**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 1 С. 31–43**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье

С. М. Чуйко[a], О. В. Старкова[b]

Славянский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19

E-mail: [a] chujko-slav@inbox.ru, [b] star-o@ukr.net

*Получено 25 мая 2011 г.,
после доработки 20 февраля 2012 г.*

Предложена модифицированная двухшаговая итерационная техника, построенная по схеме метода наименьших квадратов, определяющая последовательные приближения к периодическим решениям уравнения Матье и его собственным функциям, значительно превосходящие по точности ранее известные результаты.

Ключевые слова: уравнение Матье, метод наименьших квадратов, двухшаговая итерационная техника

The modified two-sweep iteration technique for the constraction of Mathieu's functions

S. M. Chuiko, O. V. Starkova

Slavyansk State Pedagogical University, 19 G.Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. — The modified two-sweep iteration procedure was proposed, built according to the least-squares method scheme, which determines progressive approximations to the periodic solution of Mathieu's equation and his own function, considerably superior according to the accuracy earlier well-known results.

Keywords: Mathieu's equation, least-squares method, two-sweep iteration technique

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 31–43 (Russian).

Постановка задачи

Предложена итерационная схема, определяющая последовательные приближения к функциям Матье, которые являются 2π-периодическими решениями $y(t,\varepsilon):\ y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi],\ y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$ уравнения Матье [Хаяси, 1957; Гребеников, Рябов, 1979; Бойчук, Журавлев, Самойленко, 1995; Лыкова, Бойчук, 1988]

$$y''+\Big(h(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y=0, \tag{1}$$

а также приближения к его собственным функциям:

$$h(\varepsilon):\ h(\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],\ h(0)=k^2,\ k\in\mathbb{N}.$$

Решения 2π-периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$y_0''+k^2y_0=0,\ y_0(0)-y_0(2\pi)=0,\ y_0'(0)-y_0'(2\pi)=0. \tag{2}$$

Следуя предложенной в монографии [Бойчук, Журавлев, Самойленко, 1995] схеме построения 2π-периодического решения уравнения (1), начиная с третьей итерации приходим к появлению в приближениях к решению секулярных членов вида $t\sin\nu t,\ \ t\cos\nu t,\ \ \nu\in\mathbb{N}$. Традиционная [Хаяси, 1957; Каудерер, 1961] схема построения функций Матье предполагает одновременное нахождение приближений к его собственным функциям.

Нами предложена двухшаговая итерационная техника, построенная по схеме метода наименьших квадратов [Чуйко, 2008], при фиксированном $k\in\mathbb{N}$ определяющая последовательные приближения к функции $h(\varepsilon)$ и соответствующей функции Матье. Для нахождения начального приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ зафиксируем одно из решений $y_0(t,k)=\cos kt$, либо $y_0(t,k)=\sin kt,\ k\in\mathbb{N}$ порождающей задачи (2). Из условия разрешимости

$$\int_0^{2\pi} y_0(t,k)\Big\{k^2-\Big[h_0(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big]\Big\}y_0(t,k)\,dt=0$$

2π-периодической задачи для нулевого приближения к уравнению (1)

$$y_0''(t,k)+\Big(h_0(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y_0(t,k)=0$$

находим для $y_0(t,k)=\cos kt,\ k\in\mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon)=\begin{cases}1-\frac{\varepsilon}{2}, & k=1,\\ k^2, & k>1.\end{cases}$$

Аналогично при $y_0(t,k)=\sin kt,\ k\in\mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon)=\begin{cases}1+\frac{\varepsilon}{2}, & k=1,\\ k^2, & k>1.\end{cases}$$

Пусть $\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \varphi^{(3)}(t),\ \ldots$ — система линейно независимых 2π-периодических дважды непрерывно дифференцируемых скалярных функций. Обозначим $(1\times k_1)$-матрицу $\varphi_1(t)=\Big[\varphi_1^{(1)}(t)\ \varphi_1^{(2)}(t)\ldots\varphi_1^{(k_1)}(t)\Big]$. Первое приближение $y_1(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (1) ищем как 2π-периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2y_1(t,\varepsilon)}{dt^2}+\Big[h_0(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big]y_1(t,\varepsilon)=0. \tag{3}$$

Приближенное решение уравнения (3) ищем в виде

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t,k) + \xi_1(t,\varepsilon),\ \ \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)c_1(\varepsilon);$$

потребуем

$$F(c_1(\varepsilon)) = \Big\| \varphi_1''(t)c_1(\varepsilon) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]\varphi_1(t)c_1(\varepsilon) +$$

$$+ y_0''(t,k) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_0(t,k)\Big\|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Для фиксированной матрицы $\varphi_1(t)$ минимум функции $F(c_1(\varepsilon))$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big)\cdot c_1(\varepsilon) = -\int\limits_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon)\Big\{y_0''(t,k) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_0(t,k)\Big\}dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)$-матрицы Грама [Ахиезер, 1965]:

$$\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big) = \int\limits_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon)\cdot\Phi_0(t,\varepsilon)dt.$$

Здесь

$$\Phi_0(t,\varepsilon) = \Big\{\varphi_1''(t) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]\varphi_1(t)\Big\}$$

— $(1 \times k_1)$-матрица. Таким образом, при условии $\det\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big) \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\Big[\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big)\Big]^{-1}\cdot\int\limits_0^{2\pi} \Phi_0^*(t,\varepsilon)\Big\{y_0''(t,k) + \Big[h_0(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_0(t,k)\Big\}dt,$$

определяющий первое приближение

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t,k) + \varphi_1(t)\cdot c_1(\varepsilon)$$

к 2π-периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (1) определим как

$$\frac{d^2 y_1(t,\varepsilon)}{dt^2} + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_1(t,\varepsilon) = 0. \tag{4}$$

Для нахождения первого приближения $h_1(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ используем условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (4):

$$\int\limits_0^{2\pi} y_0(t,k)\Big\{k^2 - \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]\Big\}y_1(t,\varepsilon)\ dt = 0.$$

Обозначим

$$\Omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t,k)\cdot y_1(t,\varepsilon)\, dt,$$

$$\omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t,k)\Big[k^2 - \varepsilon\cos 2t\Big]y_1(t,\varepsilon)\, dt.$$

При условии $\Omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon)\neq 0,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ находим первое приближение

$$h_1(\varepsilon) = \frac{\omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\Omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon)}$$

к собственной функции $h(\varepsilon)$ уравнения Матье, соответствующее первому приближению $y_1(t,\varepsilon)$ к 2π-периодическому решению уравнения (1). Обозначим $(1\times k_2)$-матрицу

$$\varphi_2(t) = \Big[\varphi_1^{(2)}(t)\ \varphi_2^{(2)}(t)\ \ldots\ \varphi_{k_2}^{(2)}(t)\Big].$$

Второе приближение

$$y_2(t,\varepsilon) = y_0(t,k) + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \ \xi_2(t,\varepsilon) = \varphi_2(t)\cdot c_2(\varepsilon),\ \ c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{k_2}$$

к периодическому решению уравнения (1) ищем как 2π-периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2y_2(t,\varepsilon)}{dt^2} + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_2(t,\varepsilon) = 0.$$

Обозначим $(1\times k_2)$-матрицу:

$$\varphi_2(t) = \Big[\varphi_2^{(1)}(t)\ \ \varphi_2^{(2)}(t)\ \ldots\ \varphi_2^{(k_1)}(t)\Big].$$

Необходимое условие минимизации функции

$$F(c_2(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi}\Big\{\varphi_2''(t)c_2(\varepsilon) + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]\varphi_2(t)c_2(\varepsilon) +$$

$$+ y_1''(t,\varepsilon) + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_1(t,\varepsilon)\Big\}^2 dt$$

приводит к уравнению

$$\Gamma_1\Big(\varphi_2(\cdot),\varepsilon\Big)\cdot c_2(\varepsilon) = -\int_0^{2\pi}\Phi_1^*(t,\varepsilon)\Big\{y_1''(t,\varepsilon) + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon\cos 2t\Big]y_1(t,\varepsilon)\Big\}dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{k_2}$ при условии невырожденности $(k_2\times k_2)$-матрицы Грама [Ахиезер, 1965]

$$\Gamma_1\Big(\varphi_2(\cdot),\varepsilon\Big) = \int_0^{2\pi}\Phi_1^*(t,\varepsilon)\cdot\Phi_1(t,\varepsilon)dt.$$

Таким образом, при условии $\det \Gamma_1\Big(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\Big) \neq 0$ находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = -\Big[\Gamma_1\Big(\varphi_2(\cdot), \varepsilon\Big)\Big]^{-1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon)\Big\{y_1''(t, \varepsilon) + \Big[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big] y_1(t, \varepsilon)\Big\} dt,$$

определяющий второе приближение $y_2(t, \varepsilon)$ к 2π-периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (1) определим как

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + \Big[h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big] y_2(t, \varepsilon) = 0. \qquad (5)$$

Для нахождения второго приближения $h_2(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ используем условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (5)

$$\int\limits_0^{2\pi} y_0(t, k)\Big\{k^2 - \Big[h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big]\Big\} y_2(t, \varepsilon)\, dt = 0.$$

Обозначим

$$\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_2(t, \varepsilon)\, dt,$$

$$\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} y_0(t, k)\Big[k^2 - \varepsilon \cos 2t\Big] y_2(t, \varepsilon)\, dt.$$

При условии $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ находим второе приближение

$$h_2(\varepsilon) = \frac{\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

к собственной функции $h(\varepsilon)$ уравнения Матье, соответствующее второму приближению $y_2(t, \varepsilon)$ к 2π-периодическому решению уравнения (1). Продолжая рассуждения, при условии

$$\det \Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) \neq 0,\ \Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0,\ \ldots ,$$

$$\det \Gamma_j\Big(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon\Big) \neq 0,\ \Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0,\ \ldots$$

приходим к следующей итерационной процедуре

$$y_{j+1}(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \ \ldots \ + \xi_{j+1}(t, \varepsilon), \qquad (6)$$

$$\xi_{j+1}(t, \varepsilon) = \varphi_{j+1}(t) \cdot c_{j+1}(\varepsilon),\ h_{j+1}(\varepsilon) = \frac{\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)},$$

$$c_{j+1}(\varepsilon) = -\Big[\Gamma_j\Big(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon\Big)\Big]^{-1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon)\Big\{y_j''(t) +$$

$$+\Big[h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big] y_j(t)\Big\} dt,\ \ldots ,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Здесь

$$\Gamma_j\Big(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon\Big) = \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_j(t, \varepsilon) dt$$

— $(k_j \times k_j)$-матрица Грама,

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \Big\{\varphi''_{j+1}(t) + \Big[h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t\Big]\varphi_{j+1}(t)\Big\}$$

— $(1 \times k_j)$-матрица,

$$\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_{j+1}(t, \varepsilon)\, dt,$$

$$\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k)\Big[k^2 - \varepsilon \cos 2t\Big]y_{j+1}(t, \varepsilon)\, dt$$

— скалярные функции. Итерационная процедура (6) задает последовательность отображений

$$\Big(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)\Big) \to \Big(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)\Big),\ \Big(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)\Big) \to \Big(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)\Big),$$

определяемую оператором $\Psi\Big(y(t, \varepsilon), h(\varepsilon)\Big)$:

$$\Big(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon)\Big) = \Psi\Big(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon)\Big),\ \ j = 0, 1, 2,\ \ldots\ .$$

Если оператор $\Psi\Big(y(t, \varepsilon), h(\varepsilon)\Big)$ является сжимающим, итерационная процедура (6) сходится к искомому 2π-периодическому решению $y(t, \varepsilon)$ уравнения (1), при этом скорость сходимости определяется выбором матрицы $\varphi_j(t)$ и величиной малого параметра.

Пример

В качестве иллюстрации эффективности итерационной процедуры (6) найдем приближения к функции Матье $\mathrm{ce}_1(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции $h(\varepsilon)$, которые соответствуют порождающему решению $y_0(t) = \cos t$ для $k = 1$, при этом $h_0(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \Big[\ \cos 3t\ \ \cos 5t\ \ \cos 7t\ \Big].$$

Матрица Грама $\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big)$, соответствующая решению $y_0(t, 1) = \cos t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\det \Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\Big) = \pi^3\Big(84\,934\,656\ + 15\,925\,248\,\varepsilon + 1\,198\,080\,\varepsilon^2 + 30\,336\,\varepsilon^3 +$$

$$+392\,\varepsilon^4 + 3,5\,\varepsilon^5 + 0,125\,\varepsilon^6 + \ \ldots\ \Big) \neq 0.$$

Первое приближение к 2π-периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16}\,\varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768}\,\varepsilon^2\Big(-3 \cos 3t + \cos 5t\Big) +$$

$$+\frac{1}{73\ 728}\ \varepsilon^3\Big(6\cos 3t-8\cos 5t+\cos 7t\Big)+\frac{1}{2\ 359\ 296}\ \varepsilon^4\Big(44\cos 3t+6\cos 5t-3\cos 7t\Big)+$$
$$+\frac{1}{339\ 738\ 624}\ \varepsilon^5\Big(-1\ 206\cos 3t+189\cos 5t-10\cos 7t\Big)+$$
$$+\frac{1}{32\ 614\ 907\ 904}\ \varepsilon^6\Big(12\ 690\cos 3t-3\ 528\cos 5t+229\cos 7t\Big)+$$
$$+\frac{1}{1\ 565\ 515\ 579\ 392}\ \varepsilon^7\Big(-46\ 728\cos 3t+18\ 745\cos 5t-2\ 098\cos 7t\Big).$$

определяет первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ вида

$$h_1(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}+\frac{\varepsilon^4}{24\ 576}-\frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 179\ 648}+\frac{67\ \varepsilon^6}{37\ 748\ 736},$$

здесь $\Omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon)=\pi$. Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t)=\Big[\cos 3t\ \ \cos 5t\ \ \cos 7t\ \ \cos 9t\ \ \cos 11t\ \ \cos 13t\ \ \cos 15t\ \ \cos 17t\ \ \cos 19t\ \ \cos 21t\Big].$$

Второе приближение $y_2(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)+\xi_2(t,\varepsilon)$ к 2π-периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$y_2(t,\varepsilon)=\cos t+\frac{1}{16}\ \varepsilon\cos 3t+\frac{1}{768}\ \varepsilon^2\Big(-3\cos 3t+\cos 5t\Big)+$$
$$+\frac{1}{73\ 728}\ \varepsilon^3\Big(6\cos 3t-8\cos 5t+\cos 7t\Big)+\frac{1}{11\ 796\ 480}\ \varepsilon^4\Big(220\cos 3t+$$
$$+30\cos 5t-15\cos 7t+\cos 9t\Big)+\frac{1}{2\ 831\ 155\ 200}\ \varepsilon^5\Big(-7\ 350\cos 3t+1\ 575\cos 5t+$$
$$+90\cos 7t-24\cos 9t+\cos 11t\Big)+\frac{1}{951\ 268\ 147\ 200}\ \varepsilon^6\Big(86\ 625\cos 3t-75\ 495\cos 5t+$$
$$+6\ 426\cos 7t+210\cos 9t-35\cos 11t+\cos 13t\Big)+$$
$$+\frac{1}{426\ 168\ 129\ 945\ 600}\ \varepsilon^7\Big(7\ 808\ 640\cos 3t+1\ 215\ 396\cos 5t-417\ 088\cos 7t+$$
$$+19\ 600\cos 9t+420\cos 11t-48\cos 13t+\cos 15t\Big)+$$
$$+\frac{1}{17\ 674\ 044\ 685\ 1039\ 236\ 401}\ \varepsilon^9\Big(23\ 909\ 044\ 320\cos 3t-17\ 084\ 975\ 040\cos 5t+$$
$$+1\ 215\ 539\ 640\cos 7t+43\ 912\ 800\cos 9t-5\ 278\ 500\cos 11t+110\ 565\cos 13t+$$
$$+1\ 260\cos 15t-80\cos 17t+\cos 19t\Big)+\varepsilon^{11}\Big(-\frac{\cos 3t}{221\ 494\ 310\ 486}+\frac{\cos 5t}{1\ 386\ 042\ 922\ 077}+$$
$$+\frac{\cos 7t}{18\ 897\ 813\ 770\ 212}-\frac{\cos 9t}{120\ 864\ 620\ 611\ 896}+\frac{\cos 11t}{4\ 778\ 357\ 920\ 324\ 647}+$$
$$+\frac{\cos 13t}{287\ 806\ 335\ 927\ 056\ 754}-\frac{\cos 15t}{4\ 670\ 267\ 794\ 577\ 419\ 066}+$$
$$+\frac{\cos 17t}{392\ 756\ 548\ 557\ 864\ 934\ 965}\Big)+\varepsilon^{12}\Big(\frac{\cos 3t}{4\ 163\ 185\ 355\ 710}-\frac{\cos 5t}{7\ 168\ 129\ 136\ 407}+$$
$$+\frac{\cos 7t}{112\ 255\ 716\ 704\ 568}+\frac{\cos 9t}{2\ 719\ 118\ 682\ 885\ 733}-\frac{\cos 11t}{27\ 185\ 810\ 469\ 627\ 548}+$$

$$+\frac{\cos 13t}{1\,538\,356\,519\,807\,981\,673}+\frac{\cos 15t}{124\,221\,344\,542\,507\,662\,191}\Big)+$$
$$+\varepsilon^{13}\Big(\frac{\cos 3t}{34\,826\,074\,411\,875}+\frac{\cos 5t}{133\,719\,435\,564\,370}-\frac{\cos 7t}{577\,455\,475\,386\,849}+$$
$$+\frac{\cos 9t}{16\,303\,946\,419\,048\,722}+\frac{\cos 11t}{608\,660\,631\,734\,911\,763}-\frac{\cos 13t}{8\,726\,756\,537\,037\,151\,087}+$$
$$+\frac{\cos 15t}{667\,757\,870\,754\,864\,675\,146}\Big)+\varepsilon^{14}\Big(-\frac{\cos 3t}{153\,644\,022\,587\,330}+$$
$$+\frac{\cos 5t}{1\,133\,441\,404\,469\,142}+\frac{\cos 7t}{10\,716\,858\,169\,308\,095}-$$
$$-\frac{\cos 9t}{83\,548\,123\,492\,477\,362}+\frac{\cos 11t}{367\,523\,086\,865\,9653\,039}+$$
$$+\frac{\cos 13t}{194\,656\,335\,464\,434\,256\,497}\Big)+\varepsilon^{15}\Big(\frac{\cos 3t}{2\,402\,102\,230\,796\,824}-$$
$$-\frac{\cos 5t}{4\,968\,397\,697\,113\,046}+\frac{\cos 7t}{91\,677\,206\,898\,593\,050}+$$
$$+\frac{\cos 9t}{1\,544\,771\,237\,150\,623\,087}+\frac{\cos 11t}{18\,779\,091\,722\,693\,218\,628}\Big).$$

При этом $\Omega(y_2(t,\varepsilon),\varepsilon)=\pi\neq 0$,

$$h_2(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\,576}-\frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648}+\frac{49\,\varepsilon^6}{37\,748\,736}-$$
$$-\frac{55\,\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552}-\frac{83\,\varepsilon^8}{9\,059\,696\,640}+\frac{128\,288\,664\,\varepsilon^9}{81\,824\,280\,949\,555\,195}-$$
$$-\frac{442\,760\,080\,\varepsilon^{10}}{6\,545\,942\,475\,964\,416\,163}+\frac{\varepsilon^{12}}{442\,988\,620\,972}.$$

Для проверки точности найденного второго приближения к периодическому решению уравнения Матье и его собственной функции найдем невязки этого приближения в самом уравнении Матье

$$\Delta_2(\varepsilon)=\Big\|y_2''(t,\varepsilon)+\Big(h_2(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y_2''(t,\varepsilon)\Big\|_{C[0;2\pi]}$$

и сравним эти невязки с отклонениями

$$\Delta_r(\varepsilon)=\Big\|y_h''(t,\varepsilon)+\Big(h_r(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y_r''(t,\varepsilon)\Big\|_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_h(\varepsilon)=\Big\|y_h''(t,\varepsilon)+\Big(h_h(\varepsilon)+\varepsilon\cos 2t\Big)\cdot y_h''(t,\varepsilon)\Big\|_{C[0;2\pi]},$$

соответствующими функциям [Хаяси, 1957, с. 17], [Гребеников, Рябов, 1979, с. 235]

$$h_h(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\,576},$$

$$h_r(\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{32}+\frac{\varepsilon^3}{512}-\frac{\varepsilon^4}{24\,576}-\frac{11\,\varepsilon^4}{1\,179\,648}$$

и решению уравнения Матье

$$y_r(t,\varepsilon)=\cos t+\frac{1}{16}\,\varepsilon\cos 3t+\frac{1}{768}\,\varepsilon^2\Big(-3\cos 3t+\cos 5t\Big)+$$

$$+\frac{1}{73\ 728}\ \varepsilon^3\Big(6\cos 3t - 8\cos 5t + \cos 7t\Big)+$$

$$+\frac{1}{11\ 796\ 480}\ \varepsilon^4\Big(220\cos 3t + 30\cos 5t - 15\cos 7t + \cos 9t\Big),$$

полученному в монографиях [Хаяси, 1957; Гребеников, Рябов, 1979; Уиттекер, Ватсон, 1963]. Второе приближение $y_2(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Матье $\mathrm{ce}_1(t,h(\varepsilon))$ и его собственной функции значительно превосходят по точности ранее известные приближения:

$$\Delta_2(0,1) \approx 2,59\ 341\cdot 10^{-16},\ \Delta_h(0,1) \approx 3,53\ 263\cdot 10^{-10},\ \Delta_r(0,1) \approx 3,14\ 899\cdot 10^{-10};$$

$$\Delta_2(0,5) \approx 2,78\ 286\cdot 10^{-13},\ \Delta_h(0,5) \approx 1,10\ 346\cdot 10^{-6},\ \Delta_r(0,5) \approx 9,89\ 857\cdot 10^{-7};$$

$$\Delta_2(1,0) \approx 2,78\ 034\cdot 10^{-10},\ \Delta_h(1,0) \approx 3,52\ 821\cdot 10^{-5},\ \Delta_r(1,0) \approx 3,18\ 803\cdot 10^{-5}.$$

Далее найдем приближение к функции Матье $\mathrm{se}_1(t,h(\varepsilon))$ и его собственной функции $h(\varepsilon)$, которые соответствуют порождающему решению $y_0(t) = \sin t$ для $k = 1$, при этом $h_0(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \Big[\ \sin 3t\ \ \sin 5t\ \ \sin 7t\ \Big].$$

Матрица Грама $\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big)$, соответствующая решению $y_0(t,k) = \sin t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\det\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big) = \pi^3\Big(84\ 934\ 656 - 15\ 925\ 248\ \varepsilon + 1\ 198\ 080\ \varepsilon^2 - 30\ 336\ \varepsilon^3 +$$

$$+392\ \varepsilon^4 - 3,5\ \varepsilon^5 + 0,125\ \varepsilon^6 +\ \ldots\ \Big) \neq 0.$$

Первое приближение к 2π-периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t,\varepsilon) = \sin t + \frac{1}{16}\ \varepsilon\sin 3t + \frac{1}{768}\ \varepsilon^2\Big(3\sin 3t + \sin 5t\Big)+$$

$$+\frac{1}{73\ 728}\ \varepsilon^3\Big(6\sin 3t + 8\sin 5t + \sin 7t\Big) + \frac{1}{2\ 359\ 296}\ \varepsilon^4\Big(-44\sin 3t + 6\sin 5t + 3\sin 7t\Big)+$$

$$+\frac{1}{339\ 738\ 624}\ \varepsilon^5\Big(-1\ 206\sin 3t - 189\sin 5t + 10\sin 7t\Big)+$$

$$+\frac{1}{32\ 614\ 907\ 904}\ \varepsilon^6\Big(-12\ 690\sin 3t - 3\ 528\sin 5t - 229\sin 7t\Big)+$$

$$+\frac{1}{1\ 565\ 515\ 579\ 392}\ \varepsilon^7\Big(-46\ 728\sin 3t - 18\ 745\sin 5t - 2\ 098\sin 7t\Big).$$

определяет первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ вида

$$h_1(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} + \frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 179\ 648} + \frac{67\ \varepsilon^6}{37\ 748\ 736} + \frac{235\ \varepsilon^7}{1\ 207\ 959\ 552},$$

здесь $\Omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon) = \pi$. Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \Big[\ \sin 3t\ \ \sin 5t\ \ \sin 7t\ \ \sin 9t\ \ \sin 11t\ \ \sin 13t\ \ \sin 15t\ \ \sin 17t\ \ \sin 19t\ \ \sin 21t\ \Big].$$

Второе приближение $y_2(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ к 2π-периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$
\begin{gathered}
y_2(t,\varepsilon) = \sin t + \frac{1}{16}\,\varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768}\,\varepsilon^2\Big(3\sin 3t + \sin 5t\Big)+\\
+\frac{1}{73\ 728}\,\varepsilon^3\Big(6\sin 3t + 8\sin 5t + \sin 7t\Big) + \frac{1}{11\ 796\ 480}\,\varepsilon^4\Big(-220\sin 3t+\\
+30\sin 5t + 15\sin 7t + \sin 9t\Big) + \frac{1}{2\ 831\ 155\ 200}\,\varepsilon^5\Big(-7\ 350\sin 3t - 1\ 575\sin 5t+\\
+90\sin 7t + 24\sin 9t + \sin 11t\Big) + \frac{1}{951\ 268\ 147\ 200}\,\varepsilon^6\Big(-86\ 625\sin 3t - 75\ 495\sin 5t-\\
-6\ 426\sin 7t + 210\sin 9t + 35\sin 11t + \sin 13t\Big)+\\
+\frac{1}{426\ 168\ 129\ 945\ 599}\,\varepsilon^7\Big(7\ 808\ 640\sin 3t - 1\ 215\ 396\sin 5t - 417\ 088\sin 7t-\\
-19\ 600\sin 9t + 420\sin 11t + 48\sin 13t + \sin 15t\Big)+\\
+\frac{1}{81\ 824\ 280\ 949\ 555\ 195}\,\varepsilon^8\Big(256\ 577\ 328\sin 3t + 45\ 723\ 664\sin 5t - 2\ 922\ 752\sin 7t-\\
-551\ 040\sin 9t - 16\ 560\sin 11t + 252\sin 13t + 21\sin 15t\Big)+\\
+\frac{1}{192\ 450\ 708\ 793\ 353\ 820\ 407}\,\varepsilon^9\Big(26\ 345\ 462\ 304\sin 3t + 18\ 603\ 639\ 488\sin 5t+\\
+1\ 323\ 587\ 608\sin 7t - 47\ 816\ 160\sin 9t - 5\ 747\ 700\sin 11t - 120\ 393\sin 13t+\\
+1\ 368\sin 15t\Big) + \varepsilon^{11}\Big(-\frac{\sin 3t}{214\ 989\ 035\ 628} - \frac{\sin 5t}{1\ 361\ 614\ 710\ 949} + \frac{\sin 7t}{18\ 687\ 840\ 891\ 109}+\\
+\frac{\sin 9t}{120\ 864\ 620\ 611\ 896} + \frac{\sin 11t}{4\ 778\ 357\ 936\ 802\ 680} - \frac{\sin 13t}{287\ 805\ 286\ 716\ 556\ 383}+\\
+\frac{\sin 15t}{4\ 668\ 789\ 321\ 617\ 042\ 696}\Big) + \varepsilon^{12}\Big(-\frac{\sin 3t}{4\ 257\ 026\ 768\ 778} - \frac{\sin 5t}{6\ 958\ 775\ 948\ 805}-\\
-\frac{\sin 7t}{11\ 0318\ 181\ 324\ 043} + \frac{\sin 9t}{2\ 689\ 378\ 806\ 293\ 442} + \frac{\sin 11t}{27\ 185\ 810\ 534\ 608\ 284}+\\
+\frac{\sin 13t}{1\ 538\ 357\ 407\ 774\ 944\ 487} - \frac{\sin 15t}{124\ 428\ 038\ 411\ 659\ 803\ 874}\Big)+\\
+\varepsilon^{13}\Big(\frac{\sin 3t}{29\ 341\ 783\ 122\ 818} - \frac{\sin 5t}{136\ 370\ 563\ 430\ 900} - \frac{\sin 7t}{560\ 650\ 728\ 450\ 561}-\\
-\frac{\sin 9t}{16\ 026\ 343\ 102\ 716\ 968} + \frac{\sin 11t}{602\ 078\ 785\ 284\ 169\ 998} + \frac{\sin 13t}{8\ 726\ 751\ 035\ 739\ 910\ 022}-\\
-\frac{\sin 15t}{666\ 860\ 317\ 684\ 142\ 057\ 790}\Big) + \varepsilon^{14}\Big(\frac{\sin 3t}{138\ 003\ 850\ 482\ 347}-\\
-\frac{\sin 5t}{955\ 466\ 147\ 098\ 902} - \frac{\sin 7t}{10\ 912\ 296\ 234\ 493\ 995} - \frac{\sin 9t}{81\ 122\ 800\ 588\ 097\ 448}-\\
-\frac{\sin 11t}{3\ 613\ 247\ 413\ 839\ 029\ 442} + \frac{\sin 13t}{192\ 568\ 995\ 246\ 041\ 079\ 400}\Big).
\end{gathered}
$$

При этом $\Omega(y_2(t,\varepsilon),\varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$h_2(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} + \frac{11\ \varepsilon^5}{1\ 179\ 648} + \frac{49\ \varepsilon^6}{37\ 748\ 736} +$$
$$+ \frac{55\ \varepsilon^7}{1\ 207\ 959\ 552} - \frac{83\ \varepsilon^8}{9\ 059\ 696\ 640} - \frac{76\ \varepsilon^9}{48\ 473\ 849\ 195} - \frac{\varepsilon^{10}}{14\ 609\ 780\ 354} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^{12}}{429\ 978\ 071\ 256} + \frac{\varepsilon^{13}}{8\ 514\ 053\ 537\ 556} - \frac{\varepsilon^{14}}{58\ 683\ 566\ 245\ 636}.$$

Точность второго приближения $y_2(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Матье $\mathrm{se}_1(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции характеризуют невязки

$$\Delta_2(0,1) \approx 1{,}50\ 704 \cdot 10^{-16},\ \Delta_2(0,5) \approx 4{,}04\ 218 \cdot 10^{-16},$$
$$\Delta_2(1,0) \approx 2{,}57\ 572 \cdot 10^{-14}\ .$$

Найдем приближения к функции Матье $\mathrm{ce}_3(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции $h(\varepsilon)$, которые соответствуют порождающему решению $y_0(t,3) = \cos 3t$ для $k = 3$, при этом $h_0(\varepsilon) = 9$. Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \Big[\cos t\ \ \cos 5t\ \ \cos 7t\Big].$$

Матрица Грама $\Gamma_0\Big(\varphi_1(\cdot),\varepsilon\Big)$, соответствующая решению $y_0(t,k) = \cos 3t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена. Первое приближение к 2π-периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t,\varepsilon) = \cos 3t + \frac{1}{32}\varepsilon\Big(-2\cos t + \cos 5t\Big) + \frac{1}{2\ 560}\varepsilon^2\Big(10\cos t + \cos 7t\Big) +$$
$$+\varepsilon^3\Big(-\frac{1}{8\ 192}\cos t + \frac{7}{163\ 840}\cos 5t\Big) + \frac{1}{65\ 535\ 999}\varepsilon^4\Big(-1\ 000\cos t - 250\cos 5t +$$
$$+41\cos 7t\Big) + \frac{1}{4\ 194\ 303\ 999}\varepsilon^5\Big(11\ 300\cos t + 437\cos 5t - 280\cos 7t\Big) +$$
$$+\frac{1}{1\ 677\ 721\ 599\ 999}\varepsilon^6\Big(-340\ 000\cos t + 25\ 250\cos 5t + 2\ 731\cos 7t\Big) +$$
$$+\frac{1}{107\ 374\ 182\ 399\ 999}\varepsilon^7\Big(416\ 300\cos t - 285\ 233\cos 5t + 30\ 520\cos 7t\Big).$$

определяет первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ вида

$$h_1(\varepsilon) = 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13\ \varepsilon^4}{327\ 680} + \frac{625\ \varepsilon^5}{65\ 535\ 999} - \frac{11\ 737\ \varepsilon^6}{8\ 388\ 607\ 998} + \frac{157\ 375\ \varepsilon^7}{1\ 677\ 721\ 599\ 999};$$

здесь $\Omega(y_1(t,\varepsilon),\varepsilon) = \pi$. Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \Big[\cos t\ \ \cos 5t\ \ \cos 7t\ \ \cos 9t\ \ \cos 11t\ \ \cos 13t\ \ \cos 15t\ \ \cos 17t\ \ \cos 19t\ \ \cos 21t\Big].$$

Второе приближение $y_2(t,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon)$ к 2π-периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$y_2(t,\varepsilon) = \cos 3t + \frac{1}{32}\ \varepsilon\Big(-2\cos t + \cos 5t\Big) + \frac{1}{2\ 560}\ \varepsilon^2\Big(10\cos t + \cos 7t\Big) +$$

$$+\frac{1}{1\ 474\ 560}\ \varepsilon^3\Big(-180\cos t+63\cos 5t+4\cos 9t\Big)+$$

$$+\frac{1}{165\ 150\ 720}\ \varepsilon^4\Big(-2\ 520\cos t-630\cos 5t+119\cos 7t+2\cos 11t\Big)+$$

$$+\frac{1}{26\ 424\ 115\ 200}\ \varepsilon^5\Big(64\ 890\cos t+3\ 745\cos 5t-1\ 764\cos 7t+150\cos 9t+\cos 13t\Big)+$$

$$+\frac{1}{114\ 152\ 177\ 664\ 000}\ \varepsilon^6\Big(-11\ 226\ 600\cos t+867\ 510\cos 5t+286\ 686\cos 7t-$$

$$-61\ 320\cos 9t+3\ 105\cos 11t+10\cos 15t\Big)+\varepsilon^{11}\Big(\frac{\cos t}{217\ 250\ 831\ 925}+$$

$$+\frac{\cos 5t}{7\ 926\ 267\ 486\ 314}-\frac{\cos 7t}{27\ 475\ 728\ 297\ 925}+\frac{\cos 9t}{906\ 670\ 078\ 875\ 865}\Big)+$$

$$+\varepsilon^{12}\Big(-\frac{\cos t}{3\ 479\ 074\ 425\ 161}+\frac{\cos 5t}{67\ 993\ 663\ 370\ 104}+\frac{\cos 7t}{462\ 632\ 235\ 720\ 062}\Big)+$$

$$+\varepsilon^{13}\Big(-\frac{\cos t}{41\ 231\ 698\ 007\ 087}-\frac{\cos 5t}{275\ 876\ 679\ 795\ 012}\Big)+\varepsilon^{14}\frac{\cos t}{147\ 622\ 725\ 974\ 376}.$$

При этом $\Omega(y_2(t,\varepsilon),\varepsilon)=\pi\neq 0$,

$$h_2(\varepsilon)=9+\frac{\varepsilon^2}{64}-\frac{\varepsilon^3}{512}+\frac{13\ \varepsilon^4}{327\ 680}+\frac{5\ \varepsilon^5}{524\ 288}-\frac{31\ \varepsilon^6}{23\ 869\ 675}+$$

$$+\frac{\varepsilon^7}{22\ 039\ 036}-\frac{\varepsilon^{12}}{422\ 910\ 132\ 492}+\frac{\varepsilon^{13}}{7\ 333\ 380\ 532\ 140}+$$

$$+\frac{\varepsilon^{14}}{71\ 741\ 175\ 855\ 054}-\frac{\varepsilon^{15}}{295\ 245\ 451\ 948\ 752}.$$

Точность второго приближения $y_2(t,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Матье $\mathrm{ce}_3(t,h(\varepsilon))$ и его собственной функции характеризуют невязки

$$\Delta_2(0,1)\approx 1,35\ 563\cdot 10^{-14},\ \Delta_2(0,5)\approx 1,00\ 277\cdot 10^{-9},$$

$$\Delta_2(1,0)\approx 1,21\ 392\cdot 10^{-7}\ .$$

Следует отметить актуальность изучения различных краевых задач для уравнения Матье, свидетельством чего служат публикации [Гребеников, Митропольский, Рябов, 1999; Абрамов, Курочкин, 2007; Курин, 2008], в том числе и приведенные в этих статьях обзоры литературы.

Заметим, что нами предложена итерационная техника, определяющая последовательные приближения к периодическим решениям уравнения Матье и его собственным функциям, в отличие от статей [Абрамов, Курочкин, 2007; Курин, 2008], где изучена задача Коши для уравнения Матье. Кроме того, для оценки точности найденного приближения к периодическому решению уравнения Матье и его собственной функции нами использованы невязки этого приближения в самом уравнении Матье, позволяющие сравнить точность найденных нами приближений с ранее опубликованными приближениями.

Список литературы

Абрамов А. А., Курочкин С. В. Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 7. — С. 414–423.

Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации.— М. Наука., 1965. — 408 с.

Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А., Рябов Ю. А. Введение в резонансную аналитическую механику. — М.: Янус, 1999. — 302 с.

Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.

Курин А. Ф. Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48, № 4. — С. 633–650.

Лыкова О. Б., Бойчук А. А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1988. — Т. 40, № 1. — С. 62—69.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. — 515 с.

Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. — М.: Иностр. лит., 1957. — 204 с.

Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2008. — V. 11, No. 4. — P. 585–604.

Chuiko S.M., Boichuk I.A. Nonlinear Noetherian boundary-value problems in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2010. — V. 13, No. 1. — P. 128–146.