

УДК 517.972; 519.6; 539.3

## Сетчатые разворачивающиеся оболочки из полос, образованных трапециевидными пластинами

**В. А. Грачев, Ю. С. Найштут**

Самарский государственный архитектурно-строительный университет  
Россия, 443001, г. Самара, Молодогвардейская ул., д. 194

E-mail: neustadt99@mail.ru

Изучаются разворачивающиеся системы, составленные из набора трапециевидных пластин. Средние линии пластин в первоначальном положении пакета представляют собой плоскую кривую. Доказывается, что при разворачивании пакета из тонких пластинок, образуется поверхность, аппроксимирующая оболочку практически любой кривизны. Строится кинематика континуальной модели методом подвижного репера Картана, обобщающая ранее опубликованные результаты авторов. Показаны приложения к оболочкам вращения. Представлены экспериментальные модели разворачивающихся систем.

Ключевые слова: континуальные разворачивающиеся системы, репер Картана, оболочки вращения, экспериментальные модели

### **Latticed deployable shells made of strips assembled from trapezoid plates**

**V. A. Grachev, Yu. S. Nayshtut**

*Samara State Architectural and Building University, 194 Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443096, Russia*

**Abstract.** – This paper covers deployable systems assembled from a set of trapezium plates. The middle lines of the plates represent a plane curve in the original position of the package. It is proved that when the package of thin plates is unwrapped, a surface approximating a shell of nearly any curvature is formed. Kinematics of the continual model is analyzed by the method of Cartan moving hedron, extending the results the authors published earlier. Various applications of rotating shells are shown. Experimental models of deployable latticed systems are demonstrated.

Keywords: continual deployable systems, Cartan hedron, rotating shells, experimental models

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 63–73 (Russian).

В статье [Грачев, Найштут, 2011] изучались оболочки, образованные путем склеивания множества шестизвенников, составленных из одинаковых трапециевидных пластинок (рис. 1).

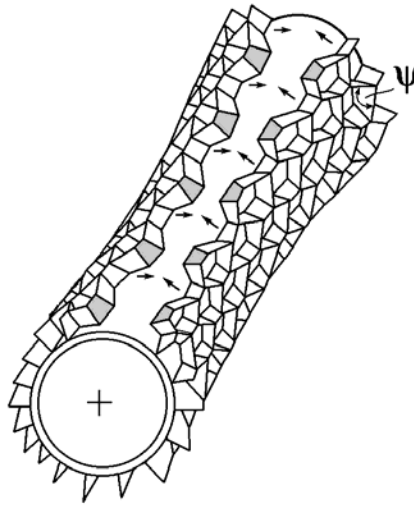


Рис. 1

Шестизвенники собираются по схеме 2, рис. 2. Тот же результат получится, если пакет из прямолинейных полос (составленных из трапециевидных пластинок) склеить, а затем раздвинуть по схеме 1, рис. 2.

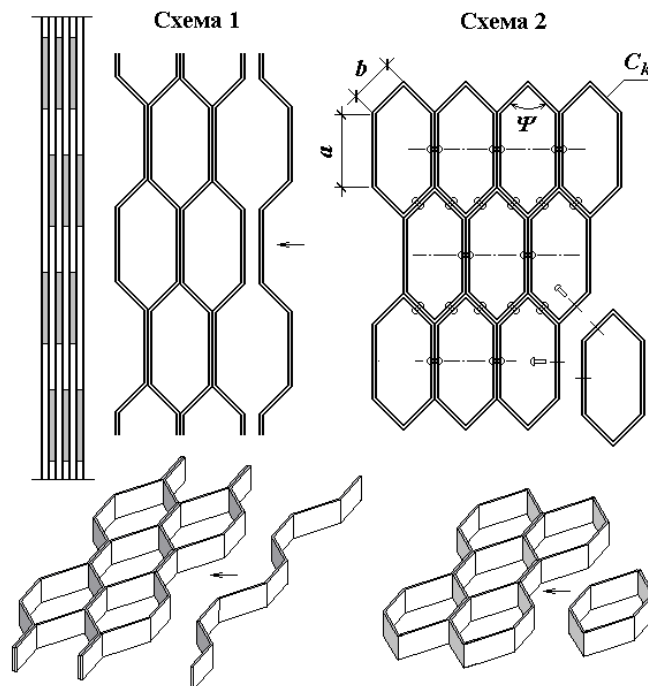


Рис. 2

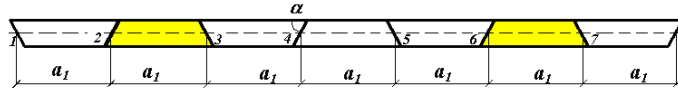
Если каждая ячейка является симметричной (состоит из двух типов деталей), а пластинки тонкие (их жесткость на изгиб и кручение мала), то пакет полос (рис. 2) можно развернуть в оболочку, которая представляет собой механизм с небольшим количеством степеней свободы.

Оболочки, рис. 1 и рис. 2, изобретены М. Swank (USA) [Swank, 1990] и В. А. Грачевым (Россия) [Грачев, Найштут, 1992]. В работах [Грачев, Найштут, 1995, 1996] развиты основы ме-

ханики трансформирующихся систем, составленных из одинаковых пластинок трапециевидной формы. В настоящей статье построения предыдущих работ обобщаются применительно к произвольным «плоским лентам». Технологически более приемлемо создавать сеть из трапециевидных пластин по схеме 1, рис. 2, а теоретические построения удобнее проводить по схеме 2, рис. 2. Поэтому второй путь принят в последующем изложении.

Рассмотрим оболочки, которые собираются из плоских лент рис. 3, составленных из трапеций произвольных размеров. Другими словами, заменим в схеме рис. 2 ленту из одинаковых трапеций рис. 3а на ленту рис. 3б.

*а. Плоская лента из одинаковых трапеций*



*б. Плоская лента из различных трапеций*

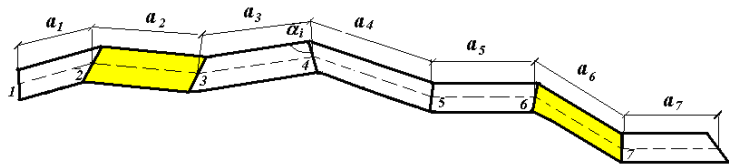


Рис. 3

Будем называть шестизвенник зеркально симметричным, если он симметричен относительно одной из плоскостей, проходящих через центр тяжести  $O$ , и составлен из трех типов трапеций, соединенных цилиндрическими шарнирами (рис. 4). Трапецию будем именовать двумя цифрами, характеризующими границы (узлы) средней линии. Вектор  $\vec{\beta}_1$  касается окружности, проходящей через пересечение средних линий симметрично расположенных трапеций 2–3, 2'–3' и точку  $O$ , а вектор  $\vec{\beta}_2$  является касательным к дуге окружности, проходящей через точки 4,  $O$ , 1.

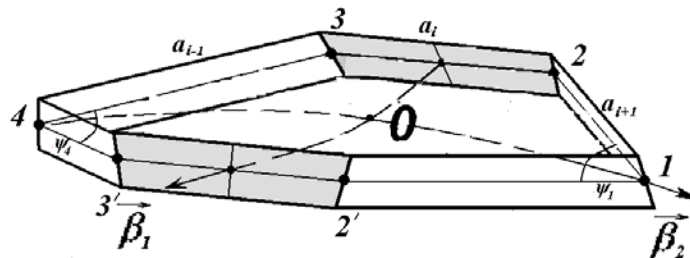


Рис. 4

Убедимся, что зеркально симметричный шестизвенник является механизмом с одной степенью свободы, а поверхность, построенная на серединах его граней, служит аппроксимацией гладкой оболочки.

С этой целью обозначим векторы, соединяющие точки пересечения средних линий трапеций, буквами  $\vec{r}_i, i=1,..6$ . Граням, в которых располагаются векторы  $\vec{r}_i, i=1,..6$ , присвоим номера  $i$ . Вектор относительной угловой скорости грани с номером  $i$  относительно грани  $(i+1)$  назван  $\vec{\omega}_i$ , а двугранные углы между соседними пластинками обозначим  $\psi_i, i=1,2,..6$ . Длины средней линии граней приняты равными  $a_i, i=1,2 \dots 6$ . Толщину всех пластинок примем одинаковой и равной  $t$ .

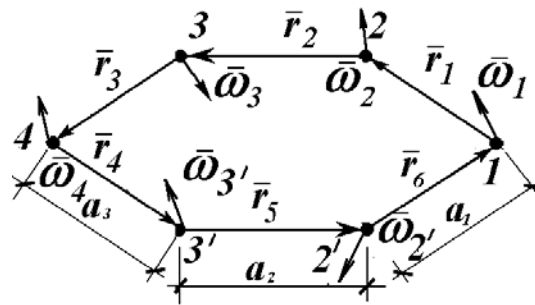


Рис. 5

Заметим, что если грани шестиизвенника представляют собой абсолютно жесткие пластинки, соединенные линейными цилиндрическими шарнирами, то такая конструкция не является, вообще говоря, механизмом. В самом деле, поскольку каждая жесткая пластинка имеет в пространстве шесть степеней свободы, а линейный шарнир лишает систему пяти степеней свободы, то число степеней свободы шестиизвенника равно

$$F = 6 \times 6 - 6 \times 5 = 6.$$

Это означает, что произвольно масштабированный шестиизвенник может перемещаться в пространстве только как абсолютно твердое тело. Для того чтобы появились дополнительные степени свободы, конструкция должна быть изменена. Убедимся, что симметричный шестигранник имеет, по крайней мере, одну степень свободы, за которую можно принять, например, угол  $\psi$  (рис. 2).

Рассмотрим трехзвенник, состоящий из пластинок 1-2-3-4 (вообще говоря, пластинки могут иметь произвольные размеры) и располагающийся в начальном положении на плоскости с закрепленной осью 1. Положение оси 4 является функцией трех двугранных углов  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Если взять произвольно угол  $\psi_1$ , то можно распорядиться двумя другими таким образом, чтобы ось 4 лежала в первоначальной плоскости. Отразив зеркально относительно этой плоскости трехзвенник, убеждаемся, что симметричный шестиизвенник является системой с одной степенью свободы.

Тот же результат получается и в результате формального вычисления. Выпишем ограничения, которые налагаются на шесть угловых скоростей  $\vec{\omega}_i$  [Лурье, 1961]. Из замкнутости многогранника и теоремы о сложении угловых скоростей имеем

$$\sum_{i=1}^{i=6} \vec{\omega}_i = 0. \quad (1)$$

К трем уравнениям (1) присоединим еще три, отражающие тот факт, что скорость точки, находящейся на пересечении граней одинакова, если ее вычислять применительно к той или иной грани:

$$\begin{aligned} & \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}_3 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4) \times \vec{r}_4 + \\ & + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5) \times \vec{r}_5 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5 + \vec{\omega}_6) \times \vec{r}_6 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее равенство вместе с соотношением

$$\sum_{i=1}^{i=6} \vec{r}_i = 0 \quad (3)$$

означает, что сумма моментов векторов  $\vec{\omega}_i$  относительно точки O равна нулю.

Кроме того, присоединим для каждого узла по три уравнения, связывающие скорости изменения углов  $\psi_i$  с угловыми скоростями  $\vec{\omega}_i$ . Наконец, учтем, что расстояние между каждыми

двумя соседними узлами постоянно и равно  $a_i$  (еще шесть уравнений). Таким образом, для 18 (координаты узлов трапеций) и 18 (компоненты векторов  $\vec{w}_i$ ) – всего 36 неизвестных, имеется  $18 + 12 = 30$  уравнений.

Если зафиксировать шесть неизвестных, отвечающих жесткому перемещению, то всегда существует нулевое решение, при котором шестигранник геометрически неизменяем. Покажем, что для симметричной относительно плоскости  $IO4$  ячейки получающаяся система уравнений допускает ненулевое решение.

Приняв за неизвестные  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_6$ , видим, что уравнения проекций на ось  $Y$  и два уравнения моментов относительно осей  $X$  и  $Y$  удовлетворяются тождественно в силу симметрии векторов. Таким образом, для четырех неизвестных векторов имеются только три независимых уравнения. Следовательно, симметричная ячейка является механизмом с одной степенью свободы.

Соединим множество ячеек по схеме 2 рис. 2, склеив трапеции одинаковых размеров. Эта операция выполнима, когда  $\Psi = 0$ . Убедимся, что если пластинки тонкие, а размеры шестигранников малы по сравнению с габаритами оболочки (сеть содержит большое количество зеркально симметричных ячеек), то можно развернуть пакет из полос в двумерную поверхность «почти» без приложения внешних сил.

Вначале примем во внимание тот факт, что если пластинки, составляющие сеть, тонкие (отношение  $t/\delta$  – малое число), то для их закручивания и изгиба в плоскости минимальной жесткости требуются незначительные усилия. Поэтому можно в первом приближении считать углы закручивания пластинок дополнительными степенями свободы сетчатой системы.

Предположение о малости сот равносильно тому, что расстояния между близкими точками могут рассматриваться как дифференциалы соответствующих функций. Таким образом, появляется возможность параметризации и гомогенизации системы, состоящей из большого количества сот.

Соединим  $2n$  полос из трапеций (нумерация полос произведена арабскими цифрами) в начальном положении по схеме 1, рис. 1 («склеивая» четные и нечетные полосы), после чего раздвинем пакет (рис. 6).

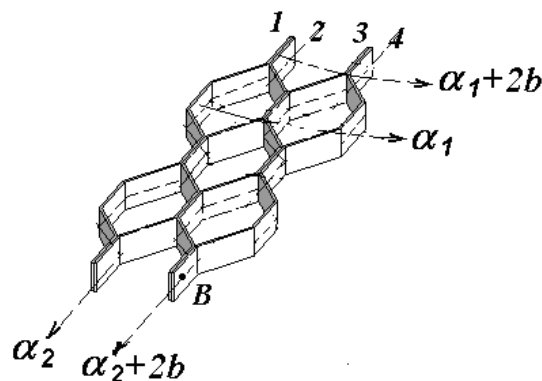


Рис. 6

Ломанные, соединяющие средние линии нечетных полос (показаны пунктиром), назовем координатными линиями  $\alpha_1$ . Аналогично, через середины склеенных трапеций проведем линии  $\alpha_2$ . Лагранжевы координаты линии  $\alpha_1$  примем равными фактической длине вдоль средних линий трапеций, отсчитываемой от фиксированной точки В. Изменение координаты  $\alpha_2$  при переходе к соседней ячейке равно  $2b$ . Образовавшуюся дискретную координатную сетку дополним по непрерывности точками двумерного многообразия.

Если координатные линии расположены достаточно близко, то возможна линейная аппроксимация координат узлов сети, находящихся на средних линиях трапеций, на все двумер-

ное многообразие, а также вычисление первой и второй квадратичных форм построенной континуальной поверхности. В итоге указанной аппроксимации получится поверхность, малый фрагмент которой показан на рис. 7. Линии главной кривизны обозначаются буквами  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Для касательной плоскости, проходящей через центр тяжести средней ячейки  $O$ , принято обозначение  $\Pi$ .

Обратим внимание на тот факт, что карта, состоящая из проекций на плоскость  $\Pi$  средних линий пяти ячеек (рис. 7), имеет в пространстве (если допустить возможность вращения соприкасающихся трапеций по средним линиям)  $3 \times (7 - 5) = 6$  степеней свободы. Поскольку все ячейки зеркально симметричны, карта (рис. 7) может быть дополнена еще двумя ячейками (они отмечены номерами 6 и 7 в кружках на (рис. 8)) так, что агрегат из семи ячеек имеет в пространстве шесть степеней свободы

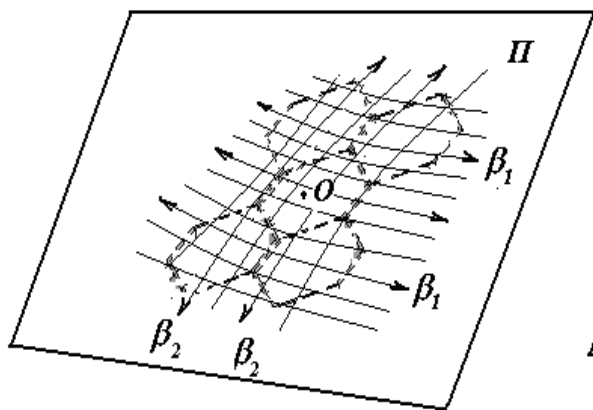


Рис. 7

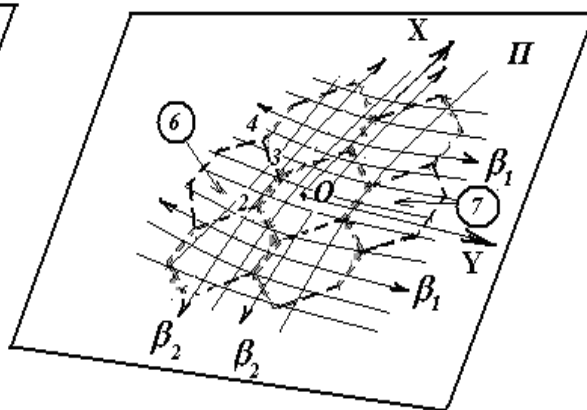


Рис. 8

В самом деле, средняя линия 2–3 ячейки 6, будучи совмещена с соответствующей линией центральной ячейки, обеспечивает всей системе две степени свободы. Этого количества достаточно, чтобы совместить линию 3–4 ячейки 6 с ранее собранной системой на рис. 7 без приложения дополнительных сил. Совпадение остальных линий получается автоматически в силу симметрии карты относительно осей  $X$  и  $Y$ .

Другими словами, в пределах малой карты  $\Pi$  (рис. 8) расстояние между точками  $A$  и  $B$  с координатами  $(\alpha_{1A}, \alpha_{2A})$ ,  $(\alpha_{1B}, \alpha_{2B})$  определяются раскрытием только одного угла  $\Psi$ .

Гомогенизацию дискретной системы проведем в два шага. Вначале рассмотрим свободную деформацию одной ячейки и малой карты  $\Pi$  (то есть такую деформацию, которая не связана никакими внешними ограничениями), а затем объединим ячейки в континуальную сеть по определенному правилу.

Приступая к первому шагу, примем, что острый угол трапеций  $\alpha_0$  близок к прямому. Иначе говоря, предполагается, что угол  $\alpha_0 \neq \pi/2$ , но членами, в которых участвует квадрат косинуса этого угла  $\alpha = \cos \alpha_0$ , можно пренебречь.

Обозначим буквой  $\lambda$  удвоенный угол между векторами  $(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)$  и  $(\vec{r}_6 - \vec{r}_1)$  (рис. 4), а удвоенный угол между плоскостями 2–3 и 2'–3' буквой  $\mu$ . В соответствии с введенными ранее обозначениями получаем

$$\lambda = \alpha \Omega_1(\Psi), \quad \mu = \alpha \Omega_2(\Psi). \quad (4)$$

В формуле (4) буквами  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  обозначаются непрерывные функции, зависящие от единственной степени свободы ячейки  $\Psi$ .

Длина линии между серединами граней 2–3 и 2'–3' равна  $s_1 = 2b\Theta_1(\Psi)$ , а между точками 1 и 4 составляет  $s_2 = B\Theta_2(\Psi)$ . Здесь  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  – гладкие функции, а величина  $B$  по рис. 5 рав-

на  $B = a_1 + a_2 + a_3$ . Поэтому можно связать с симметричной свободной ячейкой (а также с малой картой  $\Pi$ ) главные радиусы кривизны по формулам

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{s_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{s_2} \tag{5}$$

Следовательно, при контакте ячеек только по средним линиям соприкасающихся трапеций, в малой окрестности точки  $O$  (включающей небольшое количество свободных ячеек, входящих в карту  $\Pi$ ) можно определить первую и вторую квадратичные формы поверхности

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2, \tag{6}$$

$$A_1 = \Theta_1(\Psi), \quad A_2 = \Theta_2(\Psi), \tag{7}$$

$$B(d\alpha_1, d\alpha_2) = \frac{A_1^2 d\alpha_1^2}{\rho_1} + \frac{A_2^2 d\alpha_2^2}{\rho_2}. \tag{8}$$

Выписанные соотношения определяют связность, характеризуемую квадратичными формами  $\omega^i$  и  $\omega_j^i$  [Картан, 1962], которые линейны относительно дифференциалов  $d\vec{\beta}_1, d\vec{\beta}_2$ .

$$d\vec{r} = \omega^i \vec{\beta}_i, \quad d\vec{\beta}_i = \omega_j^i \vec{\beta}_j. \tag{9}$$

В формуле (9) и далее используется тензорная запись со сверткой по повторяющимся индексам, а  $d\vec{r}$  означает вектор расстояния между точками поверхности  $\Pi$ , лагранжевы координаты которых отличаются на  $(d\alpha_1, d\alpha_2)$ .

Приступая ко второму шагу гомогенизации задачи, примем основное допущение, описывающее глобальную трансформацию сети из зеркально симметричных шестизвенников: соединенные по схеме рис. 1 ячейки развертываются в оболочку таким образом, что связность (9) локально преобразуется как жесткое перемещение малого свободного фрагмента касательной плоскости из первоначального положения  $\Pi$  (фрагмент которого показан справа на рис. 9) в положение  $\Pi_1$ , изображенное на том же рисунке слева. Это требование обеспечивает деформацию оболочки без растяжения срединной поверхности. Возможно только закручивание тех пластинок, по которым произведено соединение полос.

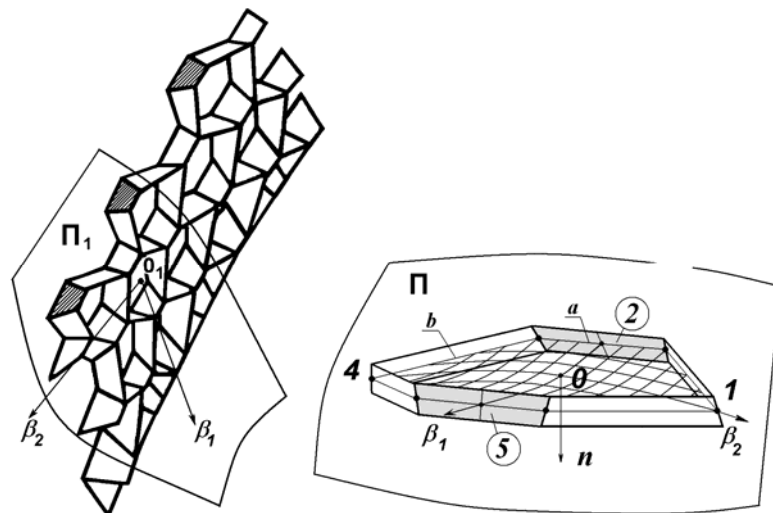


Рис. 9

Поскольку толщина любой пластинки незначительна по сравнению с двумя другими ее размерами, потенциальная энергия упругой деформации оболочки оказывается минимальной,

и из всех способов разворачивания оболочки описанный выше требует наименьшей дополнительной энергии.

Для того чтобы записать формы  $\omega^i$ ,  $\omega_j^i$  применительно к поверхности  $\Pi_1$ , достаточно преобразовать векторы  $d\vec{\beta}_i$ ,  $\vec{\beta}_i$ ,  $d\vec{r}$ , повернув их в соответствии с углами Эйлера, которые образуются после совмещения точек  $O$  и  $O_1$ . Преобразованные формы  $\omega^i$ ,  $\omega_j^i$  должны удовлетворять трем соотношениям Гаусса–Кодацци (уравнениям, обеспечивающим интегрируемость системы (9) [Новожилов, 1962]).

В силу линейности форм (9) относительно  $d\vec{\beta}_1$ ,  $d\vec{\beta}_2$ ,  $\vec{\beta}_1$ ,  $\vec{\beta}_2$  и сформулированного выше основного допущения о деформации сети, углы Эйлера не войдут в уравнения Гаусса–Кодацци, так что разрешающая система из трех уравнений содержит лишь одну переменную функцию  $\Psi$  и становится переопределенной. Чтобы обеспечить интегрируемость уравнений Гаусса–Кодацци, не меняя симметрию ячейки и метрику оболочки, необходимо учесть закручивание пластинок.

Соотношения (5) и (8) с учетом закручивания пластинок можно принять в виде

$$b_{11} = \frac{A_1^2(\lambda_1 - \phi_{11})}{s_1}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{A_2^2(\lambda_2 - \phi_{22})}{s_2}. \quad (10)$$

Здесь  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности  $B(d\alpha_1, d\alpha_2) = b_{ij}d\alpha_i d\alpha_j$ , (индексы  $i, j$  принимают значения 1 и 2), а функции  $\phi_{11}, \phi_{22}$  подлежат определению. Коэффициент  $b_{12}$  принят равным нулю в силу того, что линии кривизны в симметричных ячейках всегда ортогональны.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм из (6) и (10), зависящие от трех функций ( $\phi_{11}, \phi_{22}, \Psi$ ), должны удовлетворять трем уравнениям совместности Гаусса–Кодацци:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial A_1}{A_2 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial A_2}{A_1 \partial \alpha_1} \right) &= -\frac{A_1 A_2}{\rho_1 \rho_2}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial A_1}{\rho_1} \right) &= \frac{\partial A_1}{\rho_2 \partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{\rho_2} \right) = \frac{\partial A_2}{\rho_1 \partial \alpha_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, установлено, что равенства (5)–(8) и (10)–(11) позволяют однозначно определить форму поверхности (аппроксимирующей непрерывным образом расположение в пространстве средних линий трапециевидных пластин), если известны координаты опорного контура оболочки. Формулы (10) устраняют ошибку работы [Грачев, Найштут, 2011, формулы (3), (9)], в которой коэффициенты второй квадратичной формы  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  связывались с углами Эйлера между триэдрами на поверхностях  $\Pi$  и  $\Pi_1$  по рис. 9. В силу основного допущения о трансформации оболочки жесткое перемещение триэдра не меняет связности, углы Эйлера между триэдрами  $\Pi$  и  $\Pi_1$  не должны входить в разрешающие уравнения, поэтому функции  $\phi_{11}, \phi_{22}$ ,  $b_{12}$  следует ввести на поверхности  $\Pi$ . Таким образом, определение (10) обеспечивает выполнение условий неразрывности деформаций (11) как на поверхности  $\Pi$ , так и  $\Pi_1$ .

## 2. Приложения к частным задачам

Применим общие соотношения к оболочкам вращения. Уравнения (11) упрощаются: пропадают производные по аргументу  $\alpha_2$ , можно также принять  $\phi_{11} = 0$ . Таким образом, остаются два уравнения, и  $\rho_2$  явно выражается из первого уравнения

$$\frac{1}{\rho_2} = -\frac{\rho_1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial A_2}{A_1 \partial \alpha_1} \right). \quad (12)$$



Если подставить это выражение во второе уравнение (11), то получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции  $\psi_0 = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \sin \frac{\Psi}{2} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\rho_1 \partial}{A_1 \partial \alpha_1} \left( \frac{\psi_0}{A_1} \right) \right) = -\frac{\psi_0}{\rho_1}. \quad (13)$$

Найдя из этого уравнения  $\Psi$  (с точностью до двух постоянных), вычислим затем по (10), (12) параметр закручивания пластинок  $\phi_{22}$  единственным образом.

Знание функции  $\Psi(\alpha_1)$  позволяет найти образующую поверхности оболочки. Отсюда заключаем, что замкнутая оболочка вращения представляет собой конечномерный механизм, геометрия которого зависит от раскрытия только двух ячеек. Обратим внимание также и на то, что структура (13) близка к дифференциальному уравнению второго порядка с большим коэффициентом при старшей производной, а кривая вращения – к цепной линии, приближающейся к прямой, когда мал угол  $\alpha$ .

Односвязная сотовая оболочка может занимать очень маленький объем. Указанная ситуация возможна в двух случаях, когда  $\Psi = 0$  либо  $\Psi = 2\pi$ . Первый случай отвечает начальному положению пакета рис. 2, а второй – свернутой школьной шпательке. Применительно к одной полосе процесс «схлопывания оболочки в точку» показан на рис. 10.

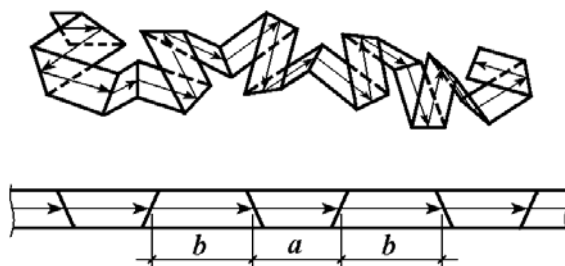


Рис. 10

Отмеченное свойство может служить основой прогрессивной технологии транспортировки сетчатых систем: полосы упаковываются в свернутом виде в малый по объему ящик с габаритом порядка  $(a + b)$ , транспортируются на значительное расстояние, затем соединяются по рис. 2 и разворачиваются в проектное положение.

Указанные выше свойства отражает модель, представленная на рисунках 11–13.

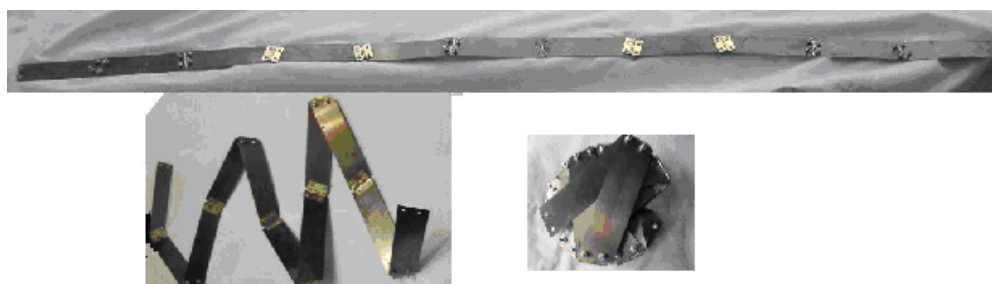


Рис. 11

На рисунках 11, 12 показаны лента и ячейка на стадии предварительной сборки. Ленты собираются из пластинок толщиной 0.2 мм (длина средней линии трапеции 115 мм, высота 30 мм, острый угол у основания 15°), которые изготовлены из высокоуглеродистой стали с пределом текучести 1000 мПа. Петли – шарниры толщиной 0.8 мм выполнены из малоуглеродистой стали. Петли и пластины склеиваются при температуре 170 °С специальным пленочным клеем после предварительной сборки в кондукторе, обеспечивая точность по линейным размерам 0.1 мм.



Рис. 12

На рис. 11 последовательно изображен процесс упаковки ленты в клубок-глобулу, которая напоминает школьную шпиргалку.

Рисунок 12 отражает симметричную деформацию зеркального шестизвенника при изменении двугранного угла  $\Psi$ . Когда  $\Psi = 2\pi$ , площадь ячейки максимальна. Дальнейшее увеличение этого угла приводит к «коллапсу» ячейки (и всей оболочки), так как площадь любого односвязного куска сетчатой поверхности становится ничтожно малой.



Рис. 13

На рис. 13 показана модель сетчатой оболочки, составленная из двадцати полос, которые объединяются в единую систему на нейлоновых термопластичных заклепках диаметром 3 мм. Соприкасающиеся пластины соединяются друг с другом шестью заклепками: по две через петли-шарниры и двумя по средней линии. Граничные условия на контурах оболочки вращения обеспечиваются постановкой недеформируемых колец, к которым крепятся петли-шарниры.

Если количество лент достаточно велико, то произвольно назначаемые граничные условия (диаметры верхнего и нижнего кольца) могут изменяться в широких пределах, и сетчатая оболочка превращается в регулируемый механизм, принимающий практически любую форму.

Рисунки 11–13 демонстрируют лишь принципиальные возможности, которые предоставляют тонкостенные шестизвенники для моделирования прочных развивающихся структур и механизмов [Hutchinson et al., 2003, Грачев, Найштут, 2011]. Очень интересные технические приложения возможны при уменьшении габаритов механизмов до нескольких миллиметров. Широкое использование в технике высокопрочных и технологичных материалов позволяет рассчитывать на создание прецессионных механизмов, основанных, по существу, на принципах подвижности шестизвенников Брикара и Шаца [Bricard, 1927; Schatz, 1975, Phillips, 1984]. Эти устройства могут оказаться полезными не только в традиционных инженерных приложениях, но в медицине и биотехнологиях [Bellouard, 2010; Vepa, 2010].

Авторы благодарят сотрудников Самарского государственного аэрокосмического университета В. А. Кошелева, В. Д. Фалкина и работников лаборатории «Лактест» (г. Самара) Г. И. Вайнгартена, Г. А. Макарова за большую помощь, оказанную при изготовлении сетчатых оболочек.

## Список литературы

- Bellouard Y.* Microrobotics: methods and applications. CRC Press. 2010 – 436 p.
- Bricard R.* Lecons de cinématique, vol. 2. Gauthier-Villars. – Paris. 1927.
- Hutchinson R. G., Wick N., Evans A. G., Fleck N. F., Hutchinson J. W.* Kagome plane structures for actuation // International Journal of solids and structures. 2003. 40. P. 6969–6980.
- Phillips J.* Freedom in Machinery. Vol. 2, Screw Theory Exemplified. Cambridge Univ. Press. 1984, 192 p.
- Schatz P.* Rhythmusforschung und Technik. Freiesleben. Stuttgart. 1975.
- Pat. N 4981744, B32B3/12(USA).* Non-planar expandable honeycomb structure // *M.W. Swank.* – Filed 24.04.1990. Ser. N 513761; NKI 428–16.
- Vepa R.* Dynamics of Smart Structures. John Wiley & Sons, Ltd. 2010. – 396 p.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Континуальные трансформирующиеся оболочки из прямолинейных полос. – СПб.: ТО Терция, 1995. – 38 с.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Управляемые трансформирующиеся оболочки. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1996. – 35 с.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Континуальные трансформирующиеся оболочки из тонких пластин // Компьютерные исследования и моделирование. – 2011. – Т. 3, №1. – С. 3–29.
- Карпан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. – 237 с.
- Лурье А. И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
- Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз. 1962. – 431 с.
- Патент E04C002/36 B32B003/12 (Россия).* Способ изготовления плоских и пространственных сотовых структур и конструкций на их основе // *Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Приоритет 15.06.1992. Номер публикации 2126875.