

УДК: 517.9

## Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье

С. М. Чуйко<sup>а</sup>, О. В. Старкова<sup>б</sup>

Славянский государственный педагогический университет,  
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19

E-mail: <sup>а</sup> chujko-slav@inbox.ru, <sup>б</sup> star-o@ukr.net

Получено 25 мая 2011 г.,  
после доработки 20 февраля 2012 г.

Предложена модифицированная двухшаговая итерационная техника, построенная по схеме метода наименьших квадратов, определяющая последовательные приближения к периодическим решениям уравнения Матье и его собственным функциям, значительно превосходящие по точности ранее известные результаты.

Ключевые слова: уравнение Матье, метод наименьших квадратов, двухшаговая итерационная техника

### The modified two-sweep iteration technique for the construction of Mathieu's functions

S. M. Chuiko, O. V. Starkova

Slavyansk State Pedagogical University, 19 G.Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

**Abstract.** — The modified two-sweep iteration procedure was proposed, built according to the least-squares method scheme, which determines progressive approximations to the periodic solution of Mathieu's equation and his own function, considerably superior according to the accuracy earlier well-known results.

Keywords: Mathieu's equation, least-squares method, two-sweep iteration technique

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 31–43 (Russian).

## Постановка задачи

Предложена итерационная схема, определяющая последовательные приближения к функциям Матье, которые являются  $2\pi$ -периодическими решениями  $y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi]$ ,  $y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$  уравнения Матье [Хаяси, 1957; Гребеников, Рябов, 1979; Бойчук, Журавлев, Самойленко, 1995; Лыкова, Бойчук, 1988]

$$y'' + (h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y = 0, \quad (1)$$

а также приближения к его собственным функциям:

$$h(\varepsilon) : h(\cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad h(0) = k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Решения  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$y_0'' + k^2 y_0 = 0, \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(2\pi) = 0. \quad (2)$$

Следуя предложенной в монографии [Бойчук, Журавлев, Самойленко, 1995] схеме построения  $2\pi$ -периодического решения уравнения (1), начиная с третьей итерации приходим к появлению в приближениях к решению секулярных членов вида  $t \sin \nu t$ ,  $t \cos \nu t$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ . Традиционная [Хаяси, 1957; Каудерер, 1961] схема построения функций Матье предполагает одновременное нахождение приближений к его собственным функциям.

Нами предложена двухшаговая итерационная техника, построенная по схеме метода наименьших квадратов [Чуйко, 2008], при фиксированном  $k \in \mathbb{N}$  определяющая последовательные приближения к функции  $h(\varepsilon)$  и соответствующей функции Матье. Для нахождения начального приближения  $h_0(\varepsilon)$  к неизвестной функции  $h(\varepsilon)$  зафиксируем одно из решений  $y_0(t, k) = \cos kt$ , либо  $y_0(t, k) = \sin kt$ ,  $k \in \mathbb{N}$  порождающей задачи (2). Из условия разрешимости

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \right\} y_0(t, k) dt = 0$$

$2\pi$ -периодической задачи для нулевого приближения к уравнению (1)

$$y_0''(t, k) + (h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y_0(t, k) = 0$$

находим для  $y_0(t, k) = \cos kt$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2}, & k = 1, \\ k^2, & k > 1. \end{cases}$$

Аналогично при  $y_0(t, k) = \sin kt$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon}{2}, & k = 1, \\ k^2, & k > 1. \end{cases}$$

Пусть  $\varphi^{(1)}(t)$ ,  $\varphi^{(2)}(t)$ ,  $\varphi^{(3)}(t)$ , ... — система линейно независимых  $2\pi$ -периодических дважды непрерывно дифференцируемых скалярных функций. Обозначим  $(1 \times k_1)$ -матрицу  $\varphi_1(t) = [\varphi_1^{(1)}(t) \varphi_1^{(2)}(t) \dots \varphi_1^{(k_1)}(t)]$ . Первое приближение  $y_1(t, \varepsilon)$  к периодическому решению уравнения (1) ищем как  $2\pi$ -периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) = 0. \quad (3)$$

Приближенное решение уравнения (3) ищем в виде

$$y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon), \quad \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t)c_1(\varepsilon);$$

потребуем

$$F(c_1(\varepsilon)) = \left\| \varphi_1''(t)c_1(\varepsilon) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]\varphi_1(t)c_1(\varepsilon) + y_0''(t, k) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]y_0(t, k) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min.$$

Для фиксированной матрицы  $\varphi_1(t)$  минимум функции  $F(c_1(\varepsilon))$  существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции  $F(c_1(\varepsilon))$  приводит к уравнению

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \cdot c_1(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, k) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]y_0(t, k) \right\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора  $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$  при условии невырожденности  $(k_1 \times k_1)$ -матрицы Грама [Ахиезер, 1965]:

$$\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_0(t, \varepsilon) dt.$$

Здесь

$$\Phi_0(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_1''(t) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]\varphi_1(t) \right\}$$

—  $(1 \times k_1)$ -матрица. Таким образом, при условии  $\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \neq 0$  находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = - \left[ \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, k) + [h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]y_0(t, k) \right\} dt,$$

определяющий первое приближение

$$y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \varphi_1(t) \cdot c_1(\varepsilon)$$

к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (1) определим как

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t]y_1(t, \varepsilon) = 0. \tag{4}$$

Для нахождения первого приближения  $h_1(\varepsilon)$  к неизвестной функции  $h(\varepsilon)$  используем условие разрешимости  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (4):

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \right\} y_1(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Обозначим

$$\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_1(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) [k^2 - \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) dt.$$

При условии  $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  находим первое приближение

$$h_1(\varepsilon) = \frac{\omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

к собственной функции  $h(\varepsilon)$  уравнения Матье, соответствующее первому приближению  $y_1(t, \varepsilon)$  к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1). Обозначим  $(1 \times k_2)$ -матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[ \varphi_1^{(2)}(t) \varphi_2^{(2)}(t) \dots \varphi_{k_2}^{(2)}(t) \right].$$

Второе приближение

$$y_2(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) = \varphi_2(t) \cdot c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$$

к периодическому решению уравнения (1) ищем как  $2\pi$ -периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[ h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_2(t, \varepsilon) = 0.$$

Обозначим  $(1 \times k_2)$ -матрицу:

$$\varphi_2(t) = \left[ \varphi_2^{(1)}(t) \varphi_2^{(2)}(t) \dots \varphi_2^{(k_1)}(t) \right].$$

Необходимое условие минимизации функции

$$F(c_2(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \left\{ \varphi_2''(t) c_2(\varepsilon) + \left[ h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_2(t) c_2(\varepsilon) + y_1''(t, \varepsilon) + \left[ h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) \right\}^2 dt$$

приводит к уравнению

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \cdot c_2(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + \left[ h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора  $c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$  при условии невырожденности  $(k_2 \times k_2)$ -матрицы Грама [Ахмезер, 1965]

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_1(t, \varepsilon) dt.$$

Таким образом, при условии  $\det \Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \neq 0$  находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\left[\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon)\right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + [h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

определяющий второе приближение  $y_2(t, \varepsilon)$  к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (1) определим как

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + [h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_2(t, \varepsilon) = 0. \quad (5)$$

Для нахождения второго приближения  $h_2(\varepsilon)$  к неизвестной функции  $h(\varepsilon)$  используем условие разрешимости  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (5)

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - [h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] \right\} y_2(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Обозначим

$$\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_2(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) [k^2 - \varepsilon \cos 2t] y_2(t, \varepsilon) dt.$$

При условии  $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  находим второе приближение

$$h_2(\varepsilon) = \frac{\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

к собственной функции  $h(\varepsilon)$  уравнения Матье, соответствующее второму приближению  $y_2(t, \varepsilon)$  к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1). Продолжая рассуждения, при условии

$$\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \neq 0, \quad \Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0, \quad \dots,$$

$$\det \Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon) \neq 0, \quad \Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0, \quad \dots$$

приходим к следующей итерационной процедуре

$$y_{j+1}(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{j+1}(t, \varepsilon), \quad (6)$$

$$\xi_{j+1}(t, \varepsilon) = \varphi_{j+1}(t) \cdot c_{j+1}(\varepsilon), \quad h_{j+1}(\varepsilon) = \frac{\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)},$$

$$c_{j+1}(\varepsilon) = -\left[\Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon)\right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \left\{ y_j''(t) + [h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t] y_j(t) \right\} dt, \quad \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_j(t, \varepsilon) dt$$

—  $(k_j \times k_j)$ -матрица Грама,

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_{j+1}''(t) + \left[ h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_{j+1}(t) \right\}$$

—  $(1 \times k_j)$ -матрица,

$$\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_{j+1}(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left[ k^2 - \varepsilon \cos 2t \right] y_{j+1}(t, \varepsilon) dt$$

— скалярные функции. Итерационная процедура (6) задает последовательность отображений

$$\left( y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right) \rightarrow \left( y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right), \left( y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right) \rightarrow \left( y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon) \right),$$

определяемую оператором  $\Psi(y(t, \varepsilon), h(\varepsilon))$ :

$$\left( y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon) \right) = \Psi\left( y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Если оператор  $\Psi(y(t, \varepsilon), h(\varepsilon))$  является сжимающим, итерационная процедура (6) сходится к искомому  $2\pi$ -периодическому решению  $y(t, \varepsilon)$  уравнения (1), при этом скорость сходимости определяется выбором матрицы  $\varphi_j(t)$  и величиной малого параметра.

## Пример

В качестве иллюстрации эффективности итерационной процедуры (6) найдем приближения к функции Матье  $se_1(t, h(\varepsilon))$  и его собственной функции  $h(\varepsilon)$ , которые соответствуют порождающему решению  $y_0(t) = \cos t$  для  $k = 1$ , при этом  $h_0(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \left[ \cos 3t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \right].$$

Матрица Грама  $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$ , соответствующая решению  $y_0(t, 1) = \cos t$  порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \pi^3 \left( 84 \, 934 \, 656 + 15 \, 925 \, 248 \, \varepsilon + 1 \, 198 \, 080 \, \varepsilon^2 + 30 \, 336 \, \varepsilon^3 + \right. \\ \left. + 392 \, \varepsilon^4 + 3,5 \, \varepsilon^5 + 0,125 \, \varepsilon^6 + \dots \right) \neq 0.$$

Первое приближение к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left( -3 \cos 3t + \cos 5t \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{73\ 728} \varepsilon^3 (6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t) + \frac{1}{2\ 359\ 296} \varepsilon^4 (44 \cos 3t + 6 \cos 5t - 3 \cos 7t) + \\
 & \quad + \frac{1}{339\ 738\ 624} \varepsilon^5 (-1\ 206 \cos 3t + 189 \cos 5t - 10 \cos 7t) + \\
 & \quad + \frac{1}{32\ 614\ 907\ 904} \varepsilon^6 (12\ 690 \cos 3t - 3\ 528 \cos 5t + 229 \cos 7t) + \\
 & \quad + \frac{1}{1\ 565\ 515\ 579\ 392} \varepsilon^7 (-46\ 728 \cos 3t + 18\ 745 \cos 5t - 2\ 098 \cos 7t).
 \end{aligned}$$

определяет первое приближение к неизвестной функции  $h(\varepsilon)$  вида

$$h_1(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} - \frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 179\ 648} + \frac{67\ \varepsilon^6}{37\ 748\ 736},$$

здесь  $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$ . Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[ \cos 3t \ \cos 5t \ \cos 7t \ \cos 9t \ \cos 11t \ \cos 13t \ \cos 15t \ \cos 17t \ \cos 19t \ \cos 21t \right].$$

Второе приближение  $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$  к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$\begin{aligned}
 y_2(t, \varepsilon) = & \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 (-3 \cos 3t + \cos 5t) + \\
 & + \frac{1}{73\ 728} \varepsilon^3 (6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t) + \frac{1}{11\ 796\ 480} \varepsilon^4 (220 \cos 3t + \\
 & + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t) + \frac{1}{2\ 831\ 155\ 200} \varepsilon^5 (-7\ 350 \cos 3t + 1\ 575 \cos 5t + \\
 & + 90 \cos 7t - 24 \cos 9t + \cos 11t) + \frac{1}{951\ 268\ 147\ 200} \varepsilon^6 (86\ 625 \cos 3t - 75\ 495 \cos 5t + \\
 & + 6\ 426 \cos 7t + 210 \cos 9t - 35 \cos 11t + \cos 13t) + \\
 & + \frac{1}{426\ 168\ 129\ 945\ 600} \varepsilon^7 (7\ 808\ 640 \cos 3t + 1\ 215\ 396 \cos 5t - 417\ 088 \cos 7t + \\
 & + 19\ 600 \cos 9t + 420 \cos 11t - 48 \cos 13t + \cos 15t) + \\
 & + \frac{1}{17\ 674\ 044\ 685\ 1039\ 236\ 401} \varepsilon^9 (23\ 909\ 044\ 320 \cos 3t - 17\ 084\ 975\ 040 \cos 5t + \\
 & + 1\ 215\ 539\ 640 \cos 7t + 43\ 912\ 800 \cos 9t - 5\ 278\ 500 \cos 11t + 110\ 565 \cos 13t + \\
 & + 1\ 260 \cos 15t - 80 \cos 17t + \cos 19t) + \varepsilon^{11} \left( -\frac{\cos 3t}{221\ 494\ 310\ 486} + \frac{\cos 5t}{1\ 386\ 042\ 922\ 077} + \right. \\
 & \quad + \frac{\cos 7t}{18\ 897\ 813\ 770\ 212} - \frac{\cos 9t}{120\ 864\ 620\ 611\ 896} + \frac{\cos 11t}{4\ 778\ 357\ 920\ 324\ 647} + \\
 & \quad + \frac{\cos 13t}{287\ 806\ 335\ 927\ 056\ 754} - \frac{\cos 15t}{4\ 670\ 267\ 794\ 577\ 419\ 066} + \\
 & \quad \left. + \frac{\cos 17t}{392\ 756\ 548\ 557\ 864\ 934\ 965} \right) + \varepsilon^{12} \left( \frac{\cos 3t}{4\ 163\ 185\ 355\ 710} - \frac{\cos 5t}{7\ 168\ 129\ 136\ 407} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\cos 7t}{112\ 255\ 716\ 704\ 568} + \frac{\cos 9t}{2\ 719\ 118\ 682\ 885\ 733} - \frac{\cos 11t}{27\ 185\ 810\ 469\ 627\ 548} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos 13t}{1\ 538\ 356\ 519\ 807\ 981\ 673} + \frac{\cos 15t}{124\ 221\ 344\ 542\ 507\ 662\ 191} \Big) + \\
& + \varepsilon^{13} \left( \frac{\cos 3t}{34\ 826\ 074\ 411\ 875} + \frac{\cos 5t}{133\ 719\ 435\ 564\ 370} - \frac{\cos 7t}{577\ 455\ 475\ 386\ 849} + \right. \\
& + \frac{\cos 9t}{16\ 303\ 946\ 419\ 048\ 722} + \frac{\cos 11t}{608\ 660\ 631\ 734\ 911\ 763} - \frac{\cos 13t}{8\ 726\ 756\ 537\ 037\ 151\ 087} + \\
& + \frac{\cos 15t}{667\ 757\ 870\ 754\ 864\ 675\ 146} \Big) + \varepsilon^{14} \left( - \frac{\cos 3t}{153\ 644\ 022\ 587\ 330} + \right. \\
& + \frac{\cos 5t}{1\ 133\ 441\ 404\ 469\ 142} + \frac{\cos 7t}{10\ 716\ 858\ 169\ 308\ 095} - \\
& - \frac{\cos 9t}{83\ 548\ 123\ 492\ 477\ 362} + \frac{\cos 11t}{367\ 523\ 086\ 865\ 9653\ 039} + \\
& + \frac{\cos 13t}{194\ 656\ 335\ 464\ 434\ 256\ 497} \Big) + \varepsilon^{15} \left( \frac{\cos 3t}{2\ 402\ 102\ 230\ 796\ 824} - \right. \\
& - \frac{\cos 5t}{4\ 968\ 397\ 697\ 113\ 046} + \frac{\cos 7t}{91\ 677\ 206\ 898\ 593\ 050} + \\
& + \frac{\cos 9t}{1\ 544\ 771\ 237\ 150\ 623\ 087} + \frac{\cos 11t}{18\ 779\ 091\ 722\ 693\ 218\ 628} \Big).
\end{aligned}$$

При этом  $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
h_2(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} - \frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 179\ 648} + \frac{49\ \varepsilon^6}{37\ 748\ 736} - \\
- \frac{55\ \varepsilon^7}{1\ 207\ 959\ 552} - \frac{83\ \varepsilon^8}{9\ 059\ 696\ 640} + \frac{128\ 288\ 664\ \varepsilon^9}{81\ 824\ 280\ 949\ 555\ 195} - \\
- \frac{442\ 760\ 080\ \varepsilon^{10}}{6\ 545\ 942\ 475\ 964\ 416\ 163} + \frac{\varepsilon^{12}}{442\ 988\ 620\ 972}.
\end{aligned}$$

Для проверки точности найденного второго приближения к периодическому решению уравнения Матъе и его собственной функции найдем невязки этого приближения в самом уравнении Матъе

$$\Delta_2(\varepsilon) = \left\| y_2''(t, \varepsilon) + (h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y_2''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}$$

и сравним эти невязки с отклонениями

$$\Delta_r(\varepsilon) = \left\| y_h''(t, \varepsilon) + (h_r(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y_r''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_h(\varepsilon) = \left\| y_h''(t, \varepsilon) + (h_h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t) \cdot y_h''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

соответствующими функциям [Хаяси, 1957, с. 17], [Гребеников, Рябов, 1979, с. 235]

$$h_h(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576},$$

$$h_r(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} - \frac{11\ \varepsilon^4}{1\ 179\ 648}$$

и решению уравнения Матъе

$$y_r(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left( -3 \cos 3t + \cos 5t \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 (6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t) + \\
 & + \frac{1}{11\,796\,480} \varepsilon^4 (220 \cos 3t + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t),
 \end{aligned}$$

полученному в монографиях [Хаяси, 1957; Гребеников, Рябов, 1979; Уиттекер, Ватсон, 1963]. Второе приближение  $y_2(t, \varepsilon)$  к периодическому решению уравнения Матье  $se_1(t, h(\varepsilon))$  и его собственной функции значительно превосходят по точности ранее известные приближения:

$$\Delta_2(0, 1) \approx 2,59\,341 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_h(0, 1) \approx 3,53\,263 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_r(0, 1) \approx 3,14\,899 \cdot 10^{-10};$$

$$\Delta_2(0, 5) \approx 2,78\,286 \cdot 10^{-13}, \quad \Delta_h(0, 5) \approx 1,10\,346 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_r(0, 5) \approx 9,89\,857 \cdot 10^{-7};$$

$$\Delta_2(1, 0) \approx 2,78\,034 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_h(1, 0) \approx 3,52\,821 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta_r(1, 0) \approx 3,18\,803 \cdot 10^{-5}.$$

Далее найдем приближение к функции Матье  $se_1(t, h(\varepsilon))$  и его собственной функции  $h(\varepsilon)$ , которые соответствуют порождающему решению  $y_0(t) = \sin t$  для  $k = 1$ , при этом  $h_0(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ . Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \left[ \sin 3t \quad \sin 5t \quad \sin 7t \right].$$

Матрица Грама  $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$ , соответствующая решению  $y_0(t, k) = \sin t$  порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\begin{aligned}
 \det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \pi^3 & \left( 84\,934\,656 - 15\,925\,248 \varepsilon + 1\,198\,080 \varepsilon^2 - 30\,336 \varepsilon^3 + \right. \\
 & \left. + 392 \varepsilon^4 - 3,5 \varepsilon^5 + 0,125 \varepsilon^6 + \dots \right) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Первое приближение к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1)

$$\begin{aligned}
 y_1(t, \varepsilon) = \sin t + \frac{1}{16} \varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 (3 \sin 3t + \sin 5t) + \\
 + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 (6 \sin 3t + 8 \sin 5t + \sin 7t) + \frac{1}{2\,359\,296} \varepsilon^4 (-44 \sin 3t + 6 \sin 5t + 3 \sin 7t) + \\
 + \frac{1}{339\,738\,624} \varepsilon^5 (-1\,206 \sin 3t - 189 \sin 5t + 10 \sin 7t) + \\
 + \frac{1}{32\,614\,907\,904} \varepsilon^6 (-12\,690 \sin 3t - 3\,528 \sin 5t - 229 \sin 7t) + \\
 + \frac{1}{1\,565\,515\,579\,392} \varepsilon^7 (-46\,728 \sin 3t - 18\,745 \sin 5t - 2\,098 \sin 7t).
 \end{aligned}$$

определяет первое приближение к неизвестной функции  $h(\varepsilon)$  вида

$$h_1(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} + \frac{11 \varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{67 \varepsilon^6}{37\,748\,736} + \frac{235 \varepsilon^7}{1\,207\,959\,552},$$

здесь  $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$ . Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[ \sin 3t \quad \sin 5t \quad \sin 7t \quad \sin 9t \quad \sin 11t \quad \sin 13t \quad \sin 15t \quad \sin 17t \quad \sin 19t \quad \sin 21t \right].$$

Второе приближение  $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$  к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$\begin{aligned}
y_2(t, \varepsilon) = & \sin t + \frac{1}{16} \varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 (3 \sin 3t + \sin 5t) + \\
& + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 (6 \sin 3t + 8 \sin 5t + \sin 7t) + \frac{1}{11\,796\,480} \varepsilon^4 (-220 \sin 3t + \\
& + 30 \sin 5t + 15 \sin 7t + \sin 9t) + \frac{1}{2\,831\,155\,200} \varepsilon^5 (-7\,350 \sin 3t - 1\,575 \sin 5t + \\
& + 90 \sin 7t + 24 \sin 9t + \sin 11t) + \frac{1}{951\,268\,147\,200} \varepsilon^6 (-86\,625 \sin 3t - 75\,495 \sin 5t - \\
& - 6\,426 \sin 7t + 210 \sin 9t + 35 \sin 11t + \sin 13t) + \\
& + \frac{1}{426\,168\,129\,945\,599} \varepsilon^7 (7\,808\,640 \sin 3t - 1\,215\,396 \sin 5t - 417\,088 \sin 7t - \\
& - 19\,600 \sin 9t + 420 \sin 11t + 48 \sin 13t + \sin 15t) + \\
& + \frac{1}{81\,824\,280\,949\,555\,195} \varepsilon^8 (256\,577\,328 \sin 3t + 45\,723\,664 \sin 5t - 2\,922\,752 \sin 7t - \\
& - 551\,040 \sin 9t - 16\,560 \sin 11t + 252 \sin 13t + 21 \sin 15t) + \\
& + \frac{1}{192\,450\,708\,793\,353\,820\,407} \varepsilon^9 (26\,345\,462\,304 \sin 3t + 18\,603\,639\,488 \sin 5t + \\
& + 1\,323\,587\,608 \sin 7t - 47\,816\,160 \sin 9t - 5\,747\,700 \sin 11t - 120\,393 \sin 13t + \\
& + 1\,368 \sin 15t) + \varepsilon^{11} \left( -\frac{\sin 3t}{214\,989\,035\,628} - \frac{\sin 5t}{1\,361\,614\,710\,949} + \frac{\sin 7t}{18\,687\,840\,891\,109} + \right. \\
& + \frac{\sin 9t}{120\,864\,620\,611\,896} + \frac{\sin 11t}{4\,778\,357\,936\,802\,680} - \frac{\sin 13t}{287\,805\,286\,716\,556\,383} + \\
& + \left. \frac{\sin 15t}{4\,668\,789\,321\,617\,042\,696} \right) + \varepsilon^{12} \left( -\frac{\sin 3t}{4\,257\,026\,768\,778} - \frac{\sin 5t}{6\,958\,775\,948\,805} - \right. \\
& - \frac{\sin 7t}{11\,0318\,181\,324\,043} + \frac{\sin 9t}{2\,689\,378\,806\,293\,442} + \frac{\sin 11t}{27\,185\,810\,534\,608\,284} + \\
& + \left. \frac{\sin 13t}{1\,538\,357\,407\,774\,944\,487} - \frac{\sin 15t}{124\,428\,038\,411\,659\,803\,874} \right) + \\
& + \varepsilon^{13} \left( \frac{\sin 3t}{29\,341\,783\,122\,818} - \frac{\sin 5t}{136\,370\,563\,430\,900} - \frac{\sin 7t}{560\,650\,728\,450\,561} - \right. \\
& - \frac{\sin 9t}{16\,026\,343\,102\,716\,968} + \frac{\sin 11t}{602\,078\,785\,284\,169\,998} + \frac{\sin 13t}{8\,726\,751\,035\,739\,910\,022} - \\
& - \left. \frac{\sin 15t}{666\,860\,317\,684\,142\,057\,790} \right) + \varepsilon^{14} \left( \frac{\sin 3t}{138\,003\,850\,482\,347} - \right. \\
& - \frac{\sin 5t}{955\,466\,147\,098\,902} - \frac{\sin 7t}{10\,912\,296\,234\,493\,995} - \frac{\sin 9t}{81\,122\,800\,588\,097\,448} - \\
& - \left. \frac{\sin 11t}{3\,613\,247\,413\,839\,029\,442} + \frac{\sin 13t}{192\,568\,995\,246\,041\,079\,400} \right).
\end{aligned}$$

При этом  $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$ ,

$$h_2(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} + \frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{49\,\varepsilon^6}{37\,748\,736} +$$

$$+ \frac{55\,\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552} - \frac{83\,\varepsilon^8}{9\,059\,696\,640} - \frac{76\,\varepsilon^9}{48\,473\,849\,195} - \frac{\varepsilon^{10}}{14\,609\,780\,354} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{12}}{429\,978\,071\,256} + \frac{\varepsilon^{13}}{8\,514\,053\,537\,556} - \frac{\varepsilon^{14}}{58\,683\,566\,245\,636}.$$

Точность второго приближения  $y_2(t, \varepsilon)$  к периодическому решению уравнения Матье  $se_1(t, h(\varepsilon))$  и его собственной функции характеризуют невязки

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,50\,704 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_2(0, 5) \approx 4,04\,218 \cdot 10^{-16},$$

$$\Delta_2(1, 0) \approx 2,57\,572 \cdot 10^{-14}.$$

Найдем приближения к функции Матье  $se_3(t, h(\varepsilon))$  и его собственной функции  $h(\varepsilon)$ , которые соответствуют порождающему решению  $y_0(t, 3) = \cos 3t$  для  $k = 3$ , при этом  $h_0(\varepsilon) = 9$ . Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \left[ \cos t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \right].$$

Матрица Грама  $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$ , соответствующая решению  $y_0(t, k) = \cos 3t$  порождающей задачи (2), при этом невырождена. Первое приближение к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos 3t + \frac{1}{32}\varepsilon(-2\cos t + \cos 5t) + \frac{1}{2\,560}\varepsilon^2(10\cos t + \cos 7t) +$$

$$+ \varepsilon^3\left(-\frac{1}{8\,192}\cos t + \frac{7}{163\,840}\cos 5t\right) + \frac{1}{65\,535\,999}\varepsilon^4(-1\,000\cos t - 250\cos 5t +$$

$$+ 41\cos 7t) + \frac{1}{4\,194\,303\,999}\varepsilon^5(11\,300\cos t + 437\cos 5t - 280\cos 7t) +$$

$$+ \frac{1}{1\,677\,721\,599\,999}\varepsilon^6(-340\,000\cos t + 25\,250\cos 5t + 2\,731\cos 7t) +$$

$$+ \frac{1}{107\,374\,182\,399\,999}\varepsilon^7(416\,300\cos t - 285\,233\cos 5t + 30\,520\cos 7t).$$

определяет первое приближение к неизвестной функции  $h(\varepsilon)$  вида

$$h_1(\varepsilon) = 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13\,\varepsilon^4}{327\,680} + \frac{625\,\varepsilon^5}{65\,535\,999} - \frac{11\,737\,\varepsilon^6}{8\,388\,607\,998} + \frac{157\,375\,\varepsilon^7}{1\,677\,721\,599\,999};$$

здесь  $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$ . Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[ \cos t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \quad \cos 9t \quad \cos 11t \quad \cos 13t \quad \cos 15t \quad \cos 17t \quad \cos 19t \quad \cos 21t \right].$$

Второе приближение  $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$  к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$y_2(t, \varepsilon) = \cos 3t + \frac{1}{32}\varepsilon(-2\cos t + \cos 5t) + \frac{1}{2\,560}\varepsilon^2(10\cos t + \cos 7t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1\,474\,560} \varepsilon^3 \left( -180 \cos t + 63 \cos 5t + 4 \cos 9t \right) + \\
& + \frac{1}{165\,150\,720} \varepsilon^4 \left( -2\,520 \cos t - 630 \cos 5t + 119 \cos 7t + 2 \cos 11t \right) + \\
& + \frac{1}{26\,424\,115\,200} \varepsilon^5 \left( 64\,890 \cos t + 3\,745 \cos 5t - 1\,764 \cos 7t + 150 \cos 9t + \cos 13t \right) + \\
& + \frac{1}{114\,152\,177\,664\,000} \varepsilon^6 \left( -11\,226\,600 \cos t + 867\,510 \cos 5t + 286\,686 \cos 7t - \right. \\
& \quad \left. -61\,320 \cos 9t + 3\,105 \cos 11t + 10 \cos 15t \right) + \varepsilon^{11} \left( \frac{\cos t}{217\,250\,831\,925} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos 5t}{7\,926\,267\,486\,314} - \frac{\cos 7t}{27\,475\,728\,297\,925} + \frac{\cos 9t}{906\,670\,078\,875\,865} \right) + \\
& + \varepsilon^{12} \left( -\frac{\cos t}{3\,479\,074\,425\,161} + \frac{\cos 5t}{67\,993\,663\,370\,104} + \frac{\cos 7t}{462\,632\,235\,720\,062} \right) + \\
& + \varepsilon^{13} \left( -\frac{\cos t}{41\,231\,698\,007\,087} - \frac{\cos 5t}{275\,876\,679\,795\,012} \right) + \varepsilon^{14} \frac{\cos t}{147\,622\,725\,974\,376}.
\end{aligned}$$

При этом  $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
h_2(\varepsilon) = & 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13 \varepsilon^4}{327\,680} + \frac{5 \varepsilon^5}{524\,288} - \frac{31 \varepsilon^6}{23\,869\,675} + \\
& + \frac{\varepsilon^7}{22\,039\,036} - \frac{\varepsilon^{12}}{422\,910\,132\,492} + \frac{\varepsilon^{13}}{7\,333\,380\,532\,140} + \\
& + \frac{\varepsilon^{14}}{71\,741\,175\,855\,054} - \frac{\varepsilon^{15}}{295\,245\,451\,948\,752}.
\end{aligned}$$

Точность второго приближения  $y_2(t, \varepsilon)$  к периодическому решению уравнения Матье  $ce_3(t, h(\varepsilon))$  и его собственной функции характеризуют невязки

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,35\,563 \cdot 10^{-14}, \quad \Delta_2(0, 5) \approx 1,00\,277 \cdot 10^{-9},$$

$$\Delta_2(1, 0) \approx 1,21\,392 \cdot 10^{-7}.$$

Следует отметить актуальность изучения различных краевых задач для уравнения Матье, свидетелем чего служат публикации [Гребеников, Митропольский, Рябов, 1999; Абрамов, Курочкин, 2007; Курин, 2008], в том числе и приведенные в этих статьях обзоры литературы.

Заметим, что нами предложена итерационная техника, определяющая последовательные приближения к периодическим решениям уравнения Матье и его собственным функциям, в отличие от статей [Абрамов, Курочкин, 2007; Курин, 2008], где изучена задача Коши для уравнения Матье. Кроме того, для оценки точности найденного приближения к периодическому решению уравнения Матье и его собственной функции нами использованы невязки этого приближения в самом уравнении Матье, позволяющие сравнить точность найденных нами приближений с ранее опубликованными приближениями.

## Список литературы

- Абрамов А. А., Курочкин С. В.* Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 7. — С. 414–423.
- Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. Наука., 1965. — 408 с.
- Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
- Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А., Рябов Ю. А.* Введение в резонансную аналитическую механику. — М.: Янус, 1999. — 302 с.
- Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
- Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
- Курин А. Ф.* Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48, № 4. — С. 633–650.
- Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1988. — Т. 40, № 1. — С. 62–69.
- Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. — 515 с.
- Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. — М.: Иностран. лит., 1957. — 204 с.
- Chuiiko S.M.* On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2008. — V. 11, No. 4. — P. 585–604.
- Chuiiko S.M., Boichuk I.A.* Nonlinear Noetherian boundary-value problems in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2010. — V. 13, No. 1. — P. 128–146.