**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2012 Т. 4 № 1 С. 5−29**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.6

Сравнение двух семейств метода простой итерации

П. Н. Сорокин[1,a], Н. Н. Ченцова[2]

[1] Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36, корп. 1
[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание

E-mail: [a] s_p_n_1974@bk.ru

*Получено 26 мая 2011 г.,
после доработки 21 февраля 2012 г.*

Изучается сходимость к решению линейной системы, заданной вещественной квадратной матрицей A с вещественными собственными значениями обязательно разных знаков и вектором-столбцом $b \in R^k$, двухпараметрического и симметризованного однопараметрического семейств метода простой итерации, построенных по этим A и b. Доказано, что если матрица A симметричная, то коэффициент оптимального сжатия для оптимального двухпараметрического семейства строго меньше, чем коэффициент оптимального сжатия для оптимального симметризованного однопараметрического семейства метода простой итерации.

Ключевые слова: метод простой итерации, симметричная матрица

Two families of the simple iteration method, in comparison

P. N. Sorokin[1], N. N. Chentsova[2]

[1] Scientific-Research Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences (NIISI RAN), Nakhimovskii av. 36-1, Moscow, 117218, Russia
[2] Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU, Glavnoe Zdanie, GSP-1, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

Abstract. – Convergence to the solution of the linear system with real quadrate non singular matrix A with real necessary different sign eigen values of two families of simple iteration method: two-parametric and symmetrized one-parametric generated by these A and b is considered. Also these methods are compared when matrix A is a symmetric one. In this case it is proved that the coefficient of the optimal compression of two-parametric family is strongly less than the coefficient of the optimal compression of symmetrized one-parametric family of the simple iteration method.

Keywords: simple iteration method, symmetric matrix

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 5–29 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00625)

Изучаются итерационные методы решения системы линейных уравнений, а, именно, метод простой итерации и его модификации.

Оглавление

§ 1. Каноническая форма системы линейных уравнений. Теоремы о существовании и единственности решения. Алгоритмы вычисления решения.
§ 2. Особенности хранения вещественных чисел на ЭВМ. Теорема об оценке близости двух решений двух близких линейных систем. Лемма С. Банаха об обратной матрице.
§ 3. Собственные значения квадратной матрицы. Теорема о жордановой нормальной форме квадратной матрицы. Круги Гершгорина.
§ 4. Метод простой итерации для решения системы линейных уравнений, записанной в специальной форме. Условия сходимости.
§ 5. Однопараметрическое, симметризованное однопараметрическое и двухпараметрическое семейства метода простой итерации. Необходимые и достаточные условия сходимости.
§ 6. Оптимальная скорость сходимости в ℓ^2-норме, когда спектр состоит из строго положительного и строго отрицательного отрезков. Теорема о сравнении по скорости.
Приложение 1
§ 7. Используемые множества чисел и символов.
§ 8. Функции, используемые для кодировки чисел.
§ 9. Вектора-столбцы и матрицы.
§ 10. Детерминант квадратной матрицы.
§ 11. Произведения, степени и линейные комбинации матриц.
§ 12. Собственные значения квадратной матрицы. Жорданова нормальная форма матрицы. Круги Гершгорина.
§ 13. Скалярное произведение, нормы и число обусловленности.
§ 14. Используемые подмножества кольца $M_k(F)$.
Приложение 2.
§ 15. Вычисление на ЭВМ двух семейств метода простой итерации. Априорные и апостериорные оценки для нормы невязки.

§ 1. Каноническая форма системы линейных уравнений. Теоремы о существовании и единственности решения. Алгоритмы вычисления решения

Определение 1. Пусть F – поле, $F = C$ или $F = R$. Пусть $k \in N^+$, матрица $A \in M_k(F)$ задана своими элементами $(A)_{ij} \in F$ при всех $i, j = \overline{1, k}$, векторы-столбцы $x, b \in F^k$ заданы своими координатами $(x)_i, (b)_i \in F$ при всех $i = \overline{1, k}$.

1.1. Будем говорить, что система линейных уравнений

$$A \cdot x = b \qquad (1)$$

задана в канонической форме.

1.2. Система линейных уравнений (1) состоит из k уравнений

$$\sum_{1 \le j \le k} (A)_{ij} \cdot (x)_j = (b)_i, \ \forall i = \overline{1, k}.$$

1.3. Вектор-столбец $\hat{x} \in F^k$ называется решением системы линейных уравнений (1), если после подстановки $x = \hat{x}$ все ее k уравнений обращаются в тождества.

Теорема 1. *Пусть* F *– поле,* $F = C$ *или* $F = R$. *Пусть число* $k \in N^{+}$ *и матрица* $A \in M_k(F)$ *является невырожденной. Тогда система линейных уравнений* (1) *для любого вектора-столбца* $b \in F^k$ *имеет единственное решение – вектор-столбец* $\hat{x} \in F^k$. *Более того, матрица* A *является обратимой и при всех* $i = \overline{1, k}$ i*-й столбец матрицы* A^{-1} *является решением системы линейных уравнений* (1) *с правой частью* $b = e_i$, *где* $(e_i)_j = \delta_{ij}$ *при всех* $j = \overline{1, k}$, δ_{ij} *– символ Кронекера. Зная матрицу* A^{-1}, *можно вычислить решение системы* (1):

$$\hat{x} = A^{-1} \cdot b .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведено в [Курош, 1971].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Решение системы линейных уравнений (1) можно вычислить по формулам Крамера[1]

$$(\hat{x})_i = \det(A_i) / \det(A) ,$$

где матрица $A_i \in M_k(F)$ отличается от матрицы A только i-ым столбцом, в котором записан вектор-столбец правой части b, т. е.

$$(A_i)_{\ell m} = (A)_{\ell m}, \quad \forall \ell = \overline{1, k}, \quad \forall m = \overline{1, k} \setminus \{i\},$$

$$(A_i)_{\ell i} = (b)_{\ell}, \quad \forall \ell = \overline{1, k} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В настоящее время, формулы Крамера очень часто используются при $k = 2$. При $k > 2$, даже в курсе алгебры, эти формулы используются крайне редко, так как для вычисления определителя матрицы размера k необходимо просуммировать $k!$ чисел, возможно разных знаков. Число $k!$, согласно формуле Стирлинга, полученной Дж. Стирлингом (J. Stirling) в 1730 году, представляется как

$$k! = \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot \exp(-k + \theta(k)) , \ |\theta(k)| < \ 1/(12 \cdot k)$$

и асимптотически стремится к $\sqrt{2\pi k} \cdot k^k$ при $k \to +\infty$, поэтому растет очень быстро.

При вычислениях на ЭВМ значения $\det(A)$ ошибки округления суммируются, и в результате работы программы может получиться число, намного отличающееся от истинного значения, что во многом объясняется потерей значимых цифр в мантиссе при вычитании близких машинно-представимых чисел (чем числа ближе, тем больше потери значимых цифр). Поэтому формулы Крамера при вычислениях на ЭВМ не используются.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В курсе линейной алгебры для нахождения решения системы линейных уравнений предлагается метод (Гаусса) последовательного исключения неизвестных, который был впервые описан К.Гауссом[2]. Нами установлено, что возможен рост абсолютных значений элементов матрицы A под действием исключений метода Гаусса, что приводит к росту абсолютных значений погрешностей представления элементов матрицы A на ЭВМ.

---

[1] Г. Крамер опубликовал свои замечательные формулы в 1750 году [Intr. a l'Analyse des Lignes Courbes algebriques (Geneva,1750), 657–659].

[2] К. Гаусс опубликовал свой замечательный метод в 1849 году [Beitrage zur theore de algebraischen Gleichungen Gott,1849].

§ 2. Особенности хранения вещественных чисел на ЭВМ. Теорема об оценке близости двух решений двух близких линейных систем. Лемма С. Банаха об обратной матрице

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. При записи в память ЭВМ элемента x числового поля F большая часть информации теряется хотя бы потому, что мощность поля F – континуум, а мощность его подмножества (множества) машинно-представимых чисел конечна, то есть как правило, возникает ошибка округления от представления на ЭВМ числа x:

$$\mathrm{Err}_{Nb}(x) = |\, x - \mathrm{c}_{Nb}(x)\,|\,.$$

При выполнении на ЭВМ арифметических операций с двумя машиннопредставимыми числами могут возникнуть ошибки округления. Например, можно прибавить к единице машиннопредставимое число, а в результате получить ту же единицу. Такое максимальное машиннопредставимое число f_{ZR}, когда значение вещественной переменной $z = 1 + f_{ZR}$ равно единице, называется машинным нулем по сложению. Двоичный порядок этого числа f_{ZR} можно оценить через двоичный порядок числа $\hat{f}_{ZR}$: присвоим $\hat{f}_{ZR}$ значение 1 и будем делить последовательно $\hat{f}_{ZR}$ пополам, пока значение вещественной переменной $z = 1 + \hat{f}_{ZR}$ не станет равно единице. Например, для компьютера HP Pavilion dv6, на котором проводились численные эксперименты, значение $\hat{f}_{ZR} = 1{,}11023 \cdot 10^{-16}$. Если переменную z не вводить, а просто $1 + \hat{f}_{ZR}$ сравнивать с единицей, то получим $\hat{f}_{ZR} = 5{,}421011 \cdot 10^{-20}$. Различие последних значений объясняется тем, что для суммирования используется больше разрядов, чем сохраняется, и лишь затем производится округление.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Для поиска на ЭВМ решения системы линейных уравнений, например по методу Гаусса, прежде всего необходимо ввести значения матричных элементов матрицы $A \in M_k(F)$ и вектора-столбца $b \in F^k$. На этом этапе могут возникнуть ошибки округления, если исходная матрица $A \in M_k(R)$ не состоит из машинно-представимых чисел. Значения абсолютной и относительной погрешностей решения $\hat{x} = \hat{x}_2$ исходной системы (1) оцениваются сверху через значения абсолютной и относительной погрешностей матрицы $A = A_2$ и вектора-столбца $b = b_2$. Эти оценки приведены в теореме 2. Доказательства теоремы 2 и леммы 2.1 приведены в [Богачев, 1999].

Теорема 2. *Пусть F – поле, $F = C$ или $F = R$. Пусть $k \in N^+$, и матрица $A_1 \in M_k(F)$ является обратимой. Пусть матрица $A_2 \in M_k(F)$ и близка к матрице A_1 по некоторой норме пространства $M_k(F)$, порожденной нормой пространства F^k, а именно, выполнено условие*

$$\| A_2 - A_1 \| < \| A_1^{-1} \|^{-1}\,.$$

Тогда матрица A_2 также является обратимой, и существует матрица $A_2^{-1} \in M_k(F)$ обратная к ней. Кроме того,

$$\| A_2^{-1} \| < w(A_1, A_2) \cdot \| A_1^{-1} \|,$$

где число $w = w(A_1, A_2) \in R^+$ определяется формулой

$$w(A_1, A_2) = 1/(\,1 - \| A_1^{-1} \| \cdot \| A_2 - A_1 \|)\,.$$

Пусть $\hat{x}_i \in F^k$ *– решение системы линейных уравнений* (1) *с матрицей линейной системы* $A = A_i \in M_k(F)$ *и вектором-столбцом* $b = b_i \in F^k$ *для всех* $i \in \{1,2\}$. *Тогда для всех* $i \in \{1,2\}$ *решение* $\hat{x}_i \in F^k$ *существует и единственно при любом векторе-столбце* $b_i \in F^k$, *а именно,* $\hat{x}_i = A_i^{-1} \cdot b_i$, *более того, в исходной норме имеют место оценки близости* $\hat{x}_1$ *и* $\hat{x}_2$*:*

$$\| \hat{x}_2 - \hat{x}_1 \| \le w(A_1, A_2) \cdot \| A_1^{-1} \| \cdot (\| A_2 - A_1 \| \cdot \| \hat{x}_1 \| + \| b_2 - b_1 \|),$$

$$\| \hat{x}_2 - \hat{x}_1 \| / \| \hat{x}_1 \| \le \nu(A_1) \cdot w(A_1, A_2) \cdot (\| A_2 - A_1 \| / \| A_1 \| + \| b_2 - b_1 \| / \| b_1 \|),$$

где $\nu(A_1) = \| A_1 \| \cdot \| A_1^{-1} \|$ *– число обусловленности матрицы* $A_1 \in M_k(F)$.

Лемма 2.1 (Лемма С. Банаха). *Пусть* F *– поле,* $F = C$ *или* $F = R$. *Пусть* $k \in N^+$ *и* $B \in M_k(F)$, *с* $\| B \| < 1$ *по норме пространства* $M_k(F)$, *согласованной с нормой пространства* F^k, *т.е. удовлетворяющей условию*

$$\| B \cdot x \| \le \| B \| \cdot \| x \|, \forall x \in F.$$

Тогда матрица $E - B$ *обратима и* $\| (E - B)^{-1} \| \le 1/(1 - \| B \|)$.

§ 3. Собственные значения квадратной матрицы. Теорема о жордановой нормальной форме квадратной матрицы

Теорема 3. *Пусть* F *– поле,* $F = C$ *или* $F = R$. *Пусть* $k \in N^+$ *и матрица* $A \in M_k(F)$. *Тогда матрица* A *имеет ровно* k *собственных значений* $\lambda_i(A) \in C$, $i = \overline{1, k}$, *возможно равных друг другу. Из последовательности* $L(A)$ *этих* $\lambda_i(A)$, $i = \overline{1, k}$, *выберем подпоследовательность* $\hat{L}(A)$ *максимально возможной длины* $m(A)$, *где* $1 \le m(A) \le k$. *Каждый элемент* $\hat{L}(A)$ *отличен от всех остальных. Пусть* $k_j(A)$ *– число* $\lambda_i(A) \in C$, $i = \overline{1, k}$ *равных* $\lambda_j(A) \in \hat{L}(A)$. *Тогда* $k_j(A)$ *называется алгебраической кратностью* $\lambda_j(A) \in \hat{L}(A)$, $j = \overline{1, m(A)}$. *Тогда каждому* $\lambda_j(A) \in \hat{L}(A)$ *соответствует хотя бы один собственный вектор-столбец* $u_j(A)$ *при всех* $j = \overline{1, m(A)}$. *Пусть* $g_j(A)$ *– число линейно независимых собственных векторов-столбцов* $u_{i(j)}(A)$, *отвечающих собственному значению* $\lambda_j(A) \in \hat{L}(A)$ *при всех* $j = \overline{1, m(A)}$. *Тогда* $g_j(A)$, $1 \le g_j(A) \le k_j(A)$ *называется геометрической кратностью собственного значения* $\lambda_j(A) \in \hat{L}(A)$ *при всех* $j = \overline{1, m(A)}$. *Жорданова нормальная форма*[3] $\Lambda(A)$ *матрицы* A *является диагональной матрицей тогда и только тогда, когда* $g_j(A) = k_j(A)$ *при всех* $j = \overline{1, m(A)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теорема 3 является одним из вариантов теоремы о жордановой нормальной форме матрицы, чье доказательство приведено в [Гельфанд, 1998].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Поиск всех собственных значений матрицы A в вычислительной математике состоит не в вычислении коэффициентов характеристического многочлена $P_k(A, \lambda)$

---

[3] Жорданову нормальную форму для матрицы ввел К. Жордан в 1870 году [C. Jordan, Traite des substitutions des equations algebriques – P., 1870, pp. 114–125].

и его корней, а в построении последовательности матриц, сходящихся к диагональной матрице, на диагонали которой стоят собственные значения.

Для оценки границ спектра матрицы A можно использовать теорему Гершгорина, доказательство которой приведено, например, в [Богачев, 1999].

Теорема 4 (теорема Гершгорина). *Пусть F – поле, $F=C$ или $F=R$. Пусть $k\in N^+$ и матрица $A\in M_k(F)$. Тогда i-ое собственное значение $\lambda_i(A)$ матрицы A для всех $i=\overline{1,k}$ лежит на комплексной плоскости C в i-ом круге Гершгорина $\hat{K}_i(A)$ с центром в точке $\hat{c}_i(A)$ и радиусом равным $\hat{r}_i(A)$, т. е.*

$$\hat{c}_i(A)=(A)_{ii},\, \hat{r}_i(A)=\sum_{1\le j\le k,\, j\ne i} |(A)_{ij}|,\, \lambda_i(A)\in \hat{K}_i(A)=\{z\in C: |z-\hat{c}_i(A)|\le \hat{r}_i(A)\}.$$

§ 4. Метод простой итерации для решения системы линейных уравнений, записанной в специальной форме. Условия сходимости

Теорема 5. *Пусть F – поле, $F=C$ или $F=R$. Пусть $k\in N^+$ и матрица $B\in M_k(F)$.*

5.1. Тогда система линейных уравнений, записанная в специальной форме

$$x=B\cdot x+c\,, \tag{2}$$

эквивалентна системе линейных уравнений, записанной в канонической форме (1) для $A=E-B,\ b=c$. Решение системы линейных уравнений в канонической форме (1) является решением системы линейных уравнений в специальной форме (2) и наоборот.

5.2. Пусть, более того, $1\notin\sigma(B)$, то есть $\det(B-E)\ne 0$, тогда система линейных уравнений в специальной форме (2) имеет единственное решение – вектор-столбец $\hat{x}\in F^k$.

Определение 2. Пусть F – поле, $F=C$ или $F=R$. Пусть $k\in N^+$ и матрица $B\in M_k(F)$. Говорят, что последовательность векторов-столбцов $x^n\in F^k$ построена по методу простой итерации, если начальный элемент последовательности, вектор-столбец $x^0\in F^k$, задается перед началом вычислений (т. е. $x^0\in F^k$ является входным параметром для метода простой итерации и называется начальным приближением), а каждый новый элемент последовательности – вектор-столбец $x^{n+1}\in F^k$ вычисляется через предыдущий к нему элемент $x^n\in F^k$ по формуле

$$x^{n+1}=B\cdot x^n+c,\ \ \forall n\in N\,. \tag{3}$$

Теорема 6. *Пусть F – поле, $F=C$ или $F=R$. Пусть $k\in N^+$, матрица $B\in M_k(F)$, вектор-столбец $x^0\in F^k$. Пусть последовательность* (3) *векторов-столбцов $x^n\in F^k$ для начального приближения x^0 сходится при $n\to+\infty$ к конечному пределу – вектору-столбцу $x^*=x^*(x^0)\in F^k$.*

6.1. Тогда x^* является решением системы линейных уравнений (2).

6.2. Пусть, более того, $1\notin\sigma(B)$, тогда решение системы линейных уравнений (2), равное $\hat{x}\in F^k$, существующее и единственное по теореме 1, совпадает с вектором-столбцом $x^*=x^*(x^0)\in F^k$ – пределом последовательности (3).

6.3. Пусть X^0 – множество всех начальных приближений $x^0 \in F^k$, при которых последовательность (3) сходится к конечному пределу $x^* = x^*(x^0) \in F^k$ и $1 \notin \sigma(B)$. Тогда $\hat{x} \in F^k$ – решение системы линейных уравнений (2) единственно (по 6.2) и равно значению предела $x^* = x^*(x^0) \in F^k$ последовательности (3) для всех $x^0 \in X^0$.

Теорема 7. *Пусть F – поле, $F = C$ или $F = R$. Пусть $k \in N^+$, матрица $B \in M_k(F)$, начальное приближение $x^0 \in F^k$, и пусть вектор-столбец $\hat{x} \in F^k$ – решение системы линейных уравнений* (2)*. Тогда для последовательности векторов-столбцов $x^n \in F^k$, построенной по методу простой итерации* (3) *с начальным приближением x^0, справедливы формулы:*

$$x^{n+1} - x^n = B^n \cdot (x^1 - x^0),\ x^{n+1} = B^{n+1} \cdot x^0 + (\sum_{0 \le j \le n} B^j) \cdot c,\ \forall n \in N, \tag{4}$$

$$x^n - \hat{x} = B^n \cdot (x^0 - \hat{x}),\ \forall n \in N, \tag{5}$$

$$x^n - B \cdot x^n - c = B^n \cdot (x^0 - B \cdot x^0 - c),\ \forall n \in N, \tag{6}$$

где B^j – j-ая степень матрицы B, $\forall j \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используется метод математической индукции.

Теорема 8. *Пусть F – поле, $F = C$ или $F = R$. Пусть $k \in N^+$, матрица $B \in M_k(F)$. Последовательность метода простой итерации, построенная по формулам* (3)*, сходится при любом начальном приближении $x^0 \in F^k$ тогда и только тогда, когда все k собственных значений $\lambda_j(B) \in C$ матрицы B удовлетворяют условиям*

$$|\lambda_j(B)| < 1,\ \forall j = \overline{1, k}. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведено в [Бахвалов и др., 1987].

§ 5. Однопараметрическое, симметризованное однопараметрическое и двухпараметрическое семейства метода простой итерации. Необходимые и достаточные условия сходимости

Определение 3. Пусть $k \in N^+$ и пусть матрицы $A, A' \in M_k(R)$, $b \in R^k$ – вектор-столбец, A' – матрица, транспонированная к матрице A, вектор-столбец $x^0 \in R^k$.

3.1. Однопараметрическим семейством метода простой итерации с параметром $\gamma \in R$, $\gamma \ne 0$ называется семейство последовательностей векторов-столбцов $x^n \in R^k$, построенных по начальному приближению x^0, определенных по формуле

$$x^{n+1} = x^n + \gamma \cdot (A \cdot x^n - b),\ \forall n \in N. \tag{8}$$

3.2. Симметризованным однопараметрическим семейством метода простой итерации с параметром $\delta \in R$, $\delta \ne 0$ называется семейство последовательностей векторов-столбцов $x^n \in R^k$, построенных по начальному приближению x^0, определенных по формуле

$$x^{n+1} = x^n + \delta \cdot (A' \cdot A \cdot x^n - A' \cdot b),\ \forall n \in N. \tag{9}$$

3.3. Двухпараметрическим семейством метода простой итерации с параметрами $\alpha, \beta \in R,\ \beta \neq 0$, называется семейство последовательностей векторов-столбцов $x^n \in R^k$, построенных по начальному приближению x^0, определенных по формуле

$$x^{n+1} = x^n + \alpha \cdot (A \cdot x^n - b) + \beta \cdot A \cdot (A \cdot x^n - b), \forall n \in N . \qquad (10)$$

Теорема 9. *Пусть* $k \in N^+$ *и матрица* $A \in M_k(R)$ *не вырождена,* A' *– матрица, транспонированная к матрице* A. *Тогда:*

9.1. Матрица $A' \in M_k(R)$ не вырождена.

9.2. Матрица $A' \cdot A \in M_k(R)$ не вырождена, симметрична и положительно определена.

9.3. Все k собственных значений $\lambda_j(A' \cdot A)$ матрицы $A' \cdot A$ являются вещественными положительными числами, т.е. существуют такие числа $m(A' \cdot A), M(A' \cdot A) \in R^+$, что отрезок $W_2(A' \cdot A) = [m(A' \cdot A), M(A' \cdot A)]$ содержит все собственные значения матрицы $A' \cdot A$, т.е.

$$0 < m(A' \cdot A) \le \lambda_j(A' \cdot A) \le M(A' \cdot A) < +\infty, \forall j = \overline{1, k} . \qquad (11)$$

9.4. Для $M(A' \cdot A)$ можно выбрать следующую оценку через центры и радиусы кругов Гершгорина (см. приложение 1.7) для матрицы $A' \cdot A$:

$$M(A' \cdot A) = \max_{1 \le i \le k} \{\hat{c}_i (A' \cdot A) + \hat{r}_i (A' \cdot A)\} . \qquad (12)$$

9.5. Если A – симметрическая матрица, то можно использовать для $M(A' \cdot A)$ оценку через центры и радиусы кругов Гершгорина (см. приложение 1.7) для матрицы A:

$$M(A' \cdot A) = \max_{1 \le i \le k} \{\max\{(\hat{c}_i (A) + \hat{r}_i (A))^2, (\hat{c}_i (A) - \hat{r}_i (A))^2\}\} . \qquad (13)$$

9.6. Можно выбрать все k собственных векторов $u_j(A' \cdot A)$ матрицы $A' \cdot A$ так, чтобы они принадлежали R^k и образовывали базис в R^k. Каждый вектор этого базиса будет ортогонален другому вектору базиса.

9.7. ℓ^2-норма матрицы $A' \cdot A$ равна максимальному собственному значению матрицы $A' \cdot A$:

$$\| A' \cdot A \|_2 = \max_{1 \le j \le k} \lambda_j (A' \cdot A) . \qquad (14)$$

Теорема 10. *Пусть* $k \in N^+$, *матрицы* $A, A', E \in M_k(R)$, A' *– матрица, транспонированная к матрице* A, E *– единичная матрица. Пусть число* $\lambda_j(A) \in C$, $\forall j = \overline{1, k}$ *является собственным значением матрицы* A, *соответствующим собственному вектору* $u_j(A) \in C^k$ *матрицы* A. *Тогда:*

10.1. Однопараметрическое семейство метода простой итерации с параметром $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$ является методом простой итерации (3) с

$$B = E + \gamma \cdot A, c = -\gamma \cdot b . \qquad (15)$$

Кроме того, для собственных значений и собственных векторов матрицы B справедливо

$$\lambda_j(B) = 1 + \gamma \cdot \lambda_j(A),\ \lambda_j(B) \in C,\ \forall j = \overline{1, k} , \qquad (16)$$

$$u_j(B) = u_j(A),\ u_j(B) \in C^k .$$

Более того, если $\lambda_j(A) \in R$, то и $\lambda_j(B) \in R$, и $\exists\, u_j(B) \in R^k$.

10.2. Симметризованное однопараметрическое семейство метода простой итерации с параметром $\delta \in R, \delta \neq 0$ является методом простой итерации (11) с

$$B = E + \delta \cdot A' \cdot A,\ c = -\delta \cdot A' \cdot b\,. \tag{17}$$

Матрица B является симметричной матрицей. Кроме того, для собственных значений и собственных векторов матрицы B справедливо

$$\lambda_j(B) = 1 + \delta \cdot \lambda_j(A'A), \lambda_j(B) \in R,\ \forall j = \overline{1, k}\,, \tag{18}$$

$$u_j(B) = u_j(A'A), \exists\ u_j(B) \in R^k\,.$$

ℓ^2 -норма матрицы B равна максимальному по модулю собственному значению матрицы B:

$$\| B \|_2 = \| E + \gamma \cdot A'{\cdot}A \|_2 = \max_{1 \le j \le k} |1 + \gamma \cdot \lambda_j(A'{\cdot}A)|\,. \tag{19}$$

10.3. Двухпараметрическое семейство метода простой итерации с параметрами $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ является методом простой итерации (3) с

$$B = E + \alpha \cdot A + \beta{\cdot} A^2,\ c = -(\alpha \cdot E + \beta{\cdot} A) \cdot b\,. \tag{20}$$

Кроме того, для собственных значений и собственных векторов матрицы B справедливо

$$\lambda_j(B) = 1 + \alpha \cdot \lambda_j(A) + \beta{\cdot} \lambda_j^2(A),\ \lambda_j(B) \in C,\ \forall j = \overline{1, k}\,, \tag{21}$$

$$u_j(B) = u_j(A),\ u_j(B) \in C^k\,.$$

Более того, если $\lambda_j(A) \in R$, то и $\lambda_j(B) \in R$, и $\exists\, u_j(B) \in R^k$.

Теорема 11. *Пусть $k \in N^+$, матрицы $A, A' \in M_k(R)$, A' – матрица, транспонированная к матрице A, вектор-столбец $x^0 \in R^k$.*

Пусть при $n \to +\infty$ последовательность $x^n \in R^k$, построенная по методу простой итерации (3) *с начальным приближением $x^0 \in R^k$, сходится к пределу – вектору-столбцу $x^* \in R^k$:*

$$x^* = \lim_{n \to +\infty} x^n\,,$$

где матрица B задается формулой:

11.1. (15) с фиксированным значением параметра $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$.

11.2. (17) с фиксированным значением параметра $\delta \in R$, $\delta \neq 0$.

11.3. (20) с фиксированными значениями параметров $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$,

$$-\alpha / \beta \notin \sigma(A)\,,$$

где $\sigma(A)$ – спектр матрицы A. Тогда вектор-столбец $x^* \in R^k$ является решением системы линейных уравнений (1).

Определение 4. Пусть $k \in N^+$ и матрица $A \in M_k(R)$. Матрица A удовлетворяет условию $(W(A))$, если все ее собственные значения $\lambda_j(A), \forall j = \overline{1, k}$ вещественны и принадлежат множеству $W(A)$, которое является объединением двух отрезков $W_1(A) \subset R^-$ и $W_2(A) \subset R^+$:

$$W(A) = W_1(A) \bigcup W_2(A),\ W_1(A) = [-t(A), -s(A)], W_2(A) = [m(A), M(A)].$$

Причем в каждом отрезке W_i, $i \in \{1,2\}$ лежит хотя бы одно собственное значение матрицы A. Перенумеруем собственные значения $\lambda_j(A)$ матрицы A в порядке возрастания

$$\lambda_j(A) \le \lambda_i(A), \quad \forall i, j = \overline{1, k} : j \le i ,$$

и пусть натуральное число j_0 – номер минимального собственного значения матрицы A, принадлежащего отрезку $W_2(A)$. Условие $W(A)$ в этой нумерации эквивалентно условию

$$\exists\, j_0 = \overline{2, k} : \lambda_{j_0 -1} < 0 < \lambda_{j_0} . \tag{22}$$

Если условие (22) выполнено и все собственные значения матрицы A нам известны, то за концы отрезков $W_1(A)$ и $W_2(A)$ можно выбрать

$$-t(A) = \lambda_1(A), -s(A) = \lambda_{j_0-1}(A), m(A) = \lambda_{j_0}(A), M(A) = \lambda_k(A).$$

Теорема 11′. *Пусть* $t,s,m,M \in R^+$ *такие, что*

$$-\infty < -t \le -s < 0 < m \le M < +\infty , \tag{23}$$

и пусть множество W *является объединением двух отрезков* $W_1 \subset R^+$ *и* $W_2 \subset R^+$*:*

$$W_1 = [-t,-s],\ W_2 = [m,M],\ W = W_1 \bigcup W_2 , \tag{24}$$

а множество $K(W)$ *состоит из концов отрезков* W_1 *и* W_2*:*

$$K(W) = \{-t,-s,m,M\} . \tag{25}$$

Пусть фиксированные числа $\alpha,\beta \in R$ *,* $\beta \ne 0$*, удовлетворяют неравенствам*

$$-2 / (M \cdot t) < \beta < 0 , \tag{26}$$

$$\max\{-2/M - \beta\cdot M, \beta\cdot s\} < \alpha < \min\{-2/t + \beta\cdot t, -\beta\cdot m\} . \tag{27}$$

Тогда справедливо:

11′.1. При этих значениях α и β функция

$$P_2(\alpha,\beta,\lambda) = 1 + \alpha\cdot\lambda + \beta\cdot\lambda^2 \tag{28}$$

как функция одной вещественной переменной λ имеет своим графиком параболу с ветвями, направленными вниз и с λ-координатой вершины параболы, равной

$$\lambda_{top} = -\alpha/(2\cdot\beta) . \tag{29}$$

11′.2. Функция $P_2(\alpha,\beta,\lambda_{top})$ при $\lambda<\lambda_{top}$ монотонно возрастает, при $\lambda>\lambda_{top}$ монотонно убывает, при $\lambda=\lambda_{top}$ достигает максимальное значение

$$P_2(\alpha,\beta,\lambda_{top}) = 1 - \alpha^2/(4\cdot\beta) > 1 , \tag{30}$$

$$\sup_{\lambda\in R} P_2(\alpha,\beta,\lambda) = P_2(\alpha,\beta,\lambda_{top}) . \tag{31}$$

11′.3. $\lambda_{top} \notin W$. Более того,

$$-s < \lambda_{top} < m . \tag{32}$$

11′.4.

$$\sup_{\lambda\in W} | P_2(\alpha,\beta,\lambda) | = \max_{\mu\in K(W)} | P_2(\alpha,\beta,\mu) | . \tag{33}$$

Теорема 12. *Пусть* $k \in N^{+}$ *и матрицы* $A, A' \in M_k(R)$, A' *– матрица, транспонированная к матрице* A, *вектор-столбец* $x^0 \in R^k$. *Матрица* A *удовлетворяет условию* $(W(A))$. *Тогда:*

12.1. $\forall \gamma \in R$, $\gamma \neq 0$ однопараметрический метод простой итерации (8) расходится для некоторого начального приближения $x^0 \in R^k$.

12.2.1. Для всех $\delta \in R$, удовлетворяющих условию:

$$-2/M(A' \cdot A) < \delta < 0, \tag{34}$$

симметризованный однопараметрический метод простой итерации (9) сходится для всех начальных приближений $x^0 \in R^k$, где $M(A' \cdot A)$ – верхняя граница собственных значений матрицы $A' \cdot A$. Для выбора параметра δ можно использовать оценку $M(A' \cdot A)$ через центры и радиусы кругов Гершгорина для матрицы $A' \cdot A$, приведенную в формуле (12).

12.2.2. Пусть симметризованный однопараметрический метод простой итерации (9) сходится для всех начальных приближений $x^0 \in R^k$. Тогда параметр $\delta \in R$ должен удовлетворять неравенству

$$-2/m(A' \cdot A) < \delta < 0.$$

12.3.1. Пусть, более того, зафиксированы $\forall \alpha, \beta \in R$, $-\alpha/\beta \notin \sigma(A)$, так, что для них выполнены неравенства

$$-2/(M(A) \cdot t(A)) < \beta < 0, \tag{35}$$

$$\max\left\{\frac{-2}{M(A)} - \beta \cdot M(A), \beta \cdot s(A)\right\} < \alpha < \min\left\{\frac{2}{t(A)} + \beta \cdot t(A), -\beta \cdot m(A)\right\}. \tag{36}$$

Тогда двухпараметрический метод простой итерации (10) сходится для всех начальных приближений $x^0 \in R^k$.

12.3.2. Пусть, более того, $-\alpha/\beta \notin \sigma(A)$ и двухпараметрический метод простой итерации (10) сходится. Тогда параметры $\alpha, \beta \in R$ должны удовлетворять неравенствам

$$-2/(m(A) \cdot s(A)) < \beta < 0, \tag{37}$$

$$\max\left\{\frac{-2}{m(A)} - \beta \cdot m(A), \beta \cdot t(A)\right\} < \alpha < \min\left\{\frac{2}{s(A)} + \beta \cdot s(A), -\beta \cdot M(A)\right\}. \tag{38}$$

§ 6. Оптимальная скорость сходимости в ℓ^2-норме, когда спектр состоит из строго положительного и строго отрицательного отрезков. Теорема о сравнении по скорости

Теорема 13. *Пусть* $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$. *Тогда функция* $\eta(\lambda, \gamma)$

$$\eta(\lambda, \gamma) = |1 + \gamma\lambda| \tag{39}$$

возрастает при $\lambda > \lambda_0$, *убывает при* $\lambda < \lambda_0$ *и* $\eta(\lambda_0, \gamma) = 0$, *где* λ_0 *задается формулой*

$$\lambda_0 = -1/\gamma. \tag{40}$$

Производная функции $\eta(\lambda, \gamma)$ *по* λ, *обозначенная как* $(\eta(\lambda, \gamma))'_\lambda$, *равна*

$$(\eta(\lambda, \gamma))'_\lambda = |\gamma| \cdot sign(\lambda - \lambda_0), \forall \lambda \in R, \lambda \neq \lambda_0. \tag{41}$$

Теорема 14. *Функция $\eta(\lambda,\gamma)$ при фиксированном $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$ достигает своего максимального значения по всем $\lambda \in W_2$, $W_2 = [m, M] \subset R^+$ на одном из концов отрезка W_2 (либо при $\lambda = m$, либо при $\lambda = M$).*

Теорема 15. *Пусть $W_2 = [m, M] \subset R^+$, $m \leq M$, то есть*

$$W_2 = \{\lambda \in R^+ : 0 < m \leq \lambda \leq M < +\infty\}. \tag{42}$$

Тогда g_0 – точная нижняя грань по всем $\gamma \in R$, $\gamma \neq 0$, от функции

$$g(\gamma) = \sup_{\lambda \in W_2} \eta(\lambda,\gamma),\, g_0 = \inf_{\substack{\gamma \in R \\ \gamma \neq 0}} \sup_{\lambda \in W_2} |1 + \gamma \cdot \lambda| \tag{43}$$

достигается при $\gamma = \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = -2/(M + m),\ g_0 = (M - m)/(M + m). \tag{44}$$

Определение 5. Пусть $k \in N^+$, матрица $G \in M_k(R)$ является невырожденной, а ее спектр $\sigma(G)$ лежит в R^+, и пусть нам известен отрезок $W_2 = [m(G), M(G)]$, где $0 < m(G) < M(G) < +\infty$, содержащий спектр $\sigma(G)$. Пусть значения g_0 и γ_0 определены формулой (44). Назовем g_0 коэффициентом оптимального сжатия. Тогда однопараметрическое семейство метода простой итерации (8) с параметром $\gamma = \gamma_0 \in R$ называется оптимальным.

Определение 6. Пусть $k \in N^+$, матрица $A \in M_k(R)$ не вырождена и удовлетворяет условию $(W(A))$. Пусть

$$q_0 = \inf_{\alpha,\beta \in R,\ \beta \neq 0} \sup_{\lambda \in W(A)} |1 + \alpha \cdot \lambda + \beta \cdot \lambda^2|, \tag{45}$$

и пусть $\alpha_0, \beta_0 \in R, \beta_0 \neq 0$, значения параметров $\alpha, \beta \in R$, при которых значение q_0 достигается:

$$q_0 = \sup_{\mu \in W(A)} |1 + \alpha_0 \cdot \mu + \beta_0 \cdot \mu^2|. \tag{46}$$

Назовем q_0 коэффициентом оптимального сжатия. Тогда двухпараметрическое семейство метода простой итерации (10) с параметрами $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ называется оптимальным.

Теорема 16. *Пусть $k \in N^+$, матрица $G \in M_k(R)$ не вырождена, и пусть ее спектр $\sigma(G)$ содержится в R^+, то есть существует отрезок $W_2(G) \subset R^+$ с концами в точках $m(G)$ и $M(G)$, $0 < m(G) \leq M(G) < +\infty$ такой, что $\sigma(G) \subset W_2(G)$. Тогда оптимальным однопараметрическим семейством метода простой итерации является семейство (8) с параметром $\gamma = \gamma_0$, определенным формулой*

$$\gamma_0 = -2/(m(G) + M(G)). \tag{47}$$

Это семейство сходится к вектору-столбцу $x = \hat{x}$, $\hat{x} \in R^k$, являющемся решением системы линейных уравнений (1) с $A = G$ при любом начальном приближении $x^0 \in R^k$.

В некоторой норме справедлива оценка скорости сходимости

$$\| x^n - \hat{x} \| \leq g_0^n \cdot \| x^0 - \hat{x} \|, \tag{48}$$

где коэффициент оптимального сжатия g_0 *определяется формулой*

$$g_0 = (M(G) - m(G))/(M(G) + m(G)) \tag{49}$$

и удовлетворяет условию

$$0 < g_0 < 1\,. \tag{50}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведено в [Бахвалов и др., 1987].

Теорема 17. *Пусть* $k \in N^+$ *и матрицы* $A, A' \in M_k(R)$*, матрица* A *не вырождена,* A' *– матрица, транспонированная к матрице* A*, спектр* $\sigma(A'{\cdot}A)$ *матрицы* $A'{\cdot}A$ *содержится в* R^+*, т. е. существует отрезок* $W_2(A'{\cdot}A) = [m(A'{\cdot}A), M(A'{\cdot}A)] \subset R^+$ *такой, что* $\sigma(A'{\cdot}A) \subset W_2(A'{\cdot}A)$*. Тогда оптимальным симметризованным однопараметрическим семейством метода простой итерации является семейство* (9) *с параметром* $\delta = \delta_0$*:*

$$\delta_0 = -2/(m(A'{\cdot}A) + M(A'{\cdot}A))\,. \tag{51}$$

Это семейство сходится к вектору-столбцу $x = \hat{x}$*,* $\hat{x} \in R^k$*, который является решением системы линейных уравнений* (1) *при любом начальном приближении* $x^0 \in R^k$*.*

В ℓ^2*-норме справедлива оценка скорости сходимости*

$$\| x^n - \hat{x} \|_2 \le g_0^n \cdot \| x^0 - \hat{x} \|_2\,, \tag{52}$$

где коэффициент оптимального сжатия g_0 *определяется формулой*

$$g_0 = (M(A'{\cdot}A) - m(A'{\cdot}A))/(M(A'{\cdot}A) + m(A'{\cdot}A))\,, \tag{53}$$

и удовлетворяет условию

$$0 < g_0 < 1\,. \tag{54}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основано на доказательстве теоремы 16 при $G = A'{\cdot}A, d = A' \cdot b$, где A' – матрица, транспонированная к матрице A, на симметричности и положительной определенности матрицы A и ортонормированности базиса собственных векторов матрицы A.

Вычтем $\hat{x}$ из левой и правой частей формулы (9) и воспользуемся тем, что по определению $\hat{x}$ выполнено $A \cdot \hat{x} = b$, имеем

$$x^{n+1} - \hat{x} = x^n - \hat{x} + \delta \cdot (A'{\cdot}A \cdot x^n - A'{\cdot}A \cdot \hat{x})\,.$$

Используем свойство матрицы E и свойство умножения линейной комбинации матриц на вектор. Получаем:

$$x^{n+1} - \hat{x} = (E + \delta \cdot A'{\cdot}A) \cdot (x^n - \hat{x})\,. \tag{55}$$

По определению матричной нормы, порожденной ℓ^2-нормой пространства R^k, имеет место следующее неравенство:

$$\| x^{n+1} - \hat{x} \|_2 \le \| E + \delta \cdot A'{\cdot}A \|_2 \cdot \| x^n - \hat{x} \|_2\,. \tag{56}$$

По формуле (19) имеем

$$\| E + \delta \cdot A'{\cdot}A \|_2 = \max_{1 \le j \le k} | 1 + \delta \cdot \lambda_j(A'{\cdot}A) |\,.$$

Так как $\lambda_j(A'{\cdot}A) \in W_2(A'{\cdot}A)$ при всех $j = \overline{1,k}$, то

$$\max_{1 \le j \le k} | 1 + \delta \cdot \lambda_j(A'{\cdot}A) | \le \sup_{\lambda \in W_2(A'{\cdot}A)} | 1 + \delta \cdot \lambda |\,.$$

По определению коэффициента оптимального сжатия g_0 имеем

$$\inf_{\substack{\delta\in R\\ \delta\neq 0}} \sup_{\lambda\in W_2(A'A)} |1+\delta\cdot\lambda| = \sup_{\lambda\in W_2(A'A)} |1+\delta_0\cdot\lambda| = g_0 .$$

Поэтому для последовательности $x^n \in R^k$, построенной по формуле (10) для параметра $\delta=\delta_0$, справедливо неравенство

$$\| x^{n+1}-\hat{x} \|_2 \le g_0 \cdot \| x^n - \hat{x} \|_2 ,$$

из которого следует неравенство (52).

Теорема 18. *Пусть* $k\in N^+$, *матрица* $A\in M_k(R)$ *удовлетворяет условию* $(W(A))$. *Тогда оптимальным двухпараметрическим семейством метода простой итерации является семейство* (10) *с параметрами* α_0 *и* β_0, *которые задаются формулами*

$$\alpha_0 = (s(A)-m(A))\cdot\beta_0 , \tag{57}$$

если $t(A)-s(A)\le M(A)-m(A)$, *то*

$$\beta_0 = -2/(m(A)\cdot s(A)+M(A)\cdot s(A)-m(A)\cdot M(A)+M^2(A)) , \tag{58}$$

иначе

$$\beta_0 = -2/(m(A)\cdot s(A)+m(A)\cdot t(A)-s(A)\cdot t(A)+t^2(A)) . \tag{59}$$

Это семейство сходится к вектору-столбцу $x=\hat{x}$, $\hat{x}\in R^k$, *который является решением системы линейных уравнений* (1) *при любом начальном приближении* $x^0\in R^k$.

В некоторой норме справедлива оценка скорости сходимости

$$\| x^n-\hat{x} \| \le q_0^n \cdot \| x^0-\hat{x} \| , \tag{60}$$

где коэффициент оптимального сжатия q_0 *удовлетворяет условию*

$$0<q_0<1 . \tag{61}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведено в [Сорокин, Ченцова, 2008].

Теорема 19. *Пусть* $k\in N^+$, *матрица* $A\in M_k(R)$ *удовлетворяет условию* $(W(A))$ *и является симметричной. Тогда симметризованное однопараметрическое семейство метода простой итерации* (9) *с параметром* $\delta\in R$, $\delta\neq 0$ *является двухпараметрическим семейством метода простой итерации* (10) *с параметрами*

$$\alpha=0,\ \beta=\delta . \tag{62}$$

Для коэффициентов оптимального сжатия q_0 *и* g_0 *справедливо неравенство*

$$0<q_0<g_0<1 . \tag{63}$$

Иными словами, для симметричной матрицы $A\in M_k(R)$ *коэффициент оптимального сжатия* q_0 *двухпараметрического семейства метода простой итерации строго меньше коэффициента оптимального сжатия* g_0 *симметризованного однопараметрического семейства метода простой итерации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В формуле (9) вынесем матрицу A' слева за скобку и затем заменим A' на A, так как матрица A – симметричная. Получим формулу (10) с $\alpha=0$, $\beta=\delta$.

В теореме 18 доказана оптимальность метода (10) при $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, где α_0 и β_0 определяются из формул (57)–(59). Неравенство $q_0 < g_0$ выполнено по определению q_0.

Авторы выражают свою благодарность Коганову Александру Владимировичу и Силаеву Дмитрию Алексеевичу за постоянное внимание к работе и конструктивную критику.

Список литературы

Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: учебное пособие. – М.: Наука, Гл. ред. Физматлит. – 1987.

Богачев К. Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождение собственных значений // М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, – 1999.

Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, МЦНМО. – 1998.

Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, Гл. ред. Физматлит. – 1971.

Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н. Оптимальный метод простой итерации со спектром из отрицательного числа и положительного отрезка // Математика. Компьютер. Образование сборник трудов 15-ой международной конференции / под ред. Г. Ю. Ризниченко. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2008. – Т. 2. – С. 84–87.

Приложение 1

§ 7. Используемые множества чисел и символов

$N = \{0, 1, 2, ..., n, n+1, ...\}$ – множество натуральных чисел.

$N^+ = \{n \in N : n > 0\}$ – множество положительных натуральных чисел.

$\delta_{ij} \in \{0, 1\}$ – символ Кронекера, если $i, j \in N^+$ и $(\delta_{ii} = 1,\ \forall i \in N^+)\ \&\ (\delta_{ij} = 0,\ \forall i, j \in N^+ : i \neq j)$.

$n \in N$ – цифра, если $n = \overline{0, 9}$.

$n \in N$ – значащая цифра, если $n = \overline{1, 9}$.

$Z^+ = N^+$, $Z^- = \{-z : \exists\, z \in Z^+, z + (-z) = 0\}$.

$Z = Z^+ \bigcup Z^- \bigcup \{0\}$ – множество целых чисел.

Z_p – кольцо вычетов по модулю $p \in N, p \geq 2$.

R – поле вещественных чисел.

$R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ – множество положительных вещественных чисел.

$R^- = \{x \in R : x < 0\}$ – множество отрицательных вещественных чисел.

S – множество всех символов, которые можно напечатать.

$s \in S$ – бит, если $s \in \{0,1\}$.

$x \in S^8$ – байт, если $(x)_i \in \{0,1\}, \forall i = \overline{1, 8}$.

$C = \{z : z = \mathrm{Re}(z) + \hat{i} \cdot \mathrm{Im}(z)\}$ – поле комплексных чисел, где $\hat{i} \in C \setminus R$ – мнимая единица,

$\mathrm{Re}(z) \in R$ – вещественная часть комплексного числа z,

$\mathrm{Im}(z) \in R$ – мнимая часть комплексного числа z.

$\bar{z}$ – число комплексно-сопряженное к комплексному числу z, если $\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \hat{i} \cdot \mathrm{Im}(z)$.

§ 8. Функции, используемые для кодировки чисел

$\mathrm{int}(x)$ – целая часть вещественного числа x, если

$$((\mathrm{int}(x) \in Z, \forall x \in R)\ \&\ (x-1 < \mathrm{int}(x) \le x, \forall x \in R)).$$

$\mathrm{frc}(x)$ – дробная часть вещественного числа x, если

$$\mathrm{frc}(x) = x - \mathrm{int}(x).$$

$\mathrm{s}(x)$ – знак вещественного числа x, если

$$((\mathrm{s}(x) = +, \forall x \in R^+)\ \&\ (\mathrm{s}(x) = -, \forall x \in R^-)\ \&\ (\mathrm{s}(0) = +)).$$

$\mathrm{sgn}(x)$ – вещественная кодировка знака вещественного числа x, если

$$((\mathrm{sgn}(x) = 1, \forall x \in R^+)\ \&\ (\mathrm{sgn}(x) = -1, \forall x \in R^-)\ \&\ (\mathrm{sgn}(0) = 0)).$$

$\mathrm{bs}(x)$ – двоичная кодировка знака вещественного числа x, если

$$((\mathrm{bs}(x) = 1, \forall x \in R^+)\ \&\ (\mathrm{bs}(x) = 0, \forall x \in R^-)\ \&\ (\mathrm{bs}(0) = 0)).$$

$\mathrm{mod}_p(z) = \overline{0,\, p-1}$ – остаток от деления числа $z \in Z$ на число $p \in N,\ p \ge 2$, если

$$(\mathrm{mod}_p(z) = z - p \cdot \mathrm{int}(z/p), \forall z \in Z).$$

$Z_p^j = \{z \in Z : \mathrm{mod}_p(z) = j\} \subset Z$ – j-ый вычет по модулю $p \in N,\ p \ge 2$, где $j = \overline{0,\, p-1}$.

$Z_p = \bigcup\limits_{0 \le j \le p-1} Z_p^j$ – кольцо вычетов по модулю $p \in N,\ p \ge 2$, где операции сложения и умножения вычетов задаются следующими формулами:

$$(((Z_p^{j_1} + Z_p^{j_2} = Z_p^{\mathrm{mod}_p(j_1+j_2)})\ \&\ (Z_p^{j_1} \cdot Z_p^{j_2} = Z_p^{\mathrm{mod}_p(j_1 \cdot j_2)})), \forall j_1, j_2 = \overline{0,\, p-1}).$$

Пусть всюду далее x – вещественное число такое, что $-f_\infty \le x \le f_\infty$ [4].

$\mathrm{pw_p}(x) \in Z$ – порядок (по основанию $p \in N,\ p \ge 2$) числа $x \in R$, если

$$\mathrm{pw_p}(x) = \mathrm{int}(\log_\mathrm{p}(|x|)) + 1.$$

$\mathrm{ms_p}(x) \in R$ – мантисса (по основанию $p \in N,\ p \ge 2$) числа $x \in R$, если

$$\mathrm{ms_p}(x) = |x| \cdot \mathrm{p}^{-\mathrm{pw_p}(x)}.$$

$\mathrm{Nr_p}(x) \in R$ – нормализованное представление (по основанию $p \in N,\ p \ge 2$) с плавающей точкой числа $x \in R$, если $\mathrm{Nr_p}(x) = x$ и

$$\mathrm{Nr_p}(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \mathrm{p}^{\mathrm{pw_p}(x)} \cdot \mathrm{ms_p}(x),\ \ (1/p \le \mathrm{ms_p}(x) < 1).$$

$A\ell \in S^{26}$ – последовательность 26 букв латинского алфавита.

---

[4] Значения f_∞ зависят от языка программирования, от его компилятора и от типа используемых чисел.

$A_p \in S^p$ – последовательность символов допустимого алфавита для записи чисел в p-ичной системе счисления, если

$$((A_p)_i = i-1, \forall i: 1 \le i \le 10) \,\&\, ((A_p)_i = (A\ell)_{i-10}, \forall i: 11 \le i \le p), p = \overline{2, 36}).$$

$v_{\mathrm{p,Nn}}(n) \in (A_p)^{Nn}$ – запись числа $n \in Z^+$ символами из алфавита A_p, если

$$(v_{\mathrm{p,Nn}}(n))_{Nn-i+1} = (A_p)_{\mathrm{mod}_p(\mathrm{int}(n/p^{i-1}))}, \forall i = \overline{1, Nn}.$$

$v_{\mathrm{p,Nm}}(\mathrm{ms}_p(x)) \in (A_p)^{Nm}$ – запись числа $\mathrm{ms}_p(x) \in R,\ 1/p \le \mathrm{ms}_p(x) < 1$, если

$$(v_{\mathrm{p,Nm}}(\mathrm{ms}_p(x)))_i = (A_p)_{\mathrm{mod}_p(\mathrm{int}(x \cdot 2^i))}, \forall i = \overline{1, Nm}.$$

$\mathrm{b_{Nb}}(x) \in (Z_2)^{Nb}$ – двоичная кодировка числа $x \in R$, если

$$\mathrm{b_{Nb}}(x) = (\mathrm{bs}(x), v_{\mathrm{2,Np}}(\mathrm{pw}_2(x)), v_{\mathrm{2,Nm}}(\mathrm{ms}_2(x))), Nb = 1 + Np + Nm.$$

$\mathrm{c_{Nb}}(x) \in R$ – компьютерный образ числа $x \in R$, если

$$\mathrm{pw}_2(\mathrm{c_{Nb}}(x)) = \sum_{0 \le i \le Np} (v_{\mathrm{2,Np}}(\mathrm{pw}_2(x)))_i \cdot 2^{i-1},$$

$$\mathrm{ms}_2(\mathrm{c_{Nb}}(x)) = \sum_{0 \le i \le Nm} (v_{\mathrm{p,Nm}}(\mathrm{ms}_p(x)))_i \cdot (1/2)^i,$$

$$\mathrm{c}_{Nb}(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot 2^{\mathrm{pw}_2(\mathrm{c}_{Nb}(x))} \cdot \mathrm{ms}_2(\mathrm{c}_{Nb}(x)).$$

$x \in R$ – машиннопредставимое число, если

$$\mathrm{c}_{Nb}(x) = x.$$

§ 9. Векторы-столбцы и матрицы

Всюду далее F – числовое поле, $F = R$ или $F = C$.

Числа $i, j, k, \ell, m, n \in N^+$, если нет дополнительных ограничений.

J – числовое множество, если J – подмножество поля F.

J^k – прямое произведение множеств, совпадающих с множеством J.

$x \in J^k$ – вектор-столбец с координатами $(x)_i \in J$, $\forall i = \overline{1, k}$.

$(x)_i \in J$ – i-ая координата вектора-столбца $x \in J^k$, $\forall i = \overline{1, k}$.

$M_{k,n}(J)$ – множество матриц порядка $k \times n$ над множеством J.

$A \in M_{k,n}(J)$ – матрица с элементами $(A)_{ij} \in J$, $\forall i = \overline{1, k}, \forall j = \overline{1, n}$.

$(A)_{ij} \in J$ – i, j-ый элемент матрицы $A \in M_{k,n}(J)$, $\forall i = \overline{1, k}, \forall j = \overline{1, n}$.

$(x \in J^k) \Leftrightarrow (x \in M_{k,1}(J))$.

$M_k(J)$ – множество квадратных матриц порядка k над множеством J.

$A \in M_k(J)$ – матрица с элементами $(A)_{ij} \in J$, $\forall i, j = \overline{1, k}$.

§ 10. Детерминант квадратной матрицы

$J_j^k(s)$ – множество первых j координат элемента $s \in J^k$, если $j = \overline{1,k}$ и

$$((J_0^k(s) = \varnothing) \,\&\, (J_j^k(s) = \bigcup_{1\le i\le j} \{(s)_i\}, \forall j = \overline{1,k}).$$

$Alt(k)$ – множество всех перестановок множества $\overline{1,k}$, если

$$Alt(k) = \{s = (\overline{1,k})^k : (s)_j = \overline{1,k} \setminus J_{j-1}^k(s), \forall j = \overline{1,k}\}.$$

$Inv(s)$ – матрица инверсий[5] перестановки $s \in Alt(k)$, если

$$(Inv(s))_{ij} = bs((s)_i - (s)_j) \cdot bs(j-i), \forall i,j = \overline{1,k} \ .$$

$N(Inv(s))$ – число инверсий в перестановке $s \in Alt(k)$, если

$$N(Inv(s)) = \sum_{1\le i,j\le k} (Inv(s))_{ij} \ .$$

$\det(A)$ – детерминант матрицы $A \in M_k(F)$, если

$$\det(A) = \sum_{s\in Alt(k)} (-1)^{N(Inv(s))} \cdot \prod_{1\le j\le k} (A)_{j(s)_j} \ ,$$

где $N(Inv(s))$ – число инверсий в перестановке $s \in Alt(k)$.

§ 11. Произведения, степени и линейные комбинации матриц

$A{\cdot}x \in F^k$ – произведение матрицы $A \in M_k(F)$ и вектора-столбца $x \in F^k$, если

$$(A\cdot x)_i = \sum_{1\le j\le k} (A)_{ij} \cdot (x)_j, \ \forall i = \overline{1,k} \ .$$

$(\alpha{\cdot}A + \beta{\cdot}B) \in M_k(F)$ – линейная комбинация матриц $A, B{\in}M_k(F)$, $\alpha, \beta{\in}F$, если

$$(\alpha{\cdot}A + \beta{\cdot}B)_{ij} = \alpha\cdot(A)_{ij} + \beta\cdot(B)_{ij}, \forall i,j = \overline{1,k} \ .$$

$A \cdot B \in M_{k,n}(F)$ – произведение матриц $A \in M_{k,m}(F)$, $B \in M_{m,n}(F)$, если

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{1\le m\le k} (A)_{im} \cdot (B)_{mj}, \forall i = \overline{1,k}, \forall j = \overline{1,n} \ .$$

$E \in M_k(F)$ – единичная матрица в алгебре $M_k(F)$, если

$$((E{\in}\, M_k(F)) \,\&\, ((E)_{ii} = 1, \forall i = \overline{1,k} \ ) \ \&\, ((E)_{ij} = 0, \forall i{=}\,\overline{1,k}, \ \forall j{=}\,\overline{1,k} \setminus \{i\})) \ .$$

$A^j \in M_k(F)$ – j-ая степень матрицы $A \in M_k(F)$, если $j \in N$ и

$$((A^0 = E) \,\&\, (A^j = \prod_{1\le i\le j} A, \forall j \in N^+)) \ .$$

$A^{-1} \in M_k(F)$ – матрица, обратная к матрице $A \in M_k(F)$, если[6]

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \ .$$

[5] Понятие инверсии ввел Г. Крамер в 1750 году [Intr. a l'Analyse des Lignes Courbes algebriques (Geneva,1750), 657–659].

[6] Матрица $A^{-1} \in M_k(F)$ существует не для всех матриц $A \in M_k(F)$.

§ 12. Жорданова нормальная форма матрицы и круги Гершгорина

$P_k(A,\lambda)$ – характеристический многочлен для матрицы $A \in M_k(F)$, если при всех значениях независимой переменной $\lambda \in C$ выполнено

$$P_k(A,\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E).$$

$\lambda_j(A)$ – j-ое собственное значение матрицы $A \in M_k(F)$ алгебраической кратности k_j, $k_j = \overline{1,k}$, если существует многочлен $Q_{k-k_j}(A,\lambda)$ степени $k-k_j$ такой, что

$$P_k(A,\lambda) = (\lambda - \lambda_j(A))^{k_j} \cdot Q_{k-k_j}(A,\lambda), \quad Q_{k-k_j}(A,\lambda_j(A)) \neq 0.$$

Пусть всюду далее $m(A) = \overline{1,k}$ – число различных собственных значений матрицы $A \in M_k(F)$, занумерованных индексом $j = \overline{1,m(A)}$,

$$P_k(A,\lambda) = \prod_{1 \le j \le m(A)} (\lambda - \lambda_j(A))^{k_j}, \quad \sum_{1 \le j \le m(A)} k_j = k.$$

$\sigma(A)$ – спектр матрицы $A \in M_k(F)$, если

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C : \det(A - \lambda \cdot E) = 0\} = \bigcup_{1 \le i \le m(A)} \{\lambda_i(A)\}.$$

$u_j(A)$ – j-ый собственный вектор-столбец матрицы $A \in M_k(F)$, если

$$((j=\overline{1,k})\,\&\,(u_j(A) \in C^k)\,\&\,(u_j(A) \neq 0)\,\&\,(\exists 1 \le i \le m(A): A u_j(A) = \lambda_i(A) \cdot u_j(A))).$$

$\Lambda = \Lambda(A) \in M_k(F)$ – жорданова нормальная форма (ж.н.ф.) для матрицы $A \in M_k(F)$, если существует такая невырожденная матрица $C \in M_k(F)$, что

$$\Lambda = C \cdot A \cdot C^{-1}, ((\Lambda)_{i,i} = \lambda_i(A), (\Lambda)_{i,i+1} \in \{0,1\}, (\Lambda)_{i,j} = 0, \forall i = \overline{1,k}, \forall j \neq \overline{i,\ i+1}).$$

$K_i(A)$ – i-ый круг Гершгорина (с центром в точке $\hat{c}_i(A)$ и радиусом, равным $\hat{r}_i(A)$) для матрицы $A \in M_k(F)$, если $i = \overline{1,k}$ и

$$\hat{c}_i(A) = (A)_{ii}, \ \hat{r}_i(A) = \sum_{1 \le j \le k, j \neq i} |(A)_{ij}|\}, \hat{K}_i(A) = \{z \in C : |z - \hat{c}_i(A)| \le \hat{r}_i(A).$$

§ 13. Скалярное произведение, нормы и число обусловленности

(x,y) – скалярное произведение векторов-столбцов $x, y \in F^k$ с координатами $(x)_i, (y)_i \in F$ по всем $i = \overline{1,k}$, если

$$(x,y) = \sum_{1 \le i \le k} (x)_i \cdot \overline{(y)_i}.$$

$\| x \|_p$ – ℓ^p-норма вектора-столбца $x \in F^k$ с координатами $(x)_i \in F$, $\forall i = \overline{1,k}$, если $p \in N^+$ и

$$\| x \|_p = \{ \sum_{1 \le i \le k} |(x)_i|^p \}^{1/p}.$$

Особенно часто используют ℓ^p - норму при $p = 1, 2, +\infty$:

$$\| x \|_1 = \sum_{1 \le i \le k} |(x)_i|, \ \| x \|_2 = (x,x)^{1/2} = \sum_{1 \le i \le k} |(x)_i|^2, \ \| x \|_\infty = \max_{1 \le i \le k} \{|(x)_i|\}.$$

Норма векторного пространства $M_k(F)$ порождена нормой векторного пространства F^k, если

$$\| A \| = \sup_{x \in F^k \setminus \{0\}} \left\{ \| A \cdot x \| / \| x \| \right\}, \ \forall A \in M_k(F).$$

Норма векторного пространства $M_k(F)$ подчинена норме векторного пространства F^k, если

$$\| A \cdot x \| \le \| A \| \cdot \| x \|, \ \forall x \in F^k.$$

$\nu(A)$ – число обусловленности обратимой матрицы $A \in M_k(F)$, если

$$\nu(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|.$$

$\nu_2(A)$ – число обусловленности матрицы $A \in M_k(F)$ относительно ℓ^2-нормы в векторном пространстве F^k, вычисляется по формуле

$$\nu_2(A) = (\max_{1 \le i \le k}(\lambda_i(A' \cdot A)) / \min_{1 \le i \le k}(\lambda_i(A' \cdot A)))^{1/2}.$$

§ 14. Используемые подмножества кольца матриц $M_k(F)$

$A \in M_k(F)$ – невырожденная матрица, если $\det(A) \ne 0$.

$A \in M_k(F)$ – обратимая матрица, если существует $A^{-1} \in M_k(F)$.

$A' \in M_k(F)$ – матрица, транспонированная к матрице $A \in M_k(F)$, если

$$((A' \in M_k(F)) \,\&\, ((A')_{ij} = (A)_{ji}, \ \forall i, j = \overline{1, k})).$$

$A \in M_k(R)$ – симметричная матрица, если $A' = A$.

$A^* \in M_k(C)$ – матрица, сопряженная к матрице $A \in M_k(C)$, если

$$((A^* \in M_k(C)) \,\&\, ((A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}, \ \forall i, j = \overline{1, k})).$$

$A \in M_k(C)$ – эрмитова матрица, если $A^* = A$.

$A \in M_k(R)$ – положительно определенная матрица, если

$$(A \cdot x, x) > 0, \ \forall x \in R^k \setminus \{0\}.$$

Приложение 2

§ 15. Вычисление на ЭВМ двух семейств метода простой итерации. Априорные и апостериорные оценки для нормы невязки

Приближения к решению системы линейных уравнений (1) были нами найдены с помощью ЭВМ “HP Pavilion dv6” по программе, написанной на языке Си++. В программе итерационно вычислялись значения. Использовались два различных семейства метода простой итерации: 1) оптимальное двухпараметрическое семейство с параметрами $\alpha_0 = 1/16$, $\beta_0 = -1/16$, 2) симметризованное однопараметрическое семейство с оптимальным значением параметра $\delta_0 = -1/13$. Векторы-столбцы $\hat{x}, b \in R^4$. Матрица $A \in M_4(R)$ была выбрана симметричной матрицей, с собственными значениями, равными следующим целым числам: $-5, -1, 2, 4$, а именно, $\lambda_1(A) = -5$, $\lambda_2(A) = -1$, $\lambda_3(A) = 2$, $\lambda_4(A) = 4$, с матричными элементами в десятичной записи, имеющими четыре знака после запятой.

Условием окончания работы программы нами было выбрано логическое выражение (число_итераций $>1000) \vee (\| A \cdot x^n - b \|_2 < 10^{-\ell})$, где ℓ – целая переменная, принимающая последовательные целые значения от 3 до 15.

Определение П.1. Вектор-столбец $w(A,x,b) \in R^k$ называется невязкой системы (1), если

$$w(A,x,b) = A \cdot x - b\,. \tag{П1}$$

Систему линейных уравнений (1) мы решали четыре раза. Для каждого $i=\overline{1,4}$ мы брали вектор-столбец $b \in R^4$ равным базисному вектору-столбцу $e_i \in R^4$ с j-координатой $(e_i)_j = \delta_{ij}$ для каждого $i=\overline{1,4}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Вектор-столбец $\hat{x}_i \in R^4$, соответствующий вектору-столбцу $e_i \in R^4$, являющийся решением системы линейных уравнений (1), совпадает с i-ым столбцом матрицы A^{-1}, т. е. $(A^{-1})_i = \hat{x}_i(A,e_i)$. Таким образом, была вычислена матрица A^{-1}. Оказалось, что матрица $A^{-1} \in M_4(R)$ также является симметричной матрицей с матричными элементами, также имеющими в десятичной записи четыре знака после запятой. Приводим предложенную нами исходную матрицу A и вычисленную по нашей программе матрицу A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} -3{,}1712 & -2{,}4384 & 0{,}6912 & 0{,}5184 \\ -2{,}4384 & -1{,}7488 & -0{,}9216 & -0{,}6912 \\ 0{,}6912 & -0{,}9216 & 2{,}0288 & -1{,}4784 \\ 0{,}5184 & -0{,}6912 & -1{,}4784 & 2{,}8912 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}2936 & 0{,}1248 & 0{,}3456 & 0{,}2592 \\ 0{,}1248 & -0{,}3664 & -0{,}4608 & -0{,}3456 \\ 0{,}3456 & -0{,}4608 & 0{,}0644 & -0{,}1392 \\ 0{,}2592 & -0{,}3456 & -0{,}1392 & 0{,}1456 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} в десятичной записи вычислена точно. Однако, ℓ^2-норма невязки $w(A,\hat{x}(A,e_i),e_i)$, вычисленная на компьютере, равна $c_i \cdot 10^{-16}$, где $|c_i| < 10$ для всех $i=\overline{1,4}$.

Следующие две таблицы дают значения числа итераций, при которых $\| w(A, x_i^n(x^0,e_i), e_i) \|_2$ для каждого $i=\overline{1,4}$ в первый раз стала меньше $10^{-\ell}$. В таблице 1 даны значения числа итераций для первого семейства (оптимального двухпараметрического семейства с параметрами $\alpha_0 = 1/16,\ \beta_0 = -1/16$) для ℓ^2-нормы невязки $w(A, x_i^n(x,e_i), e_i)$, а в таблице 2 – для второго семейства (симметризованного однопараметрического семейства с оптимальным значением параметра $\delta_0 = -1/13$) для ℓ^2-нормы невязки $w(A'A, x_i^n(x, A'\cdot e_i), A'\cdot e_i)$. Начальное приближение $x^0 \in R^4$ выбираем равным $e_1 \in R^4$.

Таблица 1

$e_i \backslash \ell$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	57	74	91	108	126	143	160	177	195	212	229	246	264
2	56	74	91	108	125	143	160	177	194	212	229	246	263
3	55	73	90	107	124	141	159	176	193	210	228	245	262
4	55	73	90	107	124	141	159	176	193	210	228	245	262

Таблица 2

$e_i \backslash \ell$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94	123	152	181	210	238	267	296	325	353	382	411	440
2	94	123	151	180	209	238	267	295	324	353	382	410	439
3	92	121	150	178	207	236	265	294	322	351	380	409	437
4	92	121	150	178	207	236	265	294	322	351	380	409	437

Оказалось, что число итераций в каждой таблице при одном и том же значении ℓ и при разных номерах $i=\overline{1,4}$ векторов-столбцов $e_i \in R^4$ отличаются друг от друга не более чем на три. Мы приводим таблицу 3, в которой приведены значения переменных $\mathrm{n1}$ и $\mathrm{n2}$, где $\mathrm{n1}$ –

максимальное значение числа итераций из таблицы 1 и n2 – максимальное значение числа итераций из таблицы 2 при одном и том же значении ℓ :

Таблица 3

ℓ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n1	57	74	91	108	126	143	160	177	195	212	229	246	264
n2	94	123	152	181	210	238	267	296	325	353	382	411	440

Лемма П.1. *Пусть* $k \in N^+$, *матрица* $B \in M_k(R)$ *не вырождена, вектор-столбец* $x^0 \in R^k$, *вектор-столбец* $\hat{x} \in R^k$ *– решение системы линейных уравнений* (2). *Пусть последовательность* $x^n \in R^k$ *построена по методу простой итерации* (3). *Пусть в пространстве* R^k *зафиксирована некоторая норма, и пусть матричная норма порождена ею. Тогда справедливы следующие неравенства для этих упомянутых норм:*

$$\| B^{-1} \|^{-1} \le \| x^{n+1} - x^n \| / \| x^n - x^{n-1} \| \le \| B \| , \tag{П2}$$

$$\| B^{-1} \|^{-1} \le \| x^{n+1} - B \cdot x^{n+1} - c \| / \| x^n - B \cdot x^n - c \| \le \| B \| , \tag{П3}$$

$$|1 - \| x^n \| / \| \hat{x} \| | \le \| B \|^n \cdot \theta, \quad \theta = 1 + \| E - B \| \cdot \| x^0 \| / \| c \| . \tag{П4}$$

Лемма П.2. *Пусть* $k \in N^+$ *и матрица* $B \in M_k(R)$ *не вырождена. Пусть в пространстве* R^k *существует такая норма, что в порожденной ею матричной норме норма* $\| B \| < 1$. *Тогда в этой норме последовательность* $x^n \in R^k$, *построенная по методу простой итерации* (3), *сходится к решению* $\hat{x} \in R^k$ *системы линейных уравнений* (2) *для любого начального приближения* $x^0 \in R^k$. *Скорость сходимости по этой норме оценивается сверху как*

$$\| x^n - \hat{x} \| \le \| B \|^n \cdot (1/(1 - \| B \|)) \cdot \| x^0 - x^1 \| . \tag{П5}$$

Лемма П.3. *Пусть* $k \in N^+$, *матрица* $A \in M_k(R)$, $x^0, b \in R^k$. *Тогда невязка* $w(A, x^n(x^0, b), b)$ *на последовательности* $x^n \in R^k$ *двухпараметрического семейства метода простой итерации, построенной по формулам* (10) *с любым начальным приближением* $x^0 \in R^k$, *выражается как*

$$w(A, x^n(x^0, b), b) = A \cdot x^n(x^0, b) - b = B^n \cdot (A \cdot x^0 - b), \quad B = E + \alpha \cdot A + \beta \cdot A^2 . \tag{П6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левую и правую части равенства (10) слева умножим на матрицу A, затем вычтем из обеих частей $b \in R^k$ и воспользуемся выражением для матрицы B. Получим рекуррентную формулу (П7), доказывающую формулу (П6) по индукции:

$$w(A, x^n(x^0, b), b) = A \cdot x^n(x^0, b) - b = B \cdot (A \cdot x^{n-1}(x^0, b) - b), B = E + \alpha \cdot A + \beta \cdot A^2 . \tag{П7}$$

Лемма П.4. *Пусть* $k \in N^+$, *матрица* $A \in M_k(R)$, $x^0, b \in R^k$. *Тогда невязка* $w(A' \cdot A, x^n(x^0, A' b), A' b)$ *на последовательности* $x^n \in R^k$ *симметризованного однопараметрического семейства метода простой итерации, построенной по формулам (9) с любым начальным приближением* $x^0 \in R^k$, *выражается как*

$$w(A' \cdot A, x^n(x^0, A' \cdot b), A' \cdot b) = A' \cdot A \cdot x^n(x^0, A' \cdot b) - A' \cdot b = B^n \cdot (A' \cdot A \cdot x^0 - A' \cdot b), B = E + \delta \cdot A' \cdot A . \tag{П8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**.** Левую и правую части равенства (9) слева умножим на матрицу $A' \cdot A$, затем вычтем из обеих частей $A' \cdot b \in R^k$ и воспользуемся выражением для матрицы B. Получим рекуррентную формулу (П9), доказывающую формулу (П8) по индукции:

$$w(A' \cdot A, x^n(x^0, A' \cdot b), A' \cdot b) = A' \cdot A \cdot x^n(x^0, A' \cdot b) - A' \cdot b = B \cdot (A' \cdot A \cdot x^{n-1}(x^0, A' \cdot b) - A' \cdot b) . \tag{П9}$$

Теорема П.5. *Последовательность* $x^n \in R^4$ *оптимального двухпараметрического семейства метода простой итерации, построенная по формулам* (10) *с выбранной нами матрицей* $A \in M_4(R)$ *для любого начального приближения* $x^0 \in R^4$ *сходится. Скорость сходимости по* ℓ^2*-норме вектора-столбца невязки* $w(A, x^n(x^0, b), b) \in R^4$ *оценивается сверху геометрической прогрессией с основанием* $q_0 = 7/8$

$$\| w(A, x^n(x^0, b), b) \|_2 = \| A \cdot x^n - b \|_2 \le \| B \|_2^n \cdot \| A \cdot x^0 - b \|_2, \; B = E + \alpha_0 \cdot A + \beta_0 \cdot A^2, \; \| B \|_2 = q_0 . \quad (\text{П}10)$$

Число итераций $m1(\ell)$*, которое необходимо для достижения точности* $10^{-\ell}$*, вычисляется так:*

$$m1(\ell) = 1 + \operatorname{int}(d_1 \cdot \ell + h_1), \quad d_1 = \ln 10 / \ln(1/\| B \|_2), \quad h_1 = \ln(\| A \cdot x^0 - b \|_2) / \ln(1/\| B \|_2) . \quad (\text{П}11)$$

Теорема П.6. *Последовательность* $x^n \in R^4$ *симметризованного однопараметрического семейства метода простой итерации, построенная по формулам* (9) *с выбранной нами матрицей* $A \in M_4(R)$ *для любого начального приближения* $x^0 \in R^4$ *сходится. Скорость сходимости по* ℓ^2*-норме вектора-столбца невязки* $w(A' A, x^n(x^0, A' b), A' \cdot b) \in R^4$ *оценивается сверху геометрической прогрессией с основанием* $g_0 = 12/13$

$$\| w(A' A, x^n(x^0, A' b), A' \cdot b) \|_2 = \| A' A \cdot x^n - A' b \|_2 \le \| A' A \|_2 \cdot \| B \|_2^n \cdot \| x^0 - x^1 \|_2,$$
$$B = E + \delta_0 \cdot A' A, \quad \| B \|_2 = g_0 . \quad (\text{П}12)$$

Число итераций $m2(\ell)$*, необходимых для достижения точности* $10^{-\ell}$*, вычисляется так:*

$$m2(\ell) = 1 + \operatorname{int}(d_2 \cdot \ell + h_2), \; d_2 = \ln 10 / \ln(1/\| B \|_2), \; h_2 = \ln(\| A' A \cdot x^0 - A' b \|_2) / \ln(1/\| B \|_2) . \quad (\text{П}13)$$

Система всех решений $\hat{x}(A, e_i)$ *по всем* $i = \overline{1,4}$ *является фундаментальной, так как решение* $\hat{x}(A, b) = \sum_{1 \le i \le 4} (b)_i \cdot \hat{x}(A, e_i)$*, где* $b = \sum_{1 \le i \le 4} (b)_i \cdot e_i$*, а система всех последовательностей* $x^n(e_i, e_1)$ *тоже.*

Теорема П.7. *Пусть* $k \in N^+$*, матрица* $A \in M_k(R)$*,* $b \in R^k$*. Пусть начальное приближение*

$$x^0 = \sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot e_1 . \quad (\text{П}14)$$

Тогда для последовательностей $x^n(e_1, e_i)$ *по* $i = \overline{1,k}$ *и последовательности* $x^n(\sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot e_1, b)$ *двухпараметрического семейства метода простой итерации имеем*

$$A \cdot x^n(\sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot e_1, b) = \sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot A \cdot x^n(e_1, e_i) , \quad (\text{П}15)$$

$$\| A \cdot x^n(\sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot e_1, b) - b \|_2 \le \| b \|_1 \cdot \max_{1 \le j \le k} \| A \cdot x^n(e_1, e_j) - e_j \|_2 . \quad (\text{П}16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (П6) при $x^0 = e_1$ и $b = e_i$ имеем

$$A \cdot x^n(e_1, e_i) - e_i = B^n \cdot (A \cdot e_1 - e_i) . \quad (\text{П}17)$$

Левую и правую части (П17) умножим на число $(b)_i \in R$, просуммируем полученные по всем $i = \overline{1,k}$ выражения и воспользуемся равенством $b = \sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot e_i$, получим формулу

$$(\sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot A \cdot x^n(e_1, e_i)) - b = B^n \cdot (\sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot A \cdot e_1 - b) . \quad (\text{П}18)$$

Сравнивая ее с формулой (П6) для $w(A, x^n, \sum_{1 \le i \le k} (b)_i \cdot e_1, b) \in R^k$ убеждаемся в верности (П15).

Воспользовавшись неравенством треугольника для нормы суммы и равенством для нормы вектора-столбца, умноженного на число, получаем формулу (П16).

Вычисленные значения функции $m1(\ell)$ по формуле (П11) приведены в таблице 4.

Таблица 4

$e_i \backslash \ell$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	64	81	99	115	133	150	168	185	202	219	237	254	271
2	64	81	98	116	133	150	167	185	202	219	236	254	271
3	63	80	97	115	132	149	166	183	201	218	235	252	270
4	63	80	97	115	132	149	166	183	201	218	235	252	270

Вычисленные значения функции $m2(\ell)$ по формуле (П13) приведены в таблице 5.

Таблица 5

$e_i \backslash \ell$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	127	155	184	213	242	270	299	328	357	385	414	443	472
2	126	155	184	212	241	270	299	327	356	385	414	442	471
3	124	153	182	211	239	268	297	326	354	383	412	441	470
4	124	153	182	211	239	268	297	326	354	383	412	441	470

В таблицу 6 занесены максимальные значения числа итераций, в строку $m1$ из таблицы 4, а в строку $m2$ из таблицы 5.

Таблица 6

ℓ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m1	64	81	99	116	133	150	168	185	202	219	237	254	271
m2	127	155	184	213	242	270	299	328	357	385	414	443	472

Сравнив значения ni (апостериорные оценки) из таблицы 3 со значениями mi (априорные оценки) из таблицы 6 при одном и том же ℓ, убеждаемся, что они близки. Вычисляя значения для всех приведенных таблиц, мы следовали традиции. Однако, с нашей точки зрения, лучше считать то значение числа итераций, при котором отношение $v_{n,m}(A, x_i^n, x_i^m, x^0, e_i)$ при $m = 0$ ℓ^2-нормы невязки $w(A, x_i^n, x^0, e_i)$ к ℓ^2-норме невязки $w(A, x_i^\ell, x^0, e_i)$

$$v_{n,m}(A, x_i^n, x_i^m, x^0, e_i) = \| A \cdot x_i^n - e_i \|_2 \ / \ \| A \cdot x_i^m - e_i \|_2 \qquad (\text{П}19)$$

в первый раз станет меньше, чем $10^{-\ell}$, предварительно проверив, что $\| A \cdot x^0 - e_i \|_2 > 10^{-16}$ по всем $i = \overline{1,4}$, где $\ell = \overline{3,15}$. Ведь если $\| A \cdot x^0 - e_i \|_2 = 0$, то $x^0 \in R^4$ является решением системы линейных уравнений в канонической форме (1) с $b = e_i \in R^4$.

В таблицах 7 и 8 приведены значения числа итераций, при которых $v(A, x_i^n, e_1, e_i)$ и $v(A' A, x_i^n, e_1, A' \cdot e_i)$ впервые стали меньше, чем $10^{-\ell}$, где $\ell = \overline{3,15}$.

Таблица 7

$e_i \backslash \ell$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	52	69	87	104	121	138	155	173	190	207	225	242	259
2	52	69	87	104	121	138	155	173	190	207	225	242	259
3	52	69	87	104	121	138	155	173	190	207	225	242	259
4	52	69	87	104	121	138	155	173	190	207	225	242	259

Таблица 8

$e_i \backslash \ell$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	87	116	144	173	202	231	259	288	317	346	374	403	433
2	87	116	144	173	202	231	259	288	317	346	374	403	433
3	87	116	144	173	202	231	259	288	317	346	374	403	433
4	87	116	144	173	202	231	259	288	317	346	374	403	433

В таблице 9 приведены те значения целых положительных переменных $\mathrm{m1}$, $\mathrm{m2}$, ℓ, что после $\mathrm{m1}\ (\mathrm{m2})$-кратного умножения вещественной переменной «результат» с начальным значением равным 1 на коэффициент сжатия $q_0 = 7/8$ ($g_0 = 12/13$) значение переменной «результат» впервые становится меньше положительного вещественного числа $10^{-\ell}$, где $\ell = \overline{3,15}$.

Таблица 9

ℓ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m1	52	69	87	104	121	138	155	173	190	207	225	242	259
m2	87	116	144	173	202	231	259	288	317	346	374	403	432

Видно, что значения строки $\mathrm{m1}\ (\mathrm{m2})$ таблицы 9 не отличаются от значений в таблицах 7 (8) до значений при $\ell = 14$ включительно.