**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 2 С. 241−251**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.1,514.8

Равномерные вложения графа в метрические пространства

А. В. Коганов

Научно-исследовательский институт системных исследований (НИИСИ РАН),
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский п., 36, к. 1

E-mail: koganow@niisi.msk.ru

Получено 28 февраля 2012 г.

Рассмотрена задача вложения бесконечного счетного графа в непрерывное метрическое пространство. Введено понятие равномерного вложения, при котором не возникает точек накопления на множестве образов вершин и образы ребер имеют ограниченную длину. Найдены необходимые и достаточные условия в терминах структуры графа для возможности равномерного вложения в пространства с метриками Эвклида и Лоренца. Доказано, что деревья с конечным ветвлением имеют равномерное вложение в пространство с метрикой модуля метрики Минковского.

Ключевые слова: метрическое пространство, бесконечный граф, факторграф, метрика Минковского, метрика Лоренца, метрика Эвклида

Uniform graph embedding into metric spaces

A. V. Koganov

*Science research institute of System analyze of Russian Academy of Sciences (SRISA RAS),
Nakhimovsky st. 36, build 1, Moscow, Russia*

Abstract. – The task of embedding an infinity countable graph into continuous metric space is considered. The concept of uniform embedding having no accumulation point in a set of vertex images and having all graph edge images of a limited length is introduced. Necessary and sufficient conditions for possibility of uniform embedding into spaces with Euclid and Lorenz metrics are stated in terms of graph structure. It is proved that tree graphs with finite branching have uniform embedding into space with absolute Minkowski metric.

Keywords: metric space, infinite graph, factor graph, Minkowski metric, Lorenz metric, Euclid metric

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 241–251 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00041а),
и Российского гуманитарного научного фонда (проект 11-03-00035а).

Введение

Задача вложения бесконечного графа (счетное число вершин и ребер) в континуальное метрическое пространство возникает в математической физике, биологии, экологии и макроэкономике, когда для рассмотрения объекта изучения в крупном масштабе требуется переход от дискретных описаний микроуровня к макроскопическим моделям непрерывных сред. Примерами таких построений в теоретической и математической физике могут служить работы, представленные в списке литературы [Beem, Ehrlich, 1981; Bombelli, Henson, 2006; d'Ariano, Tosini, 2011; Albert, Frieze, 1989; Brightwell, Georgiou, 2010]. Общая проблема связана с трудностью установления соответствия между топологией и метрикой графа с одной стороны и модели пространства-времени Минковского – с другой. В данной работе исследуется один из аспектов этой проблемы: когда граф может быть вложен в непрерывное метрическое линейное пространство без бесконечной плотности точек вершин и без неограниченного растяжения длин ребер. Такие вложения названы равномерными. Исследование проводится для метрики Эвклида и двух действительных метрик, порожденных метрикой Минковского. Это метрика Лоренца, принимающая действительные и бесконечные значения, и всюду действительная метрика модуля псевдоевклидовой метрики.

Доказывается, что граф имеет равномерное вложение в евклидово пространство тогда и только тогда, когда у него имеется факторграф определенной структуры, допускающий изоморфное вложение в некоторую однородную сеть.

Для равномерного вложения в метрику Лоренца необходимо и достаточно, чтобы граф не имел циклов и его можно было разложить на ярусы, причем длины различных путей по ребрам между любыми связанными точками имели ограниченное отношение.

Для вложения в метрику модуля псевдоевклидовой метрики в данной работе не найдено необходимых и достаточных условий, но установлено, что любой граф дерево с конечным ветвлением (возможно, неограниченным) имеет такое равномерное вложение любой размерности.

Понятие равномерного метрического вложения графа формулируется для произвольного действительного метрического пространства. Но для евклидовых пространств использована особая терминология, поскольку именно евклидова метрика является базовой для определения понятия размерности в терминах меры и топологии. Эта терминология является частным случаем общего определения равномерного метрического вложения.

Вложение в эвклидову метрику

Определение 1. Бесконечный граф имеет *равномерную метрическую размерность* n, $n<\infty$, если его вершины можно инъективно вложить в евклидово пространство данной размерности со следующими ограничениями.

1a. Расстояние между любыми двумя вершинами не меньше некоторого значения $\varepsilon>0$.

2a. Длина любого ребра не превышает некоторое значение a, $0<a<\infty$.

3a. Такого вложения не существует для меньших размерностей. Обозначение $n=\operatorname{metr}\dim(G,A)$. □

Замечание 1. Графы с конечной равномерной метрической размерностью имеют равномерное ограничение на ранг вершин. Это следует из того, что после вложения в евклидово пространство в каждом шаре содержится только конечное число вершин, а длины ребер равномерно ограничены. Поэтому число ребер, смежных с одной вершиной, не выше числа образов вершин в шаре с радиусом, равным ограничению на длину ребер. Графы с неограниченным рангом вершин не имеют равномерной метрической размерности.

Определение 2. Обозначим $U(g,r)$ r-окрестность вершины $g\in G$ без учета ориентации, $r\in\mathbb{N}$. Величину

$$\operatorname{top}\dim(G,A)=\sup\nolimits_{g\in G}\left\{\lim\nolimits_{r\to\infty}\frac{\log(\#U(g,r))}{\log(r)}\right\}$$

назовем топологической размерностью графа. □

Это частный случай размерности Хаусдорфа для случая степенного роста меры окрестности от радиуса. Если $n = \operatorname{top}\dim(G, A)$, и $\mathrm{u}(\mathrm{g}, \mathrm{r}) = \#\mathrm{U}(\mathrm{g}, \mathrm{r})$, то

$$u(g,r) = b(r)r^n; \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\log(b(r))}{\log(r)} = 0.$$

Утверждение 1. $\operatorname{top}\dim(G, A) \le \operatorname{metr}\dim(G, A)$, и имеются примеры строгого неравенства.

Доказательство. Если для графа определена равномерная метрическая размерность, то для любой вершины $U(g,r) \subset B(x(g), ar)$, где $x(g)$ – образ вершины $g \in G$ при вложении в $\mathbb{R}^n$, а $B(x,R)$ – шар с центром в x и радиусом R в этом евклидовом пространстве. Число образов вершин в этом шаре не превосходит значения $(2ra/\varepsilon)^n$. Поэтому $u(g,r) \le (2a/\varepsilon)^n r^n$, и по формуле (8.2) $\operatorname{top}\dim(G, A) \le n.$

Пример строгого неравенства (рис. 1).

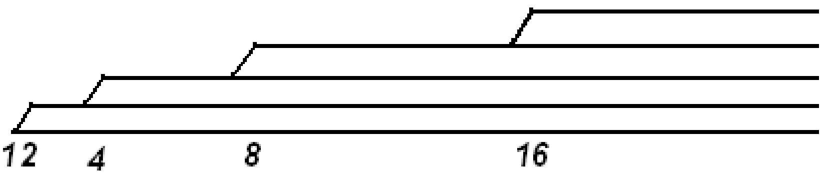

Рис. 1. Граф дерево с неограниченным ветвлением и топологической размерностью 1 (начальный участок). Горизонтальные линии изображают цепочки вершин. Отмечены номера окрестностей корня, где происходит ветвление

Вершины графа определим как подмножество двухмерной целочисленной решетки $G \subset \mathbb{Z}^2$. Оно состоит из дискретных полупрямых

$$L_0 = \{(0,i) \mid i = 1,\ldots\};$$
$$L_1 = \{(1,i) \mid i = 2,3,\ldots\}; \ \ldots$$
$$L_m = \{(m,i) \mid i = 2^m, 2^m + 1, \ldots\}, \quad m = 0,1,\ldots;$$
$$G = L_0 \cup L_1 \cup \ldots. \tag{8.4}$$

Множество ребер:

$$\begin{aligned} A = &\Big\{((m,i),(m,i+1)) \mid m \in 0,1,\ldots; i \ge 2^m; i \in \mathbb{N}\Big\} \cup \\ &\cup \Big\{((m, 2^m - 1),(m+1, 2^m)) \mid m = 1,\ldots\Big\}; \end{aligned} \tag{8.5}$$

Наиболее быстро в этом графе растут окрестности точки $x = (0,1)$. Ребра из второго подмножества правой части (8.5) задают ветвление графа на линейные компоненты, определенные первым подмножеством той же формулы. Для r-окрестности указанной точки длины всех линейных участков не больше r, а число линейных компонент равно $\lfloor \log(r) \rfloor$. Поэтому можно записать оценку $u(x,r) \le r\lfloor \log(r) \rfloor$. Тогда

$$\operatorname{top}\operatorname{dir}(G, A) = \operatorname{Lim}_{r\to\infty} \left(1 + \frac{\log\log(r)}{\log(r)}\right) = 1.$$

Но при равномерном метрическом вложении графа с неограниченным ветвлением в евклидову прямую возникают ребра сколь угодно большой длины. При построении графа было реализовано равномерное метрическое вложение в плоскость. Поэтому $\operatorname{metr}\dim(G, A) = 2.$ □

Определение 3. Назовем n-сетью граф вида $\mathrm{Net}(n) = (\mathbb{Z}^n, A[n])$, где $A[n] = \left\{(z, z + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) \mid z \in \mathbb{Z}^n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1; 0; 1\}\right\}$. □

В этом графе каждая точка целочисленной n-мерной решетки связана со всеми точками на поверхности куба со стороной 2 с центром в этой точке (пример на рисунке 2). Всего $3^n - 1$ ребер у каждой точки. Это описание определяет равномерное метрическое вложение графа в n-мерное пространство.

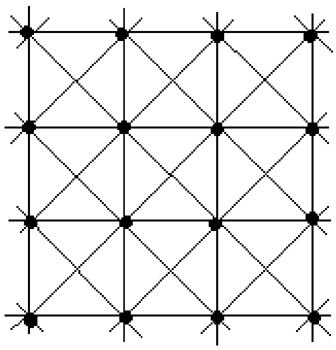

Рис. 2. Фрагмент 2-сети

Определение 4. *Факторграфом* $(G, A) / \theta = (\theta, A / \theta)$ графа (G, A) по разбиению θ на множестве G его вершин называется граф, вершины которого суть элементы разбиения, и два элемента разбиения $v, w \in \theta$ связаны ребром $(v, w) \in A / \theta$ в факторграфе, если имеются две вершины $g \in v$ и $q \in w$, и эти вершины связаны ребром $(g, q) \in A$ в исходном графе. Факторграф – *равномерный*, если число вершин исходного графа во всех элементах разбиения равномерно ограничено сверху конечным числом. □

Теорема 1. Счетный граф имеет метрическую размерность n, если и только если на нем можно построить равномерный факторграф, который изоморфно вкладывается в $\mathrm{Net}(n)$, и это наименьшее такое n. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **Необходимость.** Если (G, A) метрически n-мерный, то рассмотрим его соответствующее вложение в $\mathbb{R}^n$ (определение 8.1). Построим произвольное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на кубы со стороной $2a$, образующее прямоугольную сеть. Рассмотрим разбиение на вершинах графа, объединив в одном элементе вершины, расположенные в одном кубе. В каждом элементе содержится не более чем $\beta(2a / \varepsilon)^n$ вершин (где β – величина, обратная объему единичного шара). Поскольку длины всех ребер не превосходят значения a, то в факторграфе ребра соединяют только соседние кубы. Это означает, что факторграф равномерный и вложен в $\mathrm{Net}(n)$. **Достаточность.** Пусть у (G, A) имеется равномерный факторграф, который изоморфно вложен в $\mathrm{Net}(n)$. Вложим инъективно вершины $\mathrm{Net}(n)$ в целочисленную решетку на $\mathbb{R}^n$. Каждой целочисленной точке сопоставим куб со стороной 1 (клетку), в котором она вершина с наименьшим значением всех координат. Пусть в каждом факторклассе (элементе разбиения) не более чем K вершин из (G, A). Построим в каждом координатном единичном кубе координатную сеть с расстоянием между ближайшими точками $\varepsilon = 1 / K$. Отобразим вершины из факторкласса, который соответствует произвольной вершине $\mathrm{Net}(n)$, в клетку, которая сопоставлена этой вершине. Причем образы вершин расположим по точкам сети в этой клетке (их заведомо больше, чем K). Тогда расстояния между образами вершин не меньше, чем ε. А длины ребер не превосходят наибольшего расстояния между вершинами соседних единичных кубов. Поэтому $a < 2\sqrt{n}$. Построено равномерное метрическое вложение (G, A) в $\mathbb{R}^n$. □

Вложения в пространство Минковского

Определение 5. Граф равномерно вложен в метрическое пространство, если его вершины инъективно отображены в это пространство и для их образов выполнены условия 1а и 2а из определения 1. □

В частности, если граф имеет равномерную метрическую размерность n, то он может быть равномерно вложен в эвклидово пространство любой не меньшей размерности, но не имеет такого вложения в меньшую размерность.

Определение 6. Граф ярусный, если в нем нет ориентированных циклов. Ярусный граф имеет ранг K, если в нем произвольные два пути по ребрам, соединяющим две вершины, отличаются по длине (число вершин) не более чем в K раз (минимальная оценка). □

Определение 7. Метрикой Лоренца называется модификация метрики Минковского [1], которая определена через нее формулой

$$\|x\|_L = \begin{cases} \|x\|_M, & x \in C_-; \\ \infty, & x \notin C_-, \end{cases}$$

где $\|x\|_M$ – норма Минковского, C_- – конус прошлого точки 0. Расстояние между точками определяется формулой

$$d_L(x,y) = \|x-y\|_L.$$

Заметим, что эта метрика не коммутативная: если $\|x\|_L < \infty,$ то $\|-x\|_L = \infty.$ Условие конечной нормы Лоренца для вектора означает, что в псевдоевклидовом пространстве вектор имеет неположительную координату времени и положительную норму Минковского. В теории относительности это соответствует возможности передачи сигнала из данной точки в начало отсчета.

Теорема 2. Граф имеет равномерное вложение в псевдоевклидово пространство размерности выше 1 с метрикой Лоренца, если и только если граф ярусный конечного ранга. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **Достаточность.** Рассмотрим плоскость в координатах $\langle t,x \rangle$ с метрикой Минковского $ds^2 = dt^2 - dx^2.$ На ней определена и соответствующая метрика Лоренца. На рисунке 3 показано предварительное построение на плоскости. Прямые $AA',$ $BB',$ $EE',$ FF' параллельны попарно и оси $\langle t \rangle$. Полоса между прямыми $EE',$ FF' лежит внутри полосы между прямыми $AA',$ BB' и расположена симметрично относительно средней линии. Полоса между прямыми $AA',$ BB' разбита на равные прямоугольники (далее – ячейки) ортогональными к этим прямым отрезками. Отрезки $AB,$ $A'B'$ и соответственные элементы других ячеек параллельны друг другу и ортогональны прямой AA'. Они параллельны оси $\langle x \rangle$. Треугольник ABG и соответствующие треугольники других ячеек – равнобедренные, прямоугольные в вершине G. Отрезки AE и BF (и соответствующие отрезки других ячеек) имеют длину ε. Требуем, чтобы отрезок AA' был короче отрезка AB и длиннее его половины. Тогда отрезок EF лежит строго между прямыми $EE',$ FF' и точка G лежит между отрезками AB и $A'B'$. Эту конструкцию назовем «остов вложения».

Лемма 1. В любой ячейке остова вложения отрезок $E'F'$ лежит вне ε-окрестности по Лоренцу для отрезка EF.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Для любых точек $P \in EF$ и $Q \in E'F'$ выполняется неравенство $\|P-Q\|_L > (AA')^2 - (EF)^2$. Обозначим $\|EF\|_E = 2\alpha,$ где $\|.\|_E$ – эвклидова норма (длина). Тогда по построению $\|AB\|_E = 2\alpha + 2\varepsilon + 2\beta$ для некоторого значения $\beta > 0$. В этих обозначениях $\|AA'\|_E = 2\alpha + \varepsilon + \beta.$ Получаем

$$\|P-Q\|_L > (2\alpha + \beta + \varepsilon)^2 - (2\alpha)^2 = \varepsilon^2 + \beta^2 + \beta(2+4\alpha) + 4\alpha > \varepsilon^2.$$

Лемма доказана.

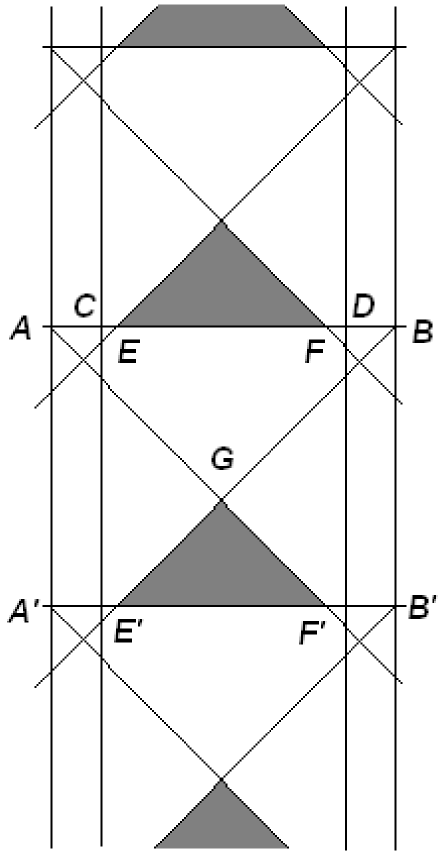

Рис 3. Предварительная конструкция «остов вложения»

Каждому пути γ сопоставляем число $L(Y\mid X,\gamma)=n(\gamma+)-n(\gamma-)$, равное числу переходов по ребру минус число переходов против ребра. Определим для заданной вершины $X\in G$ и произвольной вершины $Y\in G$ значение уровня Y относительно X:

$$L(Y\mid X)=\max\{L(Y\mid X,\gamma)\mid \gamma\in extrem(X,Y)\}.$$

Здесь максимум берется только по экстремальным путям.

Обозначим множество вершин графа G. Все вершины связного ярусного графа можно разложить на уровни относительно произвольной вершины. Рассмотрим от вершины X все возможные пути в вершину Y без учета направления ребра. Путь называется экстремальным, если в нем для любых двух соседних вершин $X'Y'$ нет более длинной цепочки с концами X' и Y' и с тем же направлением всех ребер. Множество таких путей из X в Y обозначим $extrem(X,Y)$. Заметим, что любой отрезок экстремального пути является экстремальным для своих концов.

Поскольку граф ярусный и имеет конечный ранг (обозначим его K), то уровни соседних по графу вершин различаются не более чем на K, и меньше уровень той вершины, из которой выходит связывающее их ребро.

На каждом уровне находится не более чем счетное число вершин, поскольку G – счетное. Это значит, что каждый уровень можно инъективно отобразить на один из отрезков вида EF на остове вложения. Обозначим H длину отрезка AA'. И один из отрезков вида EF расположим на прямой $t=0$ в координатах плоскости. Тогда все отрезки этого вида отобразятся в отрезок $x\in\left[(E)_x;(F)_x\right]$ на прямых $t=sH$, $s\in\mathbb{Z}$, в тех же координатах (обозначение $EF\mid_s$). Вершины уровня L расположим на отрезке $EF\mid_L$ произвольным образом. При этом лоренцево расстояние между ними бесконечно, так что это не нарушает условия 1а при любой эвклидовой плотности отображения.

А по лемме 1 условие 1а выполнено для вершин на разных отрезках. Максимальное расстояние Лоренца между любой парой точек на отрезках $EF|_s$ и $EF|_{s+1}$ равно H. Поэтому положив значение ограничения длины ребра $a = KH$, мы удовлетворим условию 2а. Метрическое вложение построено. На рисунке 4 показан фрагмент такого вложения.

Необходимость. Если нарушено условие ярусности графа, то имеется пара вершин, между которыми возможны пути по ребрам в обе стороны. В этом случае хотя бы один из этих путей будет иметь ребро бесконечной по метрике Лоренца длины. Это ребро, которое при вложении в пространство имеет координату t исходной вершины больше или равную той же координате конечной вершины пути. Если нарушено условие ограниченного ранга, то для любого числа $K > 0$ имеется вершина, у которой число уровней в 1-окрестности больше K. В такой вершине будет хотя бы одно входящее ребро, длина которого больше $K\varepsilon$, и оно может быть сколь угодно большим. Это не позволяет удовлетворить условию 2а. Значит, требования условия теоремы необходимы. □

Теперь рассмотрим метрику $\|x\|_A = abs\|x\|_M$, которую назовем АМ метрикой.

Теорема 3. Любое ориентированное дерево с конечным (возможно, неравномерно ограниченным) ветвлением имеет равномерное вложение в пространство любой размерности выше 1 с АМ метрикой. □

Заметим, что речь в этой теореме идет только о достаточных условиях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение проведем на плоскости $\langle t,x \rangle$ с метрикой Минковского $ds^2 = dt^2 - dx^2$ и АМ метрикой $d_a((t,x),(t',x')) = \left|\left((t-t')^2 - (x-x')^2\right)^{1/2}\right|$.

Лемма 2. Любые два АМ шара имеют пересечение с конечной евклидовой площадью. При этом площадь каждого из АМ шаров имеет бесконечную площадь по Эвклиду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку АМ шар можно рассматривать как фигуру вращения по компактной сфере SO_{n-1} вокруг оси t двухмерного сечения гиперболоида в плоскости $\langle t,x \rangle$, то достаточно показать, что конечна площадь пересечения двухмерных АМ шаров и бесконечность площади каждого такого шара (рис. 5).

Неограниченность эвклидова объема двумерного псевдошара следует из расходимости интеграла, выражающего площадь между одной ветвью гиперболы псевдосферы радиуса ε, которая выражается формулой $t = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$, и соответствующей линией изотроп $t = x$, $x \ge 0$ (всего в двумерном АМ шаре таких ветвей 8, и они получаются из указанной ветви поворотами на углы, кратные прямому, и отражениями относительно изотроп, рисунок 6):

$$\int_0^Y \left(\sqrt{x^2+\varepsilon^2} - x\right) dx = O\left(\int_0^Y \frac{\varepsilon^2}{x} dx\right) \underset{Y\to\infty}{\to} \infty.$$

Это равенство следует из разложения подынтегрального выражения при больших значениях x:

$$\sqrt{x^2+\varepsilon^2} \approx_{x>>1} x\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2x^2}\right).$$

Для доказательства конечности объема пересечения двух двумерных псевдошаров докажем компактность этого пересечения. Для любой пары таких шаров можно указать радиус эвклидовой сферы, вне которой нет их пересечения. Рассчитаем зависимость расстояния z от точки B изотропы, отстоящей от центра на евклидово расстояние r, по орту до точки A соответсвующего сектора псевдосферы радиуса ε (рис. 7).

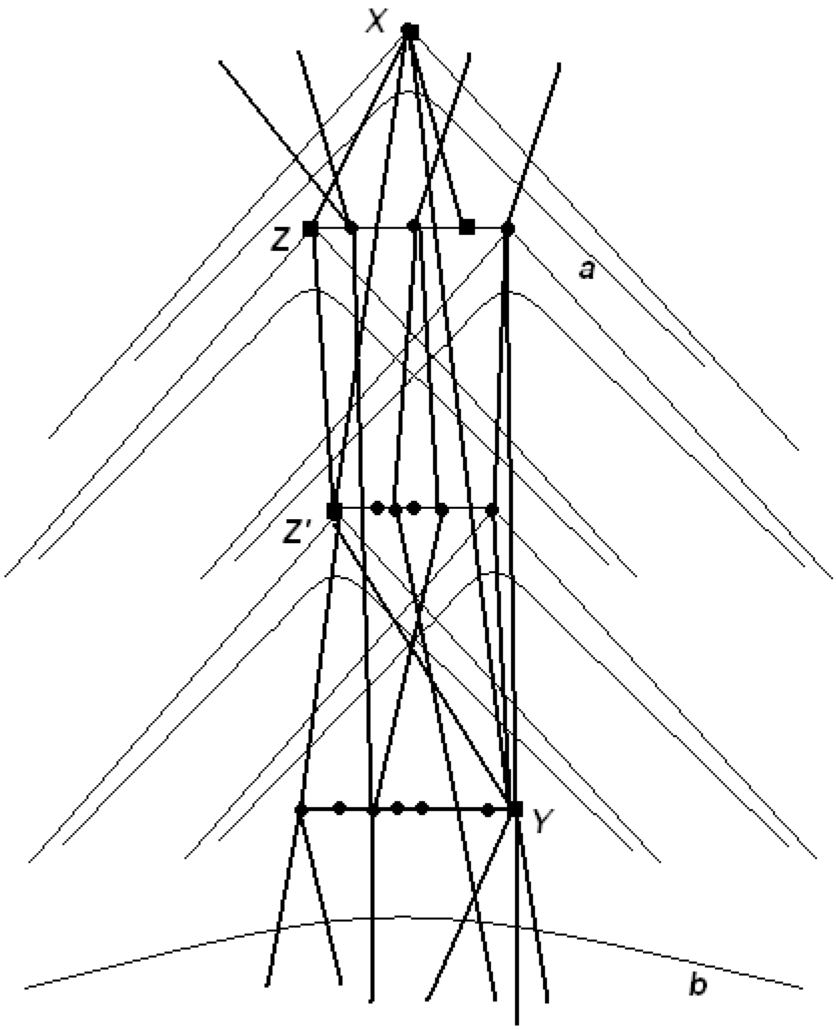

Рис. 4. Показано вложение части ярусного графа ранга 3 в плоскость с метрикой Лоренца. Линии вида a ограничивают ε-окрестность точки внутри конуса причинности. Линия b ограничивает Лоренц-длину ребер графа для вершины X. Направление ребер вверх. Вершина Y имеет третий ранг относительно вершины X: путь длины три идет через точки Z, Z'. Квадратами отмечены вершины из 1-окрестности X. Остальные точки не входят в ее 1-окрестность по графу, и все точки находятся вне ε-окрестности друг друга по метрике Лоренца. Точки, расположенные на одной горизонтальной линии, бесконечно удалены друг от друга

Если проекции отрезка AB на оси $\langle t \rangle$ и $\langle x \rangle$ имеют длину q (угол с осями 45 градусов и проекции равны по длине), то

$$\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+q\right)^2-\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-q\right)^2=\varepsilon^2,$$

и поэтому

$$q=\frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{2}r},$$

$$z=\sqrt{2}q=\frac{\varepsilon^2}{2r}. \qquad (1)$$

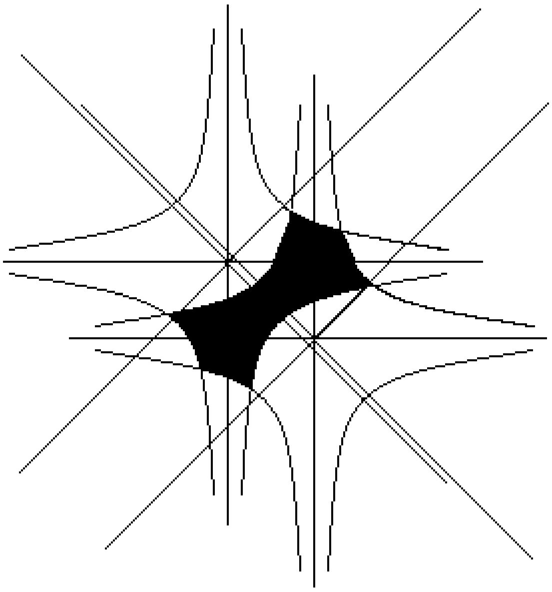

Рис. 5. Пересечение двухмерных псевдошаров

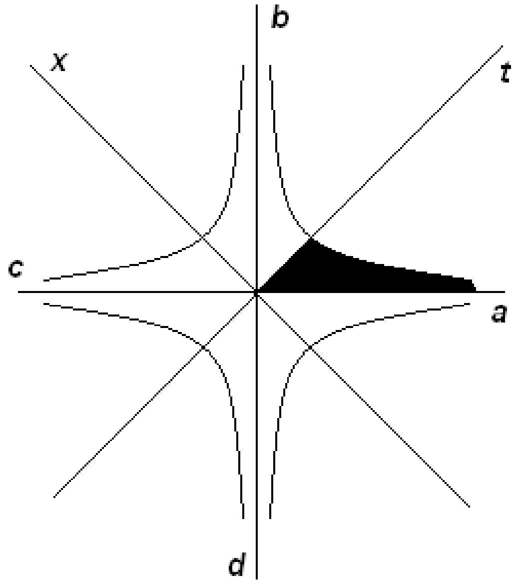

Рис. 6. Ветви псевдошара размерности 2. Выделена ветвь, для которой записан интеграл. Линии *a*, *b*, *c*, *d* – изотропы с нулевым значением АМ метрики

Пусть заданы две точки $0=(0,0)$ и $A=(T,X)$ на псевдоевклидовой плоскости (рис. 8). Через каждую из точек проходят две ортогональные изотропы под углом 45 градусов к осям $\langle t\rangle$, $\langle x\rangle$. Расстояния $h=AB$ и $h'=AC$ между параллельными соответственными изотропами выражаются формулами

$$h=\frac{|X-T|}{\sqrt{2}};\quad h'=\frac{|X+T|}{\sqrt{2}}.$$

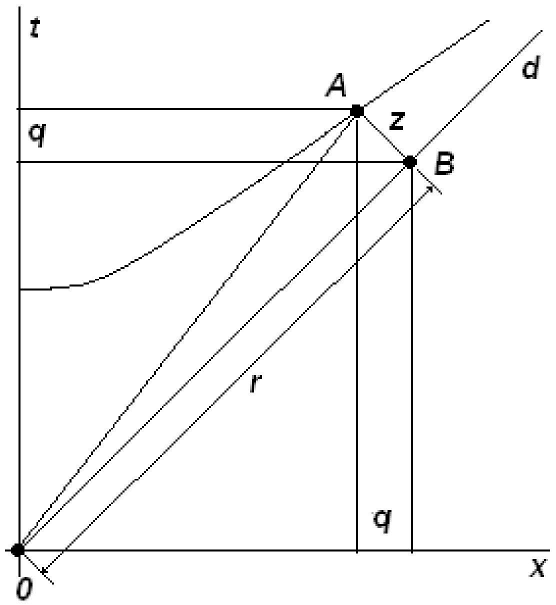

Рис. 7. Отклонение (*z*) псевдосферы от изотропы (*d*). *r* – эвклидово удаление по изотропе от точки центра (0); *q* – длина проекции на оси орта из точки псевдосферы на изотропу

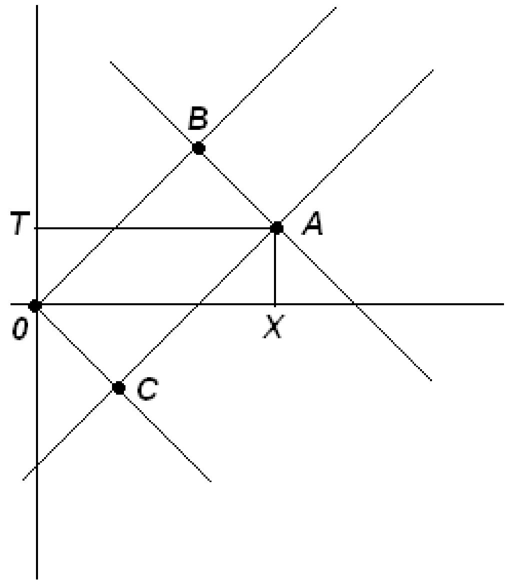

Рис. 8. Дистанции *AB* и *AC* между изотропами двух точек 0 = (0,0) и *A* = (*T*, *X*)

Обозначим $H = \min\{h, h'\}$, $H' = \max\{h, h'\}$. Из формулы (1) следует, что если $z < H$, что выполняется при $r > \varepsilon^2 / 2H$, то параллельные секторы двух псевдосфер не могут иметь пересечение. Ортогональные секторы имеют пересечение внутри круга с радиусом $H' + \varepsilon$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. При равномерном вложении графа дерева необходимо и достаточно удовлетворить следующему требованию: все ребра, входящие в каждую точку, исходят из a-окрестности этой точки и находятся вне ε-окрестности всех остальных точек. Первую вершину (корень дерева) можно вложить в пространство с АМ метрикой произвольно. Пусть удалось вложить некоторое конечное число входных окрестностей корня. Они содержат конечное число вершин, а их образы образуют конечное подмножество в пространстве. Рассмотрим точки, входящие в последнюю вложенную окрестность. У каждой из них по лемме 2 имеется a-окрестность бесконечного объема, из которой ε-окрестности всех уже вложенных точек вырезают конечный объем. Это значит, что последовательно можно вложить нужным образом все точки следующей окрестности, которых тоже конечное число. Поэтому применима полная индукция. Следовательно, можно вложить все окрестности корня, что означает вложение всего дерева. □

Заметим, что по теореме 1 любое дерево, у которого ветвление в каждой точке не ниже двух, не может быть равномерно вложено в пространство Эвклида конечной размерности, поскольку у него нет необходимого факторграфа. Это существенное различие эвклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Заключение

Задача вложения бесконечного графа (счетное число вершин и ребер) в континуальное метрическое пространство возникает в математической физике, биологии, экологии и макроэкономике, когда для рассмотрения объекта изучения в крупном масштабе требуется переход от дискретных описаний микроуровня к макроскопическим моделям непрерывных сред. Для корректного перехода к непрерывной модели надо обеспечить для бесконечного графа равномерное метрическое вложение в выбранное пространство (опредеделние 5). В этом направлении получены следующие результаты.

1. Для вложения в пространство Эвклида введен специальный граф $\mathrm{Net}(n)$, который является ортодиагональной равномерной сетью на $\mathbb{R}^n$. Показано, что (теорема 1) счетный граф имеет метрическую размерность n, если и только если на нем можно построить равномерный факторграф, который изоморфно вкладывается в $\mathrm{Net}(n)$, и это наименьшее такое n.

2. Для вложений в псевдоевклидово пространство рассмотрены две модификации метрики Минковского: метрика Лоренца (определение 7) и *AM* метрика вида $\|x\|_A = abs\|x\|_M$. Введено понятие ярусного графа конечного ранга (определение 6). Доказано следующее.

2.1 (теорема 2). Граф имеет равномерное вложение в псевдоевклидово пространство размерности выше 1 с метрикой Лоренца, если и только если граф ярусный конечного ранга.

2.2 (теорема 3). Любое ориентированное дерево с конечным (возможно, неравномерно ограниченным) ветвлением имеет равномерное вложение в пространство любой размерности выше 1 с АМ метрикой.

Список литературы

Albert M. H., Frieze A. M. Random graph orders, Order 6 (1989). – № 1. – P. 19–30.

D'Ariano G. M., Tosini A. Emergence of Space-Time from Topologically Homogeneous Causal Networks // arXiv:1109.0118v1 [gr-qc], 1 Sept. 2011.

Beem J., Ehrlich P. Global Lorentzian geometry. Marcel Dekker. inc. New York, Basel, 1981. (Дж. Бим, П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия. – М.: «Мир», 1985, 400 с.)

Bombelli L., Henson J., Sorkin R. D. Discreteness without symmetry breaking: a theorem // arXiv: gr-qc/0605006v1, 1 may 2006.

Brightwell G., Georgiou N. Continuum limits for classical sequential growth models // Rand. Struct. Alg. **36** (2010). – P. 218–250.