi(\widehat{t}). \tag{58}$$

Другой выбор в (41) правых частей системы (21),

$$\xi \equiv 0, \qquad \eta \equiv 0, \qquad \mu = \nu = S + \varphi(t), \tag{59}$$

приводит к уравнениям группы

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{q} = q, \qquad \widehat{S} = e^a S + \varphi(t)(e^a - 1) \tag{60}$$

и к такому же, как при первом выборе, полному интегралу (58).

Пример 5. Уравнение (43) имеет очевидное частное решение

$$S_0 = q - t. \tag{61}$$

Рассмотрим группу симметрий, которой в (50) соответствуют

$$\xi = t, \qquad \nu = q - t, \quad \eta = q, \qquad \mu = 0. \tag{62}$$

Решение системы (21) приводит к уравнениям группы

$$\widehat{t} = e^a t, \qquad \widehat{q} = e^a q, \qquad \widehat{S} = S. \tag{63}$$

Подстановка частного решения (61) в $\widehat{S} = S$ и переход к новым переменным приводят к полному интегралу:

$$\widehat{S} = S_0 = q - t = e^{-a}(\widehat{q} - \widehat{t}). \tag{64}$$

Другой выбор в (50) правых частей системы (21),

$$\xi \equiv 0, \qquad \eta \equiv 0, \qquad \mu = q - t, \tag{65}$$

приводит к уравнениям группы

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{q} = q, \qquad \widehat{S} = S + a(q - t) \tag{66}$$

и к полному интегралу $\widehat{S} = S_0 + a(q - t) = (a + 1)(\widehat{q} - \widehat{t})$.

Пример 6. Уравнение (52) имеет очевидное частное решение

$$S_0 = 2(q - t). \tag{67}$$

Рассмотрим группу симметрий, которой в (54) соответствует постоянная $b_1 = 1$, остальные постоянные равны нулю:

$$\xi = 2t, \quad \eta = q, \quad \mu = 0. \tag{68}$$

Решение системы (21) приводит к уравнениям группы

$$\widehat{t} = e^{2a} t, \qquad \widehat{q} = e^a q, \qquad \widehat{S} = S. \tag{69}$$

Подстановка частного решения (67) в $\widehat{S} = S$ и переход к новым переменным приводит к полному интегралу:

$$\widehat{S} = S_0 = 2(q - t) = 2\left(e^{-a}\widehat{q} - e^{-2a}\widehat{t}\right). \tag{70}$$

Пример 7. Функции Гамильтона

$$H = bp^m + cq^n \tag{71}$$

($b > 0$, $c > 0$, n, m — натуральные числа) соответствует уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + b\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^m + cq^n = 0. \tag{72}$$

Подстановкой нетрудно убедиться в том, что функция

$$S_0 = -ct + \kappa \int (1 - q^n)^{\frac{1}{m}}\, dq \tag{73}$$

при

$$\kappa = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{74}$$

является решением уравнения (72).

Поиск симметрий уравнения (72) ограничим группами растяжений

$$\widehat{t} = e^{\alpha a} t, \qquad \widehat{q} = e^{\beta a} q, \qquad \widehat{S} = e^{\gamma a} S. \tag{75}$$

Переход в (72) к новым переменным приводит к уравнению

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{t}} e^{-(\gamma-\alpha)a} + b\left(\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{q}}\right)^m e^{-m(\gamma-\beta)a} + c\widehat{q}^n e^{-n\beta a} = 0$$

или

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{t}} + b\left(\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{q}}\right)^m e^{[(1-m)\gamma + m\beta - \alpha]a} + c\widehat{q}^n e^{[-n\beta + \gamma - \alpha]a} = 0. \tag{76}$$

По определению 1 симметрии уравнение (76) должно иметь вид (см. (18))

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{t}} + b\left(\frac{\partial \widehat{S}}{\partial \widehat{q}}\right)^m + c\widehat{q}^n = 0, \tag{77}$$

что приводит к следующим требованиям, предъявляемым к коэффициентам:

$$(1-m)\gamma + m\beta - \alpha = 0, \qquad -n\beta + \gamma - \alpha = 0,$$

из которых следует, что нетривиальная группа симметрий (75) существует при условиях

$$\alpha = \frac{m + n - mn}{m}\beta, \qquad \beta \neq 0, \qquad \gamma = \frac{m+n}{m}\beta. \tag{78}$$

Подстановка частного решения (73) в $\widehat{S} = e^{\gamma a} S$ и переход к новым переменным приводят с учетом (78) к полному интегралу:

$$\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q}, a) = e^{\gamma a} S_0 = -ce^{n\beta a}\widehat{t} + \kappa \int \left(e^{n\beta a} - \widehat{q}^n\right)^{\frac{1}{m}} d\widehat{q}. \tag{79}$$

Вводя для «благозвучия» иначе произвольную постоянную

$$\lambda_1 = e^{n\beta a}, \tag{80}$$

получим окончательный вид полного интеграла уравнения (77):

$$\widehat{S}(\widehat{t}, \widehat{q}, \lambda_1) = -c\lambda_1 \widehat{t} + \kappa \int (\lambda_1 - \widehat{q}^n)^{\frac{1}{m}}\, d\widehat{q}. \tag{81}$$

«Снятие шляп» в (81) определяет полный интеграл

$$S(t, q, \lambda_1) = -c\lambda_1 t + \kappa \int (\lambda_1 - q^n)^{\frac{1}{m}}\, dq \tag{82}$$

исходного уравнения (72). По полному интегралу ($\partial S/\partial \lambda_1 = \lambda_2$) вычисляется соотношение

$$-ct + \frac{\kappa}{m} \int (\lambda_1 - q^n)^{\frac{1-m}{m}}\, dq = \lambda_2, \tag{83}$$

неявно задающее движение $q(t, \lambda_1, \lambda_2)$ системы при любых начальных условиях.

Рассмотрим два частных случая функции Гамильтона (71).

1. Однородное поле тяжести Земли (M — масса точки):

$$b = \frac{1}{2M}, \quad m = 2, \quad c = Mg, \quad n = 1, \quad \kappa = M\sqrt{2g}.$$

Уравнение (83) принимает вид

$$-Mgt + \frac{M\sqrt{2g}}{2} \int (\lambda_1 - q)^{-\frac{1}{2}}\, dq = \lambda_2.$$

После интегрирования и разрешения относительно q получаем результат (λ_1, λ_2 — произвольные постоянные):

$$q = \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{2M^2 g} - \frac{\lambda_2}{M} t - \frac{g}{2} t^2.$$

2. Одномерный линейный осциллятор (M — масса точки, k — жесткость пружины):

$$b = \frac{1}{2M}, \quad m = 2, \quad c = \frac{k}{2}, \quad n = 2, \quad \kappa = \sqrt{kM}.$$

Уравнение (83) принимает вид

$$-\frac{1}{2}kt + \frac{\sqrt{kM}}{2} \int \left(\lambda_1 - q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\, dq = \lambda_2.$$

После интегрирования и разрешения относительно q получаем результат (λ_1, λ_2 — произвольные постоянные):

$$q = \sqrt{\lambda_1} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \frac{\lambda_2}{\sqrt{kM}}\right).$$

Список литературы

Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 392 с.

Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. — 3-изд. — М.: Высшая школа, 2003. — 447 с.

Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике: учебное пособие для вузов. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 264 с.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400с.

Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1970. — 448 с.

Яковенко Г. Н. Краткий курс аналитической динамики. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 238 с.

Яковенко Г. Н. Симметрии уравнений Гамильтона и Лагранжа. — М.: Изд. МЗ-пресс, 2006. — 120 с.

Ярошевский В. А. Лекции по теоретической механике. — М.: МФТИ, 2001. — 244 с.