

УДК: 541.11

## Фильтрация цифровых сигналов в режиме непрерывного поступления данных

К. В. Аксенов<sup>а</sup>, В. П. Алексеев

Ярославский государственный университет,  
Россия, 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14

E-mail: <sup>а</sup> KirValAks@rambler.ru

*Получено 26 февраля 2012 г.,  
после доработки 16 февраля 2012 г.*

Статья посвящена выбору метода цифровой фильтрации сигнала при поступлении данных в режиме реального времени и использованию алгоритма фильтрации на основе быстрого вейвлет-преобразования в рамках специальной задачи.

Ключевые слова: цифровой сигнал, фильтрация, вейвлет-преобразование

### **Digital signals filtering in continuous entry data mode operation**

**K. V. Aksyonov, V. P. Alekseev**

*Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya street, Yaroslavl, 150000, Russia*

**Abstract.** – The article is dedicated to choose of method for digital signal filtering with continuous 'on-line' data entry and to use of filtration algorithm based on the fast wavelet transform for special problem.

Keywords: digital signal, filtering, wavelet transform

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 55–61 (Russian).

## Введение

Современное развитие электронно-вычислительных технологий позволяет в режиме реального времени производить оцифровку поступающих аналоговых сигналов с высокой частотой дискретизации. При этом зачастую возникает необходимость дополнительной обработки поступающего оцифрованного сигнала, такой как фильтрация сигнала в выбранном диапазоне частот с сохранением текущей фазы и амплитуды частотных составляющих сигнала. Именно такая обработка данных требуется при создании вычислительного комплекса, производящего в режиме реального времени моделирование колебаний и контроль вибрационного состояния агрегата по данным сигналов детекторов, регистрирующих вибрации отдельных элементов системы связанных масс.

Необходимость проведения цифровой фильтрации сигнала, отвечающей специальным требованиям, появляется при моделировании стохастического детерминированного процесса механических колебаний агрегата в режиме реального времени по данным сигналов, описывающих малые вибрации отдельных элементов системы и несущих информацию о колебаниях оборудования в целом. Моделирование вибрационного процесса такого сложного оборудования, как например реактор с размещенными в нем внутрикорпусными устройствами, позволит получать и наблюдать, помимо характеристик вибрации отдельных узлов системы, вибрационные характеристики оборудования в целом. Данный тип вибрационных характеристик, получаемый при помощи натурального математического моделирования на основе геометрических и массогабаритных характеристиках отдельных элементов системы связанных масс, дает информацию о таких важных вибрационных параметрах, как преимущественные направления колебаний агрегата в пространстве, их амплитуде, позволяет провести анализ степени свободы колебаний, градиента, скорости и ускорения колебаний в различных направлениях, проанализировать вынуждающие силы и их изменение во времени, а также создать математическую модель, описывающую вибрации оборудования на основе полученных характеристик, и т. п.

## Цифровые фильтры

При анализе нестационарного сигнала, когда важно определить момент изменения частотной составляющей, зачастую используются различные типы линейных фильтров, реализуемых в цифровой форме: аналоговые фильтры с бесконечной импульсной характеристикой, цифровые фильтры с бесконечной или с конечной импульсной характеристикой, характеризующиеся способами и особенностями задания передаточной характеристики, и др. [Дьяконов, Абраменоква, 2002]. При этом возникает проблема, связанная с фазовым искажением сигнала после фильтрации, способом решения которой является использование алгоритма двойной фильтрации. Суть алгоритма сводится к повторной фильтрации временного ряда сигнала, в котором порядок точек изменен на обратный (порядок точек от 1 до N меняется на от N до 1, после чего проводится повторная фильтрация тем же фильтром, затем порядок точек меняется на исходный от 1 до N). Такой метод позволяет производить фильтрацию сигнала в выбранном диапазоне частот при помощи цифровых фильтров без фазовых искажений, однако в рамках данной задачи его использование сопряжено с созданием временной задержки.

## Дискретное Фурье-преобразование

Суть Фурье-преобразования сводится к разложению временной реализации сигнала на тригонометрические составляющие путем перемножения сигнала на комплекснозначные экспоненты, т. е. на элементы бесконечно протяженного тригонометрического базиса. При этом Фурье-преобразование позволяет получить спектральные характеристики сигнала, усредненные на всем анализируемом временном интервале. Таким образом, проведение фильтрации

сигнала в выбранном диапазоне частот при помощи обратного Фурье-преобразования подходит только для стационарных колебательных процессов, частотные составляющие сигнала которых имеют вид гармонических колебаний. Оконное Фурье-преобразование и алгоритм фильтрации, организованный с его использованием, так же малоэффективен в рамках поставленной задачи анализа нестационарных сигналов.

Альтернативой линейным фильтрам являются нелинейные фильтры, использующие как и Фурье-преобразование, разложение сигнала на базисные функции, имеющие в отличие от тригонометрического базиса Фурье-преобразования конечную область определения. Такими функциями являются вейвлеты. С помощью вейвлетов можно исследовать рассматриваемый сигнал, используя смещение по-разному сжатых и сдвинутых вариантов единственной функции и в некоторых случаях дающих существенные преимущества перед линейными фильтрами. Рассмотрим вейвлет-преобразование подробнее.

## Дискретное вейвлет-преобразование

Доказано, что любую функцию можно представить в виде суперпозиции вейвлетов и существует устойчивый численный алгоритм вычисления коэффициентов при таком разложении [Дремин, Иванов, Нечитайло, 2001]. Вейвлет – ограниченная по оси значений функция, имеющая единичный интеграл и отвечающая предъявленным к ней для удобства вычислений требованиям. При дискретном вейвлет-преобразовании вейвлет заменяется рядом коэффициентов, определяемых из исходного вейвлета или в случае вейвлетов Добеши определяемых на основе предъявляемых к ним свойств.

Функцию  $f(x)$  можно рассматривать на любом  $n$ -м уровне разложения  $j_n$ . Разделение между ее усредненными значениями на этом уровне и флуктуациями вокруг них выглядит как

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{j_n,k} \phi_{j_n,k}(x) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

Коэффициенты  $s_{j_n,k}$  описывают средние значения сигнала ( $S_{0,0}$  – окончательная средняя величина сигнала). Второе слагаемое указывает на флуктуации (разности  $d$ ) во всех более мелких интервалах с большими  $j$  ( $j_n$  – уровень разложения под номером  $n$ ,  $k$  – номер интервала). При дискретном задании функции уровень разложения  $j_n = j_{max}$  соответствует самой функции при лучшем доступном разрешении и второе слагаемое обращается в ноль. Коэффициенты  $s_{j,k}$ ,  $d_{j,k}$  полностью характеризуют функцию, кроме того, ее можно точно восстановить по ним:

$$s_{j,k} = \int f(x) \phi_{j,k}(x) dx,$$

$$d_{j,k} = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx.$$

Функции  $\phi$  и  $\psi$  называются скейлинг (масштабирующей)-функцией и материнским вейвлетом (или просто вейвлетом) соответственно, или широкополосными и узкополосными фильтрами, т. к. они фильтруют компоненты сигнала на больших и малых масштабах.

Для функций  $\phi$  и  $\psi$  определено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (1)$$

и условие осцилляций, или знакопеременности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2)$$

Из соотношений, задающих связь функций  $\phi$  и  $\psi$  с их же сдвинутыми и сжатыми модификациями, взятыми (для удобства последующих вычислений) в виде двоичного изменения масштаба и целочисленных трансляций  $k$

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \phi(2x-k) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \phi(2k-1),$$

определяются вейвлет-коэффициенты:

$$h_k = \sqrt{2} \int \phi(x) \phi(2x-k) dx, \quad (3)$$

$$g_k = (-1)^k h_{2M-k-1}, \quad (4)$$

где  $M$  определяет число вейвлет-коэффициентов  $h_k$  и  $g_k$ .

Уравнения для получения вейвлетов Добеши, а точнее, получения вейвлет-коэффициентов вейвлетов Добеши определяются на основе свойства ортогональности масштабирующих функций  $\int \phi(x) \phi(x-m) dx = 0$ , откуда

$$\sum_k h_k h_{k+2m} = 0. \quad (5)$$

На основе ортогональности вейвлета полиномам до степени  $M-1$  определяющей его гладкость и знакопеременность  $\int x^n \psi(x) dx = 1, n = 0, \dots, M-1$  сводится к  $\sum_k k^n g_k = 0$  или с учетом (4):

$$\sum_k (-1)^k k^n h_k = 0. \quad (6)$$

Из условия нормировки (1)

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \quad (7)$$

Таким образом, для  $M=2$  из системы уравнений на основе (5), (6), (7):

$$\begin{cases} h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0, \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 = 0, \\ -h_1 + 2h_2 - 3h_3 = 0, \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

определяются вейвлет-коэффициенты, определяющие вейвлет Добеши  $D^4$ .

Вейвлет-преобразование имеет самый широкий круг использования [Яковлев, 2003], при этом наиболее часто используемым способом его реализации является быстрое дискретное вейвлет-преобразование (БВП). При быстром вейвлет-преобразовании используется не исходный сигнал, а предыдущий уровень коэффициентов  $d$ , при этом конкретная форма вейвлетов даже не выписывается, а используются величины коэффициентов функциональных уравнений  $h$ . Схема проведения быстрого вейвлет-преобразования приведена на рисунке 1.

Каждая шкала вейвлет-коэффициентов содержит информацию о сигнале в виде коэффициентов, которые вычисляются с помощью итерационной процедуры быстрого вейвлет-преобразования:

$$s_{j+1,k} = \sum_m h_m s_{j,2k+m}, \quad d_{j+1,k} = \sum_m g_m s_{j,2k+m},$$

где  $g_k = (-1)^k h_{2M-k-1}$  и  $s_{0,k} = \int f(x) \phi(x-k) dx \equiv f(k)$ , т. к. коэффициенты  $s_{0,k}$  представляют собой локальные средние значения исходного сигнала.

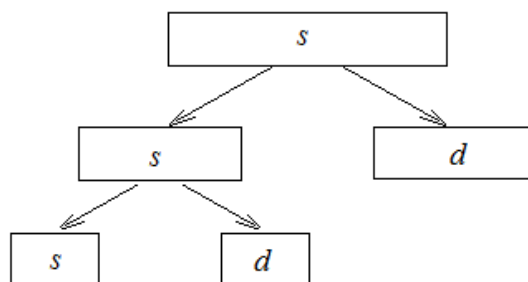


Рис. 1. Принципиальная схема проведения быстрого вейвлет-преобразования

По полученным коэффициентам  $s$  и  $d$  возможно численно восстановить исходный сигнал при помощи процедуры обратного вейвлет-преобразования.

Проводя обнуление уровней коэффициентов, соответствующих фильтруемым частотам, и проводя численное восстановление исходного сигнала при помощи процедуры обратного вейвлет-преобразования, производим фильтрацию сигнала при помощи нелинейного фильтра на основе БВП.

## Фильтрация сигнала

Рассмотрим стандартную временную реализацию оцифрованного сигнала, регистрируемого детектором вибрации, установленном на оборудовании и имеющим частоту дискретизации 100 Гц и длину 65 536 точек, то есть длительность временной реализации составляет около 11 минут. В этом сигнале во всем диапазоне частот, который может рассматриваться на основе теоремы Котельникова, то есть 0–50 Гц присутствует белый шум, и на этот белый шум в диапазоне частот 3–9 Гц наложен полезный сигнал, несущий информацию о колебательном, нестационарном процессе (колебания негармонические).

Рассматриваемый сигнал необходимо отфильтровать в диапазоне частот 3–9 Гц, в котором регистрируются колебания оборудования, при этом в полученном обработанном сигнале, характеризующем диапазон частот 3–9 Гц, должна сохраниться информация о текущей фазе и амплитуде колебаний. Кроме того, необходимо организовать фильтрацию сигнала непрерывно в режиме 'on-line' по мере поступления сигнала небольшими интервалами и не вносить искажений в полученный результат. Такие условия диктуются использованием фильтруемого сигнала в процедуре непрерывного математического моделирования колебательной системы и синхронизации получаемого сигнала с сигналами других датчиков.

Для получения передаточной характеристики фильтра заменим реальный сигнал временной реализацией, последовательно составленной из десяти отрезков, каждый из которых представляет из себя синусоиду длиной 6 553 точки с единичной амплитудой и с различной частотой колебаний от 1 до 10 Гц. На первом этапе произведем быстрое вейвлет-преобразование сигнала. На рисунке 2 представлены коэффициенты быстрого вейвлет-преобразования, проведенного при помощи вейвлета Добеши  $D^8$  ( $M=4$ ), такого сигнала с шагом по вертикальной оси амплитуд, равным 10.

На втором этапе произведем обнуление уровней декомпозиции, соответствующих фильтруемым частотам и процедуру обратного БВП. На рисунке 3 представлена передаточная характеристика нелинейного фильтра на основе БВП. При этом производилось обнуление всех уровней вейвлет-коэффициентов, кроме четвертого, в результате чего после проведения обратного БВП получается отфильтрованный в требуемом диапазоне частот сигнал. Кроме этого, для наглядности не обнулялись также четвертый и пятый уровни (на рисунке видна полоса пропускания 2–9 Гц), а также третий и четвертый уровни (полоса пропускания 3–14 Гц). Также на рисунке приведена разность фаз исходного и отфильтрованного сигнала.

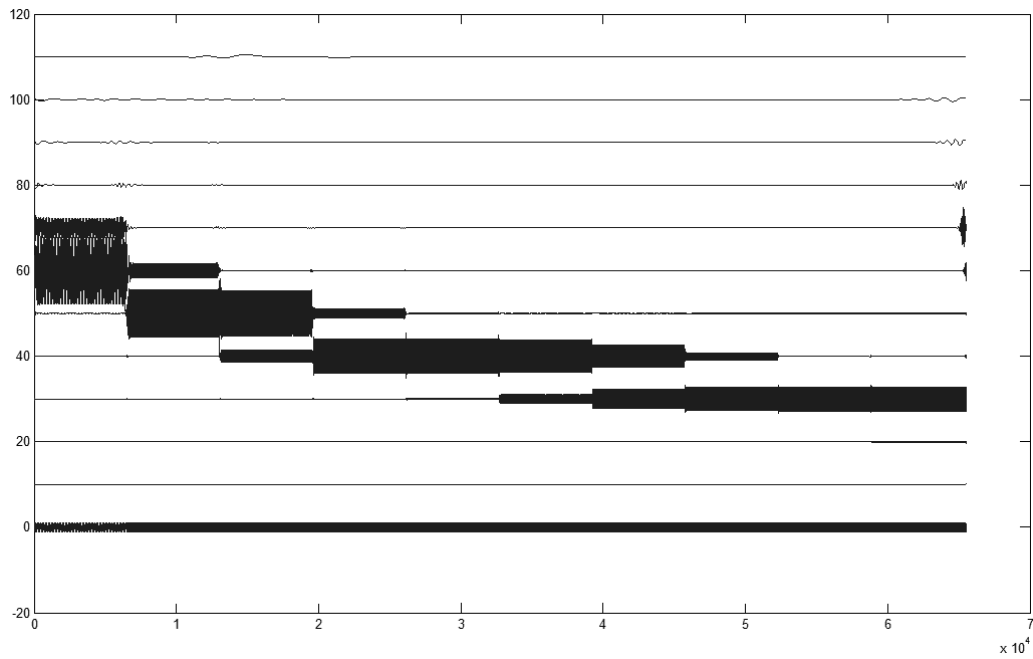


Рис. 2. Коэффициенты вейвлет-разложения  $d$ , полученные с помощью быстрого вейвлет-преобразования сигнала, составленного из синусоид с возрастающей частотой (на нулевом уровне отображен сам сигнал)

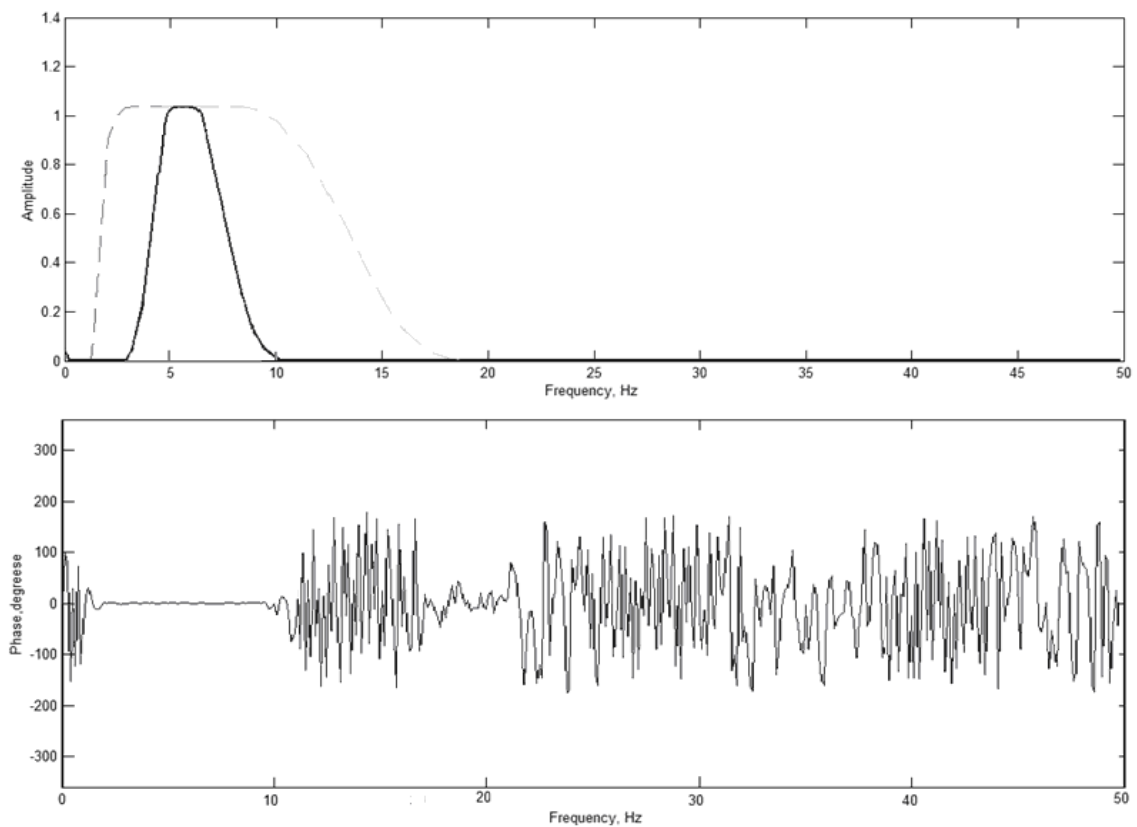


Рис. 3. Амплитудночастотная и фазочастотная характеристики нелинейного фильтра, реализуемого при помощи быстрого вейвлет-преобразования

При выборе момента проведения фильтрации временной реализации сигнала по мере поступления данных важно учитывать необходимую при расчете длину ряда данных и скорость проведения расчета. В случае применения вейвлет-фильтрации в рамках поставленной задачи вычисление проводится только до четвертого уровня декомпозиции и скорость проводимого вычисления такова, что может производиться через небольшие временные интервалы. Таким образом, разработанный алгоритм фильтрации не требует длительных вычислительных процедур и реализуется путем присоединения получаемого сигнала к обрабатываемой временной реализации в ходе моделирования колебательной системы в режиме 'on-line'.

Необходимо отметить, что в случае увеличения длины временной реализации сигнала границы частотного интервала пропускания сигнала будут более крутыми, в то время как увеличение частоты дискретизации сигнала, например в два раза, только добавит еще один высокочастотный уровень декомпозиции вейвлет-коэффициентов. Понятно, что для изменения диапазона частот пропускания фильтра, основанного на быстром дискретном вейвлет-преобразовании, необходимо изменять частоту дискретизации сигнала. При этом определить центральную частоту полосы пропускания фильтра можно путем деления частоты дискретизации надвое при переходе на каждый последующий уровень декомпозиции. Для рассматриваемого случая четвертый уровень декомпозиции будет соответствовать центральной частоте полосы пропускания полосового фильтра 6.25 Гц.

## Выводы

Проведенный анализ методов проведения фильтрации показал, что в рамках поставленной задачи наиболее рационален алгоритм, использующий проведение фильтрации на базе дискретного быстрого вейвлет-преобразования. Таким образом, проведение специальной цифровой фильтрации сигналов с целью создания программного комплекса, позволяющего проводить наблюдение дополнительных характеристик вибрационного состояния оборудования путем моделировании процесса механических колебаний и расчета дополнительных вибрационных характеристик в режиме реального времени, может быть реализовано при помощи использования быстрого вейвлет-преобразования, имеющего в рамках данной задачи ряд преимуществ перед стандартными алгоритмами фильтрации.

При выборе момента проведения фильтрации временной реализации сигнала по мере поступления данных важно учитывать необходимую при расчете длину ряда данных и скорость проведения расчета. В случае применения вейвлет-фильтрации в рамках поставленной задачи, вычисление проводится только до четвертого уровня декомпозиции и скорость проводимого вычисления такова, что может производиться через короткие временные интервалы. Таким образом, разработанный алгоритм фильтрации не требует длительных вычислительных процедур и реализуется путем присоединения получаемого сигнала к обрабатываемой временной реализации в ходе моделирования колебательной системы в режиме 'on-line'.

## Список литературы

- Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. Матлаб, обработка сигналов и изображений // Специальный справочник Санкт-Петербург: Питер, 2002. – С. 176–228.
- Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – М., Май 2001. – С. 465–476.
- Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования // Новосибирск: НГТУ, 2003. – С. 36–44.