

УДК: 51-73

## Математическое моделирование магнитной системы методом регуляризации по А. Н. Тихонову

Р. В. Полякова, И. П. Юдин

Объединенный институт ядерных исследований,  
Россия, 141980, г. Дубна, Московская область

E-mail: polykovarv@mail.ru

Получено 12 июля 2010 г.,  
после доработки 8 июня 2011 г.

В данной работе решается задача поиска конструкции магнитной системы для создания магнитного поля с требуемыми характеристиками в заданной области. На основе анализа математической модели магнитной системы предлагается достаточно общий подход к решению нелинейной обратной задачи, которая описывается уравнением Фредгольма  $H(z) = \int_{S_I} J(s)G(z, s)ds$ ,  $z \in S_H$ ,  $s \in S_I$ . Необходимо определить распределение плотности тока  $J(s)$ , а также расстановку источников тока для создания поля  $H(z)$ . В работе предлагается метод решения этих задач с помощью регуляризованных итерационных процессов. На примере конкретной магнитной системы проводится численное исследование влияния различных факторов на характер создаваемого магнитного поля.

Ключевые слова: магнитные системы, уравнение Фредгольма, метод регуляризации

### Mathematical modelling of the magnetic system by A. N. Tikhonov regularization method

R. V. Polyakova, I. P. Yudin

Joint Institute for Nuclear Research, JINR, Dubna, Moscow Region, 141980, Russia

**Abstract.** — In this paper the problem of searching for the design of the magnetic system for creation a magnetic field with the required characteristics in the given area is solved. On the basis of analysis of the mathematical model of the magnetic system rather a general approach is proposed to the solving of the inverse problem, which is written by the Fredgolm equation  $H(z) = \int_{S_I} J(s)G(z, s)ds$ ,  $z \in S_H$ ,  $s \in S_I$ . It was necessary to define the current density distribution function  $J(s)$  and the existing winding geometry for creation of a required magnetic field  $H(z)$ . In the paper a method of solving those by means of regularized iterative processes is proposed. On the base of the concrete magnetic system we perform the numerical study of influence of different factors on the character of the magnetic field being designed.

Keywords: magnet systems, inverse problem, Fredgolm equation, regularized iterative processes

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 165–175 (Russian).

## Введение

При проектировании магнитных систем необходимо решать обратную задачу, то есть по заданному магнитному полю определять параметры источников — токи или их геометрические характеристики или и то, и другое одновременно.

Определение по заданному полю распределения токов в магнитной системе, геометрия которой известна, является линейной обратной задачей.

Когда же требуемое магнитное поле необходимо создать с помощью проводников, величина тока в которых варьируется так же как и координаты их положения, при условии, что ток во всех проводниках одинаков (элементы с железом в системе отсутствуют), приходим к решению нелинейной обратной задачи. В данной работе рассматривается построение математической модели магнитной системы для такого типа задач, предлагается метод и численный алгоритм их решения, основанный на методе регуляризации по Тихонову [Арсенин, Тихонов, 1979]. Полагаем, что магнитное поле задается какой-либо одной из своих компонент  $(H_x, H_y, H_z)$ , что зависит от конкретной задачи, поэтому в дальнейшем используем просто  $H$  для его обозначения.

## Математическая модель магнитной системы

Пусть в некоторой области  $S_H$  с помощью источников тока, расположенных в области  $S_I$ , необходимо создать поле  $H$  с заданными характеристиками (например, всюду однородное поле в области  $S_H$ ).

Поле в любой точке  $z$  множества  $S_H$  в этом случае определяется уравнением

$$H(z) = \int_{S_I} J(s)G(z, s)ds, \quad z \in S_H, s \in S_I, \quad (1)$$

где  $J(s)$  — функция распределения плотности тока в системе,  $G(z, s)$  — функция Грина, аналитический вид которой зависит от геометрии источников магнитной системы и от точки  $z \in S_H$ . Простой случай обратной задачи, а именно, определение по заданному полю распределения плотностей токов в магнитной системе, геометрия которой известна, является линейной обратной задачей. В этом случае математическая задача сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма I-го рода (1) с неизвестной функцией  $J(s)$ . Если же магнитное поле формировать не только варьированием плотностей тока, но и расстановкой источников тока, то в этом случае приходим к необходимости решать нелинейную обратную задачу с неизвестными  $J(s)$  и  $s \in S_I$ .

## Метод решения обратной задачи

Известно, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма I-го рода (1) относится к классу некорректно поставленных задач, так как малым изменениям входных данных  $H(z)$  могут соответствовать сколь угодно большие изменения в решении  $J(s)$ . Для получения устойчивого решения некорректных задач разработаны регуляризующие алгоритмы [Арсенин, Тихонов, 1979]. Рассмотрим решение задачи (1) методом регуляризации второго порядка гладкости. Для этого строим сглаживающий параметрический функционал

$$F^\alpha[J(s), H(z)] = \Phi[J(s), H(z)] + \alpha \Omega[J(s)], \quad (2)$$

$$\Phi[J(s), H(z)] = \int_{S_H} [H(z) - \int_{S_I} J(s)G(z, s)ds]^2 dz \quad (3)$$

— квадратичное уклонение оператора  $A[z, J(s)] = \int_{S_I} J(s)G(z, s)ds$  от заданной функции  $H(z)$ , а

$$\Omega[J(s)] = \int_S J^2(s)ds \quad (4)$$

— регуляризирующий функционал или стабилизатор и  $\alpha$  — числовой параметр регуляризации ( $\alpha > 0$ ).

В выражении (2), представляя интегралы в виде сумм, получим

$$F^\alpha = \sum_{j=1}^N [H_j(z_j) - \sum_{i=1}^M J_i(s_i)K_{ij}(z_j, s_i)]^2 \Delta z_j + \alpha \sum_{i=1}^M J_i^2(s_i) \Delta s_i, \quad (5)$$

где  $N$  — число точек из множества  $S_H$ ,  $M$  — число точек из множества  $S_I$ ,  $M \leq N$ ,  $K_{ij} = \int_{\Delta s_i} G(z_j, s)ds$ . Полагаем  $\Delta s_i = \Delta s = \text{const}$ ,  $\Delta z_j = \Delta z = \text{const}$ . Условие минимума функционала  $F^\alpha$ :

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial J_1} = 0, \quad \frac{\partial F^\alpha}{\partial J_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F^\alpha}{\partial J_M} = 0. \quad (6)$$

Принимая во внимание (5), получим

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial J_l} = - \sum_{j=1}^N H_j K_{lj} \Delta z + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M J_i K_{lj} K_{ij} \Delta z + \alpha J_l \Delta s = 0, \quad l = 1 \div M. \quad (7)$$

Таким образом, имеем систему  $M$  линейных алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными  $J_l$  вида

$$\sum_{i=1}^M J_i \sum_{j=1}^N K_{lj} K_{ij} \Delta z + \alpha J_l \Delta s = \sum_{j=1}^N H_j K_{lj} \Delta z, \quad l = 1 \div M. \quad (8)$$

Полагая  $\alpha \Delta s = \alpha' \Delta z$ , получим

$$\sum_{i=1}^M J_i \sum_{j=1}^N K_{lj} K_{ij} + \alpha' J_l = \sum_{j=1}^N H_j K_{lj}, \quad l = 1 \div M. \quad (9)$$

Очевидно, что  $\alpha'$  сохраняет смысл произвольного коэффициента  $\alpha$ , поэтому система уравнений для  $J_l$  окончательно запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^M J_i \sum_{j=1}^N K_{lj} K_{ij} + \alpha J_l = \sum_{j=1}^N H_j K_{lj}, \quad l = 1 \div M. \quad (10)$$

Обычно безжелезная магнитная система представляет собой дискретный набор источников тока, то есть катушек (см., например, рис. 1 и 4а), в этом случае поле  $H(z)$  в любой точке  $z \in S_H$  определяется следующим уравнением:

$$H(z) = \sum_{i=1}^M J_i \int_{\Delta s_i} G(z, s)ds, \quad (11)$$

где  $M$  — число катушек,  $J_i$  — плотность тока в  $i$ -й катушке,  $\Delta s_i$  — сечение  $i$ -й катушки,  $G(z, s)$  — функция Грина. Решив систему уравнений (10), получим в этом случае дискретный набор  $J_l$ ,

$l = 1 \div M$ , который является решением задачи (11). Таким образом, определим распределение плотностей токов магнитной системы для создания поля  $H(z_j)$ ,  $j = 1 \div N$ ,  $z_j \in S_H$ . Однако на практике часто необходимо создать поле  $H$  в некоторой области  $S_I$  с помощью расстановки  $M$  источников тока с одинаковым  $I_0$ .

Для такой магнитной системы  $H(z)$ ,  $z \in S_H$ , будет

$$H(z) = I_0 \sum_{i=1}^M G(s_i, z), \quad (12)$$

где  $G(s_i, z)$  — функция Грина для  $i$ -го проводника,  $M$  — число проводников с током. Требуется определить такие ток  $I_0$  и координаты  $s_i$  проводников, которые бы наилучшим образом обеспечивали заданное поле  $H(z)$ ,  $z \in S_H$ .

Функция  $G(s_i, z)$  обычно нелинейна относительно координат проводников  $s_i$ , поэтому рассматриваемая задача является нелинейной обратной задачей.

Дополнительные трудности при решении обратных задач вызывает ограничение на параметры [Морозов, 1967; Поляк, 1969]. Однако в некоторых частных случаях можно эффективно находить решение, удовлетворяющее условиям задачи. Рассмотрим такой случай.

Пусть параметром расположения проводника в области  $S_I$  является только одна координата, например  $x$  (полагаем, что проводники с током расположены на линии  $y = \text{const}$ ), причем допустимая область расположения проводников вдоль оси  $x$  известна,  $x_1 \leq x_i \leq x_2$ .

В этом случае уравнение (12) будет иметь вид

$$H(z) = I_0 \sum_{i=1}^M G(x_i, z), \quad z \in S_H, \quad x_1 \leq x_i \leq x_2. \quad (13)$$

Необходимо определить  $I_0$ ,  $x_i$  для создания в магнитной системе поля  $H(z)$ ,  $z \in S_H$ . Задача (13) является нелинейной обратной задачей.

Решение такой задачи разбиваем на два этапа. На 1-ом этапе считаем, что плотность тока в витках распределяется непрерывно в пределах заданной области. Уравнение (12) в этом случае имеет вид

$$H(z) = \int_{x_1}^{x_2} J(x)G(x, z)dx.$$

Такая задача и алгоритм ее решения рассмотрены выше. При выборе решения  $J^\alpha(x)$ , ( $\alpha$  — параметр регуляризации) учитываем следующие условия задачи:

1. точность вычисления  $H(z)$  не должна быть хуже требуемой точности магнитного поля в создаваемой магнитной системе;
2. во всем допустимом интервале  $[x_1, x_2]$  функция  $J^\alpha(x)$  должна сохранять знак;
3.  $|J^\alpha(x)| \leq J_{\text{доп}}$  — допустимой плотности тока.

Предположим, что существует непрерывное решение  $J^\alpha(x)$ , удовлетворяющее всем трем условиям. На втором этапе разбиваем интервал  $[x_1, x_2]$  на  $M$  подинтервалов  $[x_1^i, x_2^i]$ ,  $i = 1 \div M$ . Тогда:

$$H(z) = \sum_{i=1}^M \int_{x_1^i}^{x_2^i} J^\alpha(x)G(x, z)dx, \quad z \in S_H. \quad (14)$$

Для каждого подинтервала  $[x_1^i, x_2^i]$  выполнены условия теоремы о среднем (так выбиралась функция  $J^\alpha(x)$ ), поэтому

$$H(z_j) = \sum_{i=1}^M G(x_i^j, z_j) \int_{x_1^i}^{x_2^i} J^\alpha(x) dx, \quad j = 1 \div N, \tag{15}$$

где  $N$  — число точек в области  $S_H$ , в которых рассматривается поле  $H$ ,  $x_i^j$  — точка внутри  $i$ -го интервала. Границы  $x_1^i, x_2^i$  выбираются так, чтобы

$$\int_{x_1^i}^{x_2^i} J^\alpha(x) dx = \int_{x_1^{i+1}}^{x_2^{i+1}} J^\alpha(x) dx = I_0, \tag{16}$$

то есть

$$I_0 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} J^\alpha(x) dx}{M},$$

тогда

$$H(z_j) = I_0 \sum_{i=1}^M G(x_i^j, z_j). \tag{17}$$

Очевидно, что для различных  $z_j$  существует своя точка  $x_i^j$ , но по теореме о среднем она всегда находится внутри интервала  $[x_1^i, x_2^i]$ . Это означает, что искомая координата  $x_i$  также находится внутри  $i$ -го интервала и определяется из условия минимума функционала

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{x_1^i}^{x_2^i} J^\alpha(x) G(x, z_j) dx - I_0 G(x_i, z_j) \right]^2, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{x_1^i}^{x_2^i} J^\alpha(x) G(x, z_j) dx - I_0 G(x_i, z_j) \right] \times \frac{\partial G(x_i, z_j)}{\partial x_i} = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} x_1^i \leq x_i \leq x_2^i, \\ G(s_i, z) = & \frac{y - y_i + b}{2} \ln \frac{(x - x_i + a)^2 + (y - y_i + b)^2}{(x - x_i - a)^2 + (y - y_i + b)^2} + \\ & + \frac{y - y_i - b}{2} \ln \frac{(x - x_i - a)^2 + (y - y_i - b)^2}{(x - x_i + a)^2 + (y - y_i - b)^2} + \\ & + (x - x_i + a) \times \left( \operatorname{arctg} \frac{x - x_i + a}{y - y_i - b} - \operatorname{arctg} \frac{x - x_i + a}{y - y_i + b} \right) + \\ & + (x - x_i - a) \times \left( \operatorname{arctg} \frac{x - x_i - a}{y - y_i + b} - \operatorname{arctg} \frac{x - x_i - a}{y - y_i - b} \right), \end{aligned} \tag{20}$$

где  $a$  — полуразмер проводника вдоль  $x$ ,  $b$  — полуразмер проводника вдоль  $y$ .

Таким образом, решение задачи сводится к решению  $M$  последовательных нелинейных уравнений вида (19) с одним неизвестным, причем границы существования решения известны. Отметим, что выше рассмотрены алгоритмы создания магнитной системы с помощью бесконечно тонких проводников. Несложно показать, что при конечных размерах проводника (например,

прямоугольная шина) алгоритмы полностью сохраняются, только в этом случае функция Грина войдет под знак интегрирования по сечению проводника (20).

Далее описывается пример математического моделирования реального сверхпроводящего (СП) дипольного магнита, состоящего из прямоугольных токовых обмоток возбуждения.

## Моделирование реальной магнитной системы

Требуемое магнитное поле предлагаемой магнитной системы создавалось путем подбора положения токовых обмоток при условии, что они запитываются от одного источника питания, и, следовательно, ток во всех проводниках (витках), образующих указанные обмотки, одинаков. На геометрию магнитной системы (см. рис. 1), величину тока в СП витке, а также на характер и величину магнитного поля налагались конкретные условия, вытекающие из возможностей изготовления и использования магнита на ускорителе. Математически задача сводится к классу некорректных задач типа (1) и поэтому решалась методом регуляризации по Тихонову, описанным выше.

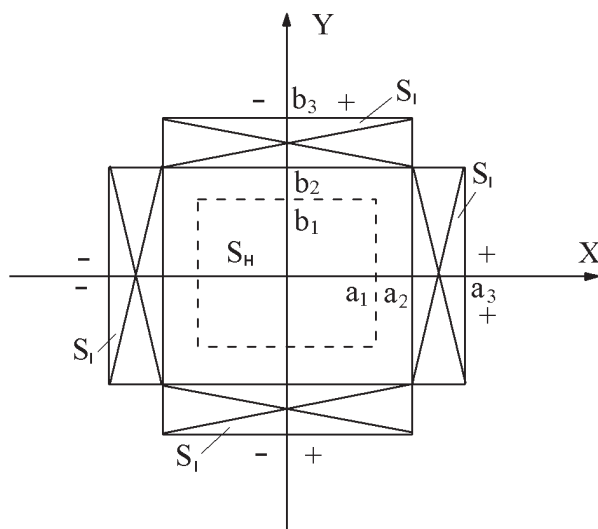


Рис. 1. Геометрия магнитной системы СП-диполя

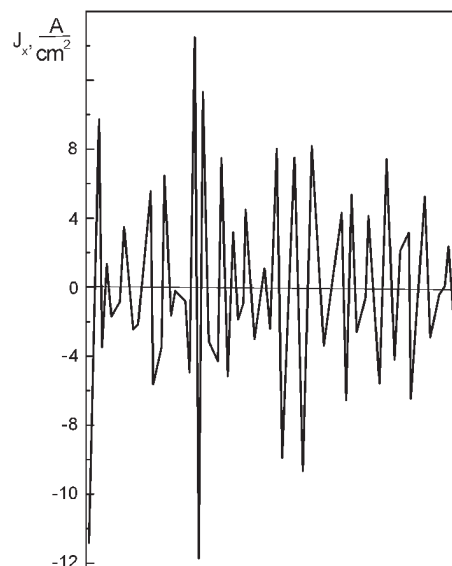


Рис. 2. Решение уравнения Фредгольма

Пусть в апертуре магнита (см. рис. 1) необходимо создать однородное магнитное поле  $\vec{H}(x, y)$  с единственной отличной от нуля компонентой  $H_y(x, y)$ . Предполагаем, что продольные размеры магнита значительно больше поперечных и расчеты не зависят от выбора сечения. Запишем в данном случае известное выражение (закон Био-Савара-Лапласа) для вычисления  $H_y(x, y)$ :

$$\vec{H}_y(x, y) = \iint_{S_I} \frac{J(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - \bar{x}) d\bar{x} \cdot d\bar{y}}{[(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2]^{3/2}} \equiv I_0 \cdot G(\bar{s}, x, y), \quad (21)$$

где  $(x, y) \in S_H$ ,  $\bar{s} \equiv (\bar{x}, \bar{y}) \in S_I$ ,  $I_0$  — величина тока в сечении,  $S_I$ ,  $J(\bar{x}, \bar{y})$  — плотность тока,  $G(\bar{s}, x, y)$  — функция Грина.

Токовая обмотка (область  $S_I$ ) реально состоит из  $m = N_x + N_y$  витков, где  $N_x$  — число витков обмотки вдоль оси  $x$ ,  $N_y$  — число витков обмотки вдоль оси  $y$ . Поперечные размеры витка  $2a = 0,40$  см по ширине и  $2b = 0,15$  см по высоте. Как указывалось выше, плотность тока в

витке постоянна, то есть  $J(x, y) = J_0$ . В этом случае для области  $S_I$ , состоящей из  $m$  одинаковых витков с плотностью тока  $J_0$ , уравнение (21) представим в виде

$$J_0 \cdot \sum_{i=1}^m \int_{x_i-a}^{x_i+a} \int_{y_i-b}^{y_i+b} \frac{(x-\bar{x}) \cdot d\bar{x} \cdot d\bar{y}}{[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2]^{3/2}} = H_y(x, y) \equiv H_0, \quad (22)$$

где  $(x_i, y_i)$  — координаты центра  $i$ -го витка;  $H_0 = \text{const}$  в области  $S_H$ . Таким образом, для решения задачи требуется подобрать  $J_0$  и центры  $(x_i, y_i)$  такие, чтобы  $H_y(x, y) = H_0$  в области  $S_H$ . Такая задача относится к классу нелинейных обратных задач, которые, как известно [Арсенин, Тихонов, 1979], для  $m$  достаточно больших относятся к классу некорректных задач. Решение нашей некорректной задачи сводится к решению плохо обусловленной системы  $2m + 1$  нелинейных уравнений. Чтобы избежать трудностей, связанных с решением таких систем уравнений, проведем решение задачи в два этапа. На первом этапе считаем, что витки закреплены и распределены по обмотке равномерно, а искомой функцией является плотность тока  $J(\bar{x}, \bar{y})$ . Тем самым задача (21) становится линейной. Из ее решения (функция  $J(\bar{x}, \bar{y})$ ) выделяем две части:  $J(\bar{x}) \equiv J(\bar{x}, \bar{y} \equiv \text{const})$ , непрерывную вдоль оси  $x$ , и  $J_y(\bar{y}) \equiv J(\bar{x} \equiv \text{const}, \bar{y})$ , непрерывную вдоль оси  $y$ .

На втором этапе полученные непрерывные распределения  $J_x(\bar{x})$  и  $J_y(\bar{y})$  моделировались с помощью кусочно-постоянных функций — «блоков» при условии постоянства тока в одном витке. («Блоки» формируются из витков стандартных размеров: 0,4 см × 0,15 см.) Как оказалось на практике, составленные таким образом «блочные» функции дают решение задачи (22) со всеми поставленными ограничениями.

I этап. Отметим, что уравнение (21) на этом этапе приобрело вид линейного интегрального уравнения Фредгольма I рода. Задача определения распределения  $J(\bar{x}, \bar{y})$  по известному  $H_y(x, y)$  является неустойчивой и относится к классу некорректно поставленных задач. Это проиллюстрировано на рис. 2, где приведено полученное авторами решение этой задачи одним из обычных методов без введения регуляризации. В дальнейшем задача решалась методом регуляризации по Тихонову. Решение сводилось к определению функции  $J(\bar{x}, \bar{y})$ , минимизирующей сглаживающий функционал  $F^\alpha$ :

$$F^\alpha(J, H) = \Phi[J(\bar{x}, \bar{y}), H_y(x, y)] + \alpha \cdot \Omega[J(\bar{x}, \bar{y})], \quad (23)$$

$$\Phi[J(\bar{x}, \bar{y}), H_y(x, y)] = \iint_{S_H} [H_y(x, y) - \iint_{S_I} J(\bar{x}, \bar{y}) \cdot G(x, y, \bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y}]^2 dx dy \quad (24)$$

— квадратичное уклонение оператора  $\iint_{S_I} J(\bar{x}, \bar{y}) \cdot G(x, y, \bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y}$  от заданной функции  $H_y(x, y) = H_0$  в области  $S_H$ ,  $G(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{(x-\bar{x})}{[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2]^{3/2}}$  в области  $S_I$ ,  $\Omega[J(\bar{x}, \bar{y})] = \iint_{S_I} J^2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y}$  — стабилизирующий функционал,  $\alpha$  — числовой параметр регуляризации ( $\alpha > 0$ ), который выбирается из условия

$$\iint_{S_H} [H_y(x, y) - \iint_{S_I} J(\bar{x}, \bar{y}) \cdot G(x, y, \bar{x}, \bar{y}) d\bar{x}d\bar{y}]^2 dx dy \leq \delta,$$

где  $J^\alpha$  — элемент, на котором при данном  $\alpha$   $F^\alpha$  достигает минимума для данного  $\delta$ .

Для проведения численных расчетов проведем дискретизацию. Запишем предыдущие выражения в следующем виде:

$$F^\alpha = \sum_{j=1}^N \left[ H_j(x_j, y_j) - \sum_{i=1}^M J_i(x_i, y_i) K_{ij}(x_j, y_j, x_i, y_i) \right]^2 + \alpha \cdot \sum_{i=1}^M J_i^2(x_i, y_i) \Delta x \Delta y, \quad (25)$$

где  $(x_i, y_i) \in S_I, (x_j, y_j) \in S_H, N$  — число точек в области  $S_H, M$  — число точек в области  $S_I,$

$$K_{ij} = \int_{x_i-a}^{x_i+a} \int_{y_i-a}^{y_i+a} \frac{(x_j - x) dx dy}{\left[ (x_j - x)^2 + (y_i - y)^2 \right]^{2/3}} = \frac{y_i - y_j + b}{2} \ln \frac{(x_i - x_j + a)^2 + (y_i - y_j + b)^2}{(x_i - x_j - a)^2 + (y_i - y_j - b)^2}. \quad (26)$$

Элементы  $J_i, i = 1, 2, \dots, M,$  минимизирующие  $F^\alpha,$  находились как решение системы уравнений типа (6), (7):

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial J_i} = -2 \sum_{j=1}^N H_j K_{lj} \Delta x \Delta y + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M J_i(x_i, y_i) K_{lj} \Delta x \Delta y + 2\alpha \cdot J_l \cdot \Delta \bar{x} \cdot \Delta \bar{y} = 0. \quad (27)$$

Полагая  $\alpha' \cdot \Delta x \Delta y = \alpha \cdot \Delta \bar{x} \cdot \Delta \bar{y},$  получим

$$\sum_{i=1}^M J_i \cdot \sum_{j=1}^N K_{lj} K_{ij} \cdot \alpha' \cdot J_l = \sum_{j=1}^N H_j \cdot H_{lj}. \quad (28)$$

Параметр  $\alpha'$  выбирается так, чтобы квадратичное уклонение

$$\Phi[J, H] = \sum_{j=1}^N \left[ H_0 - \sum_{i=1}^M J_i^\alpha(x_i, y_i) K_{ij}(x_j, y_j, \bar{x}_i, \bar{y}_i) \right]^2 \Delta x \Delta y$$

было минимальное, такое, что  $\Phi \leq \delta \leq 10^{-6}.$  Здесь  $J_i^\alpha$  — решение (28) при данном  $\alpha', \Delta x = \Delta y = 0,25$  см,  $\Delta \bar{x} = \Delta \bar{y} = 0,055$  см и  $\alpha = \alpha' \cdot 21.$

В таблице 1 приведена зависимость  $\Phi$  от  $\alpha'$  в интервале  $\alpha' = 10^{-8} \div 10^{-16}.$  В качестве наилучшего выбрано  $\alpha' = 10^{-11} (\alpha = 21 \cdot 10^{-11}).$  На рис. 3а, б изображены зависимости  $J_x$  от  $x$  ( $x = 0 \div 3,6$  см;  $y = 4$  см),  $J_y$  от  $y$  ( $x = 4$  см;  $y = 0 \div 3,6$  см), полученные как решение системы (28) при  $\alpha' = 10^{-11}.$

Таблица 1. Зависимость  $\Phi$  — квадрата невязки от параметра регуляризации  $\alpha'$

$\alpha'$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$	$10^{-11}$	$10^{-12}$
$\Phi$	$271 \cdot 10^{-10}$	$79 \cdot 10^{-10}$	$5,5 \cdot 10^{-10}$	$0,14 \cdot 10^{-10}$	$2,6 \cdot 10^{-10}$
$\alpha'$	$10^{-13}$	$10^{-14}$	$10^{-15}$	$10^{-16}$	
$\Phi$	$55 \cdot 10^{-10}$	$876 \cdot 10^{-10}$	$2,8 \cdot 10^{-10}$	$0,354 \cdot 10^{-10}$	

II этап. На втором этапе решения задачи непрерывные распределения  $J_x$  и  $J_y$  моделировались кусочно-постоянными функциями — «блоками». При этом требовалось выполнение следующих условий, вытекающих из практических возможностей изготовления исследуемых магнитов:

- 1) плотность тока во всех блоках постоянна и одинакова:  $J_i = J_0, i = 1, 2, \dots, k, k$  — число блоков;
- 2) каждому блоку должно соответствовать целое число витков, то есть длина каждого блока кратна высоте одного витка  $2b$  (в нашем случае  $2b = 0,15$  см);
- 3) при переходе от непрерывного распределения  $J_x$  и  $J_y$  к кусочно-постоянному необходимо как можно меньше потерять витков.

В первом приближении блоки размещались так, чтобы зазоры между ними соответствовали минимумам на кривых  $J_x, J_y.$  Площади блоков  $S_i$  определялись численным интегрированием



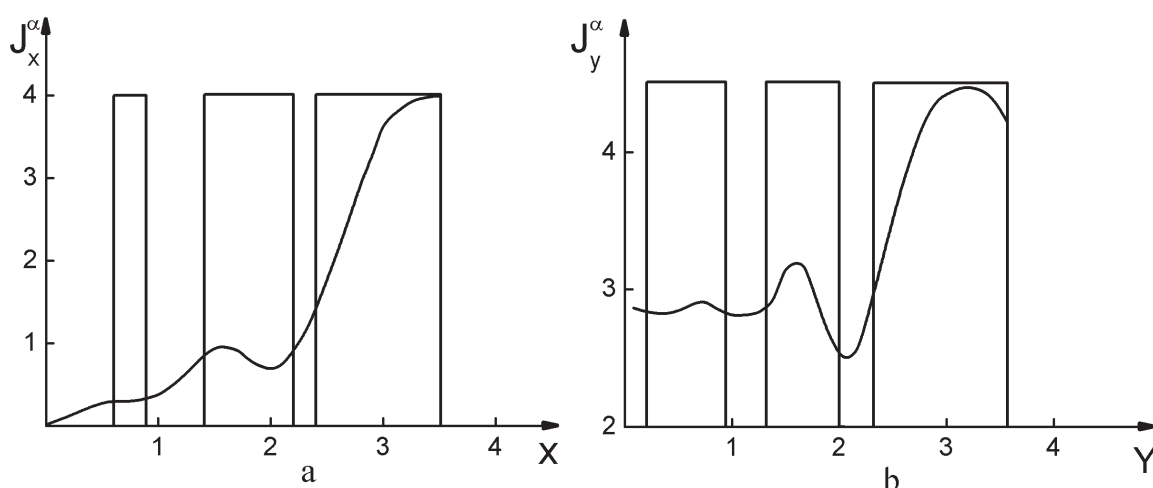


Рис. 3. Непрерывные распределения  $J_x^\alpha(s)$  и  $J_y^\alpha(s)$  и их приближения кусочно-постоянными функциями «блоками»

$J_x, J_y$  по методу трапеций от левого минимума полученного непрерывного распределения  $J_x, J_y$  до правого минимума. Плотности тока в  $i$ -м блоке  $J_i$  определялись как  $J_i = s_i/l_i$ , где  $l_i$  — расстояние между соседними минимумами. Затем из условия  $J_0 = \max J_i, i = 1, 2, \dots, k$ , выбиралась плотность тока  $J_0$ , одинаковая во всех блоках. В этом случае размеры блоков не выходят за рамки  $l_i$ . Далее, так как в каждом блоке должно быть целое число витков, длины блоков  $\tilde{l}_i$  определялись как  $\tilde{l}_i = 0,15 \times N_i$ , где  $N_i$  — целая часть отношения  $s_i / (0,15 \times J_0)$ . В этом первом приближении размещение блоков между всеми минимумами приводит к большим потерям витков.

Наименьшие же потери витков происходят при размещении на каждом из непрерывных распределений  $J_x$  и  $J_y$  трех блоков (см. рис. 3). Размеры блоков магнита с различными конфигурациями приведены в таблице 2. После такого предварительного размещения блоков далее задача решалась с использованием программы FUMILI — минимизации квадратичного функционала. В качестве варьируемых параметров брались координаты центров блоков. Результаты такой минимизации приводятся в таблице 3. На рис. 4 приведена одна из возможных конфигураций реального магнита, в котором однородность поля  $\Delta B/B \leq 1 \cdot 10^{-4}$  в 80% размеров апертуры.

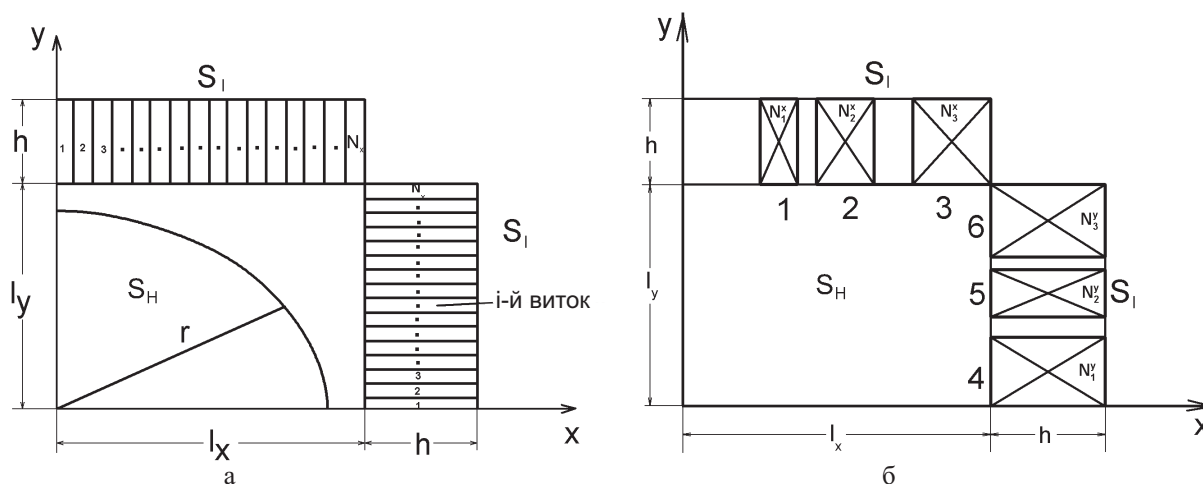


Рис. 4. Конфигурация СП диполя с плоской обмоткой; б — одна из возможных реальных конфигураций СП диполя

Таблица 2. Влияние выбора количества блоков и их размещения на однородность поля внутри апертуры ( $c_2, c_4, c_6$  — гармоники разложения  $H$  в ряд Фурье)

№ вар.	$N_y$ — кол-во витков по $Y$	$N_k$ — кол-во витков по блокам	$N_x$ — кол-во витков по $X$	$N_k$ — кол-во витков по блокам	Средняя относит. точность низших гармоник $c_2, c_4, c_6$
1	24	24	10	6 3 1 три блока	$0,2 \cdot 10^{-1}$ $0,4 \cdot 10^{-2}$ $0,8 \cdot 10^{-4}$
2	24	24-один блок	10	8 1 1 три блока	$0,17 \cdot 10^{-1}$ $0,5 \cdot 10^{-2}$ $0,14 \cdot 10^{-3}$
3	20	9 7 4 три блока	9	4 3 2 три блока	$0,35 \cdot 10^{-2}$ $0,84 \cdot 10^{-3}$ $0,13 \cdot 10^{-2}$
4	20	10 5 5 три блока	9	6 2 1 три блока	$0,4 \cdot 10^{-3}$ $0,5 \cdot 10^{-4}$ $0,4 \cdot 10^{-3}$
5	20	12 8 два блока	9	6 2 1 три блока	$0,4 \cdot 10^{-2}$ $0,1 \cdot 10^{-3}$ $0,9 \cdot 10^{-3}$
6	20	11 5 4 три блока	9	6 2 1 три блока	$0,2 \cdot 10^{-2}$ $0,1 \cdot 10^{-2}$ $0,2 \cdot 10^{-2}$
7	20	10 6 4 три блока	9	6 2 1 три блока	$0,2 \cdot 10^{-2}$ $0,9 \cdot 10^{-3}$ $0,32 \cdot 10^{-4}$

## Заключение

Таким образом, результаты проведенных численных экспериментов позволяют сделать следующее заключение.

1. В работе рассматривается метод решения нелинейных обратных задач, с помощью которых описывается математическая модель безжелезных магнитных систем некоторого класса.
2. Разработанный численный алгоритм, в основу которого положен метод регуляризации решения некорректных задач с ограничениями на искомые параметры, приводит нелинейную задачу типа (14) к решению  $M$  последовательных нелинейных уравнений с одним неизвестным, что позволяет избежать трудностей, связанных с решением системы нелинейных уравнений, к решению которых обычно приводят обратные задачи.
3. С помощью комплекса программ, созданного на основе предложенного численного метода, решены некоторые практические задачи [Жидков и др., 2006], в частности, получен вариант математической модели СП-диполя. Использование безжелезного СП-диполя с прямоугольной геометрией обмотки дает возможность получить высокооднородное магнитное поле величиной 4–5 Тл в 80% размеров апертуры, причем:
  - а) нелинейные эффекты расчетного магнитного поля сравнительно невелики для конфигураций, предложенных к технической реализации;

б) проведенное исследование послужит основой для численного моделирования многослойного безжелезного СП-диполя и его дальнейшей технической реализации.

Таблица 3. Значение координат центров «блоков» по  $x$  и  $y$ , дающих наилучшую относительную точность низших гармоник в разложении однородного поля  $H$

$N_y$	$N_{k_1}$ ⋮ $N_2$ $N_1$	$x = \text{const} = 3.8$			$N_x$	$N_{k_2}$ ⋮ $N_2$ $N_1$	$y = \text{const} = 3.8$			Средняя относительная точность низших гармоник $c_2, c_4, c_6$
		$y_1$	$y_2$	$y_3$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	
20	10 5 5	0.509	1.5972	2.8588	9	6 2 1	1.0017	2.2937	3.1406	$0.3 \times 10^{-6} \div 0.5 \times 10^{-6}$
20	12 8	0.8421	2.6494		9	6 2 1	1.6024	2.2468	3.225	$0.9 \times 10^{-5} \div 0.45 \times 10^{-6}$

### Список литературы

Арсенин В. Я., Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. — М., Наука, 1979.

Морозов В. А. О регуляризирующих семействах операторов // Вычислительные методы и программирование: сб. Вып. 8. — Изд. МГУ, 1967. — С. 63–95.

Поляк Б. Т. Итерационные методы решения некоторых некорректных вариационных задач // Вычислительные методы и программирование: сб. Вып.12. — Изд. МГУ, 1969. — С. 38–52.

Жидков Е. П., Полякова Р. В., Юдин И. П. Регуляризация по А. Н. Тихонову в одной задаче магнитостатики // Математика. Компьютер. Образование: Труды 13-ой международной конференции, Дубна, 2006. — С. 171–177.