**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 2 С. 215–222**

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 51-77

Моделирование предкрахового поведения цен на иерархически организованном финансовом рынке

А. С. Пивоварова[a], А. А. Стеряков[b]

Самарский государственный аэрокосмический университет,
Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

E-mail: [a] a-pivovarova@mail.ru, [b] lubopitnij@mail.ru

Получено 3 апреля 2011 г.

Рассматривается иерархическая модель, предложенная Джохансеном и Сорнеттом, описывающая механизм возникновения логопериодических колебаний, предшествующих финансовым крахам, и проводится ее численный анализ. Предлагаются обобщения данной модели на основе введения зависимость степени влияния агентов друг на друга от ультраметрического расстояния между ними. Наибольшее внимание уделяется вопросу об универсальности критической точки, который исследуется с помощью построения распределений точек краха при различном числе агентов.

Ключевые слова: математическое моделирование, логопериодические колебания и степенной рост, ультраметрическое расстояние, иерархические структуры, финансовые крахи

Modeling the behavior proceeding market crash in a hierarchically organized financial market

A. S. Pivovarova, A. A. Steryakov

Samara State Aerospace University, Moskovskoye Shosse, 34, Samara, 443086, Russia

Abstract. — We consider the hierarchical model of financial crashes introduced by A. Johansen and D. Sornette which reproduces the log-periodic power law behavior of the price before the critical point. In order to build the generalization of this model we introduce the dependence of an influence exponent on an ultrametric distance between agents. Much attention is being paid to a problem of critical point universality which is investigated by comparison of probability density functions of the crash times corresponding to systems with various total numbers of agents.

Keywords: mathematical modeling, log periodic power law, ultrametric distance, hierarchical structure, financial crashes

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 215–222 (Russian).

Введение

Эмпирические исследования склонных к катастрофам систем показали, что во многих случаях моменту обострения предшествует не только возрастание соответствующих физических величин, но и ускорение колебаний, происходящих в системе. Данные колебания, наложенные на основной возрастающий тренд, характеризуются увеличивающейся амплитудой и частотой при приближении к моменту обострения. Было выяснено [Sornette et al., 1996; Подлазов, 2009], что такие колебания хорошо аппроксимируются гармониками логопериодических колебаний. С другой стороны, известно [Бикулов и др., 2006], что логопериодические колебания, характеризующиеся определенным моментом обострения, возникают в системах, обладающих свойством дискретной масштабной инвариантности, например, в иерархических системах. Отсюда возникает задача построения и исследования иерархических систем, динамика которых характеризуется определенным моментом обострения.

Одной из наиболее удачных попыток построения простой модели иерархически организованной системы с положительной обратной связью является модель предкрахового поведения финансового рынка Джохансена–Сорнетта [Sornette and Johansen, 1998]. Данную модель можно рассматривать как подход к описанию иерархически организованных систем. В частности, этот подход применим в случае, если эволюция системы происходит в результате влияния ее элементов друг на друга. Финансовый рынок является очевидным примером таких структур, однако в природе также можно обнаружить множество иерархически организованных систем, склонных к критическим явлениям, характеризующимся сингулярным поведением наблюдаемых величин. Наибольшее сходство с рыночной предкраховой динамикой наблюдается в сейсмологии — в задачах прогнозирования землетрясений.

Основной целью данной работы является исследование применимости подхода Джохансена и Сорнетта для объяснения природы логопериодических колебаний и решения частных практических задач, возникающих при анализе рыночных явлений. При построении и обобщении моделей в данной работе основные предположения, которые вводятся при разработке исходной модели, остаются неизменными. Под иерархической структурой рынка в данном случае понимается иерархическая организация его участников, которая во многом отражает реальную иерархическую организацию фондового рынка. Такая организация может быть как постоянным свойством рынка, так и спонтанно возникшим [Huang et al., 1997; Tostesen, 1995]. Примером постоянной может быть организационная иерархия: на нижнем уровне иерархии находятся индивидуальные трейдеры, они объединяются в фирмы и банки, представляющие собой агентов следующего уровня, далее, выше по иерархии располагаются города, страны и так далее. Важным следствием иерархической организации является то, что действия агента влияют только на ограниченное число соседних агентов, а именно, находящихся на том же уровне иерархии и ниже. В результате каскадного эффекта решение агентов на нижнем уровне в свою очередь так же влияет на более высокие уровни. Основные упрощающие положения в модели касаются описания поведения агентов на рынке. В начальный момент времени каждый агент проводит независимый фундаментальный анализ, в результате которого выбирает свое время для покупки акций. Однако агент понимает, что его анализ может быть неполным или необъективным, и поэтому старается узнать больше о действиях других ближайших агентов. При этом агент не проводит никакого технического анализа, то есть цена не несет для него никакой информации. Другое важное упрощение состоит в том, что на рынке существует некоторый постоянный уровень предложения и все рассматриваемые агенты заинтересованы только в покупке акций. Тогда задача сводится к определению количества активных покупателей среди всех агентов-покупателей.

Модель финансовых крахов Джохансена–Сорнетта

В модели Джохансена и Сорнетта индивидуальные трейдеры (агенты нулевого уровня) объединяются в группы по m агентов (агенты первого уровня) далее такие группы также объединяются в группы по m агентов, формируя агентов 2 уровня и так далее. В результате получается иерархическая организация, в которой агенты порядка n состоят из m^n индивидуальных трейдеров. Для простоты можно положить $m = 2$.

Предполагается, что каждый агент i обладает предпочтительным временем t_i для покупки акций, все такие времена t_i имеют функцию распределения Пуассона $P_0(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\}$.

Один из способов описания взаимодействия агентов состоит в учете неуверенности агентов в своем собственном решении. При этом информация о том, что некоторый агент уже совершил покупку, является для еще не вступивших в торговлю агентов поводом пересмотреть принятое ранее решение о времени покупки.

Влияние агента i в момент времени t_i на агента j состоит в изменении времени совершения покупки

$$t_{ij} = t_i + 2^{-\beta}\left(t_j - t_i\right),$$

где $\beta \geq 0$ — коэффициент влияния. Так как при этом $2^{-\beta} \leq 1$, новое время действия удовлетворяет условию $t_i \leq t_{ij} \leq t_j$. При этом функция распределения времени действия для агента j принимает вид

$$P(t) = 1 - \exp\left\{-\lambda\left[t_i + 2^{\beta}(t - t_i)\right]\right\}. \tag{1}$$

Для простоты вычислений положим данное влияние однородным в том смысле, что все агенты на всех уровнях имеют одинаковое β.

Рассмотренный механизм, в сущности, является некоторым правилом подражания. Введение такой положительной обратной связи позволяет смоделировать сильно нелинейное (пороговое) поведение агентов. Ввиду ограниченного доступа к информации влиять друг на друга могут только агенты, находящиеся на одном уровне иерархии внутри одного кластера. При этом считается, что агент более высокого уровня иерархии совершил покупку, если совершили покупку все его дочерние элементы. Для случая двоичного дерева можно записать выражение для вероятности того, что агент уровня N совершит покупку в момент времени t. Пусть $p_N(t)$ — вероятность того, что агент уровня N сработает на рынке в интервале времени $(t, t + dt)$. Это событие равносильно тому, что один из его дочерних агентов $N - 1$ уровня сработает раньше второго в интервале времени $(t_1, t_1 + dt_1)$, а второй затем сработает в интервале $(t, t + dt)$. Соответствующие вероятности этих двух событий — $p_{N-1}(t_1)$ и $\tilde{p}_{N-1}(t)$. Здесь обозначение $\tilde{p}_{N-1}(t)$ введено для плотности вероятности срабатывания второго агента при условии, что сработал первый. Тогда из уравнения (1) получим

$$\tilde{p}_{N-1}(t) = \frac{1}{2^{-\beta}} p_{N-1}\left(\frac{t - \left(1 - 2^{-\beta}\right)t_1}{2^{-\beta}}\right).$$

Учитывая все возможные значения времени $t_1 \in (0, t)$, окончательно получим

$$p_N(t) = \frac{2}{2^{-\beta}} \int_0^t p_{N-1}(t_1)\, p_{N-1}\left(\frac{t - \left(1 - 2^{-\beta}\right)t_1}{2^{-\beta}}\right) dt_1. \tag{2}$$

Коэффициент 2 учитывает, что любой из двух агентов уровня $N - 1$ может совершить покупку первым.

В рамках предложенной модели можно дать определение краха. В пределе бесконечного числа агентов (то есть бесконечного числа уровней иерархии) наличие краха в некоторый момент времени t_c означает, что при $t < t_c$ число активных покупателей остается относительно небольшим. Со временем это число постепенно увеличивается, и к моменту времени t_c происходит насыщение рынка. Критическая точка, определенная как срабатывание всех агентов на рынке, математически означает, что $p_N(t)$ стремится к дельта-функции при увеличении N:

$$p_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} p_\infty(t) \equiv \delta(t - t_c), \quad N \to \infty.$$

Таким образом, рассматривая данное выше определение краха, мы можем получить вероятность возникновения краха в данной иерархической структуре, применяя выражение (2) N раз, начиная с $p_0(t)$.

В случае $\beta = 1$ можно получить точное выражение для критической точки. Итерируя начальное распределение $p_0(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\}$ по формуле (2), получим следующее рекуррентное соотношение для вероятности совершения покупки агентом уровня N

$$p_N(t) = C_N t^{2^N-1} \lambda^{2^N} \exp\left\{-2^N \lambda t\right\}. \tag{3}$$

На рисунке 1 приведены графики полученных распределений для некоторых итераций. Очевидно, что распределение (3) стремиться к δ-функции. Максимум этих распределений есть

$$t_c = \frac{2^N - 1}{2^N \lambda} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{\lambda}.$$

Полученное время краха в пределе бесконечного числа агентов является математическим ожиданием начального распределения времен действия, то есть просто средним временем действия всех агентов.

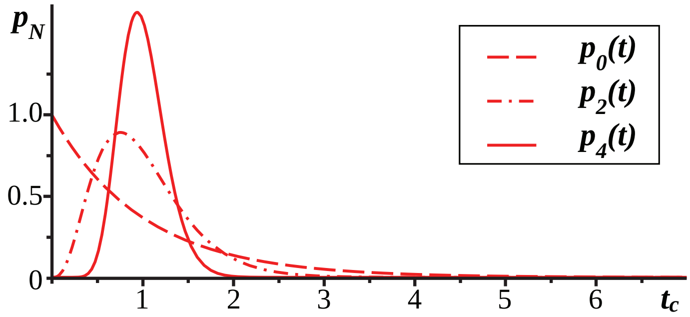

Рис. 1. График плотностей распределения (3)

При $\beta \neq 1$ аналитическую формулу для t_c получить затруднительно. При численном исследовании данной модели строилась зависимость количества агентов, выставивших заявки на покупку, от времени, то есть фактически спроса — от времени (рисунок 2). Видно, что при приближении к критической точке на разных временных масштабах наблюдаются логопериодические колебания, наложенные на степенную зависимость.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что логопериодические колебания и степенной рост цен перед обвалами являются следствиями дискретной иерархической структуры фондовых рынков и наличия на них положительной обратной связи.

В пределе при $N \to \infty$ время краха t_c в системе одно и тоже при любой начальной реализации распределения времен действий агентов. При численном анализе системы количество агентов всегда ограничено, поэтому время краха t_c будет различным для различных начальных реализаций. Однако при увеличении числа агентов разброс таких значений должен уменьшаться, то есть плотность распределения времен краха t_c^j должна стремиться к дельта-функции. Для подтверждения этого факта были построены функции плотности распределения времен крахов для систем с различным числом агентов (рисунок 3). Для построения каждой функции рассматривалось 200 реализаций системы, и полученный интервал значений t_c^j разбивался на 20 промежутков.

Из рисунка 3 видно, что распределение точек краха действительно сужается с увеличением числа агентов, однако данное сужение происходит довольно медленно.

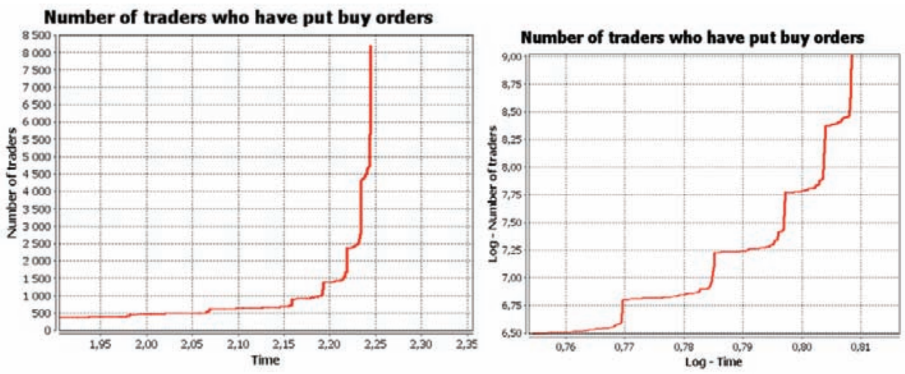

Рис. 2. Количество агентов, выставивших заявку на покупку акций к моменту времени t; в обычном (а) и логарифмическом (б) масштабах параметры системы: $n = 13$ ($N = 8192$), $\lambda = 0.01$, $\beta = 5$

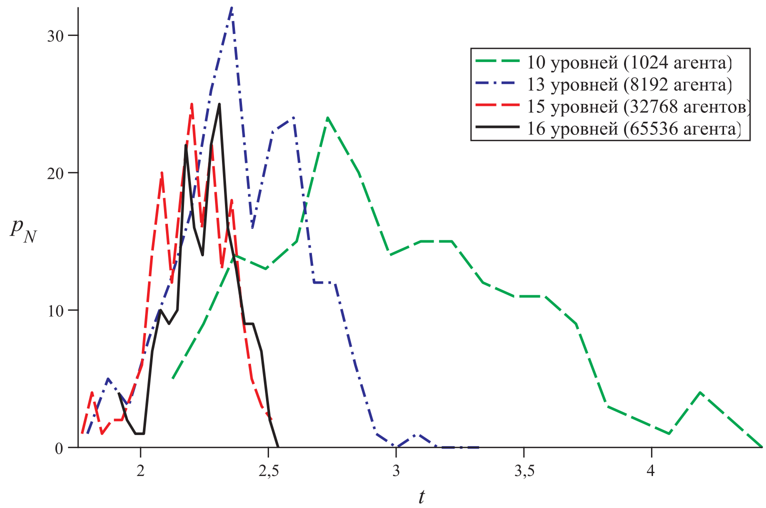

Рис. 3. Функции плотности распределения времен крахов t_c^j для систем с различным числом агентов

Ультраметрическое обобщение иерархической модели финансовых крахов

Одним из недостатков вышеприведенной модели является то, что агенты являются однородными по взаимодействию друг с другом. Такое упрощение не является вполне оправданным, поскольку введение иерархической структуры агентов в модели означает наличие ограниченности доступа одних агентов к информации о действии других. Поэтому целесообразно рассмотреть зависимость степени влияния агентов друг на друга от некоторого расстояния между ними, введенного на данной иерархической структуре.

Определим расстояние между двумя агентами i и j как $d_{i\,j} = m^n$, где m — арность дерева, n — количество уровней дерева до первого общего предка от элементов i и j. Такая метрика является ультраметрикой, то есть $d_{ik} \leq \max\left(d_{ij}, d_{jk}\right)$. В данной модели предполагается, что агенты влияют друг на друга не одинаково, как в предыдущей модели, а их влияние уменьшается с расстоянием. Пусть t_i и t_j — исходные времена действия агентов i и j соответственно, причем $t_i < t_j$. Тогда в момент времени t_i сработает агент i, данная информация поступит к агенту j, и его время действия уменьшится до $t_{i\,j}$, равного

$$t_{i\,j} = t_j - \frac{1}{\left(d_{i\,j}\right)^{\beta}}(t_j - t_i).$$

В результате численных экспериментов было обнаружено, что в некоторой области параметров модели её решения представляют собой самоподобные нелинейные колебания, наложенные на возрастающий тренд (рисунок 4).

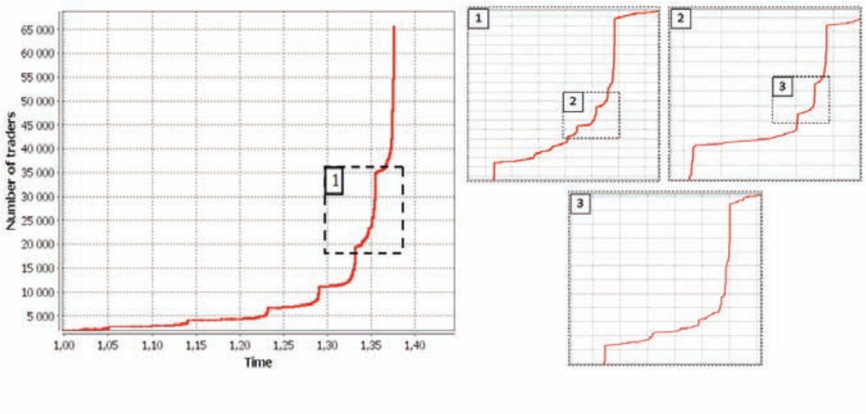

Рис. 4. Самоподобность полученных колебаний на разных временных масштабах

Плотность распределения точек краха также стремится к δ-функции. Сравнение распределений для исходной иерархической модели и ее ультраметрического обобщения приведены на рисунке 5.

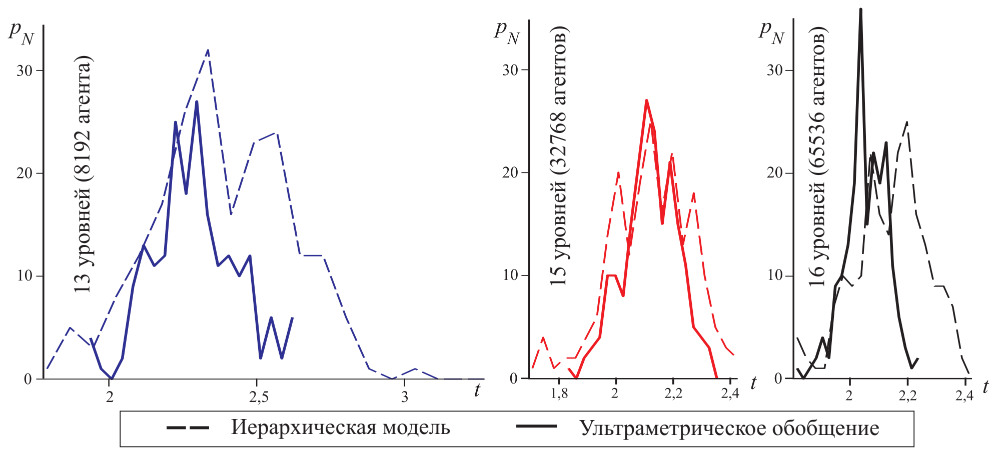

Рис. 5. Сравнение функций плотности распределения времен крахов t_c^j в двух моделях при различном числе агентов

Новая ультраметрическая модель

Следует отметить, что случай влияния сработавшего кластера лишь на соседний кластер является довольно грубым приближением реальных процессов распространения информации на рынке, поскольку влияние агентов друг на друга сильно неоднородно и зависит от взаимного расположения агентов внутри иерархической структуры.

Предположим, что в момент, когда агент с наименьшим временем выставляет свою заявку, информация о его действиях начинает влиять на всех агентов на рынке, однако данное влияние тем меньше, чем дальше в ультраметрическом смысле находятся трейдеры от данного сработавшего агента. Тогда новые времена действия еще не сработавших агентов при условии, что некоторый агент вступил в торговлю в момент времени t_1, определяются соотношением

$$t_i^* = t_i - \frac{1}{(d_{i1})^\beta}(t_i - t_1).$$

Принципиальным отличием данной модели от иерархических моделей, описанных ранее, является то, что влияние агентов начинает учитываться не только при срабатывании некоторого кластера, но присутствует всегда. Каждый сработавший агент сокращает время ожидания всех оставшихся агентов. Таким образом, изначально в модель не вводится никакого порогового влияния, являющегося прямым следствием выбранной схемы распространения влияния в системе. Появление логопериодических колебаний в такой системе не очевидно и будет являться исключительно результатом ее ультраметрической структуры.

Численное исследование данной модели показало, что в малой окрестности критической точки, то есть времени срабатывания всех агентов, наблюдается сильное пороговое изменение количества вступивших в торговлю агентов с увеличивающейся амплитудой и частотой (рис. 6).

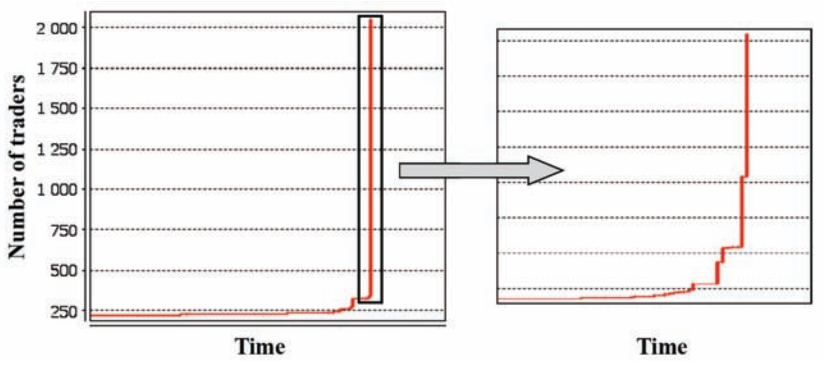

Рис. 6. Количество агентов, выставивших заявку на покупку акций к моменту времени t

Стоит, однако, отметить, что визуальное наблюдение такого поведения затруднено из-за быстрого убывания периода полученных колебаний. На рисунке 7 приведены распределения точек краха в данной модели.

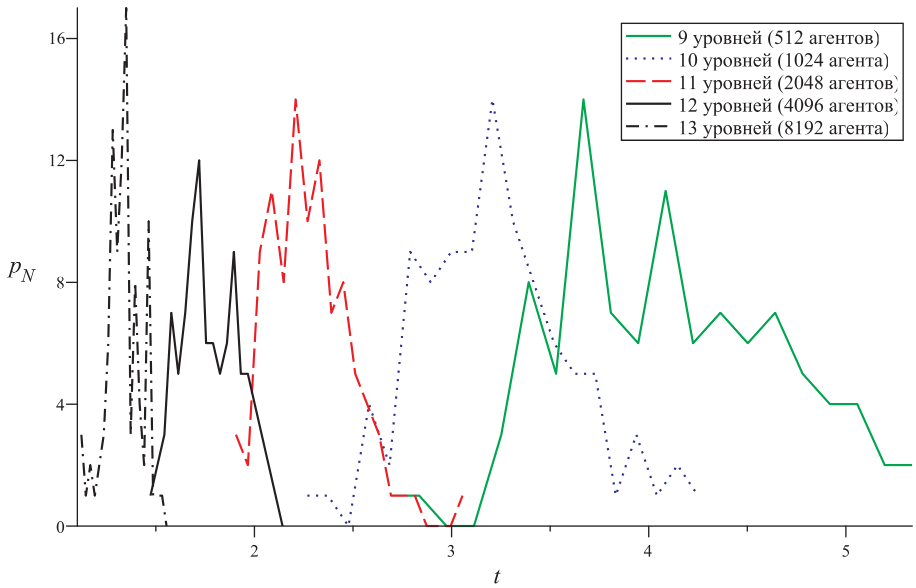

Рис. 7. Функции плотности распределения времен крахов t_c^j для систем с различным числом агентов

Основные результаты и выводы

Модель Джохансена–Сорнетта и ее модификации, приведенные в данной работе, могут рассматриваться как общий подход к моделированию любых иерархически организованных систем, элементы которых оказывают влияние друг на друга, образуя тем самым положительную или отрицательную обратную связь в системе. Численные исследования показали, что распределения точек краха в моделях действительно сужаются при увеличении числа агентов в системе, то есть в системе существует вполне определенная точка краха, положение которой в случае большого числа элементов не зависит от начальной реализации случайных времен покупки агентов. Такой результат говорит о потенциальной возможности предсказания моментов обострения в реальных системах.

Действительно, существующие иерархические системы всегда имеют конечное число элементов, и очень важно на практике найти наиболее быстрый и эффективный метод вычисления положения реальной критической точки в системе. Ультраметрическое обобщение модели Джохансена–Сорнетта показывает, что можно найти способ уменьшить ширину распределения точек краха при данном числе агентов, то есть более точно определить наиболее вероятное время краха. Причем свойство универсальности критической точки при этом будет сохраняться, в противном случае такое обобщение было бы неприменимо к отысканию реальной точки краха.

Разработана также новая ультраметрическая модель, принципиальное отличие которой от двух описанных ранее заключается в способе введения положительной обратной связи в системе. А именно, в отличие от предыдущих моделей изначально не вводится искусственное пороговое влияние. Обнаружение в этой модели динамики в виде скачков с увеличивающейся амплитудой и частотой доказывает, что логопериодические колебания, наблюдаемые в реальных системах, являются следствием их ультраметрической структуры, а не возникают из-за специфического способа влияния элементов системы друг на друга.

Говоря о применимости полученных результатов, стоит заметить, что в последние годы во многих работах было показано [Cont and Bouchaud, 2000], что рассмотрение агентов на финансовом рынке как независимых неприемлемо при построении имитационных моделей рынка. Именно влияние агентов друг на друга объясняет многие хорошо известные статистические свойства финансовых временных рядов, например, наличие тяжелых хвостов в распределении доходностей акций. Таким образом, описываемые модели представляют собой один из способов введения влияния рыночных агентов друг на друга и могут быть использованы при построении компьютерных симуляторов финансовых рынков.

Список литературы

Sornette D., Johansen A. A hierarchical model of financial crashes // Physica A., 1998. — Vol. 261. — P. 581–598.

Sornette D., Johansen A., Bouchaud J. P. Stock market crashes, Precursors and Replicas // Journal de Physique, France, 1996. — Vol. 6. — P. 167–175.

Бикулов А. Х., Зубарев А. П., Кайдалова Л. В. Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и p-адический математический анализ // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, СамГТУ, Самара, 2006. — № 42. — С. 135–140.

Подлазов А. В. Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2009. — № 35. — С. 22.

Huang Y., Ouillon G., Saleur H., Sornette D. Spontaneous generation of discrete scale invariance in growth models // Phys. Rev. E., 1997. — Vol. 55. — P. 6433–6447.

Tostesen E. Dynamics of hierarchically clustured cooperative agents // Cand. Scient. Thesis, University of Copenhagen, 1995.

Cont R., Bouchaud J. P. Herd behavior and aggregate fluctuations in speculative markets // Macroeconomic dynamics, 2000. — Vol. 4, № 2.