**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 1 С. 47–53**

Ки&М

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ**

УДК: 519:63

# Метод потоковой релаксации для решения квазилинейных уравнений параболического типа

**В. А. Усенко[a], А. И. Лобанов[b]**

Московский физико-технический институт (ГУ)
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер, д. 9

E-mail: [a] vladusen@gmail.com, [b] alexey.i.lobanov@gmail.com

*Получено 1 марта 2011 г.*

Предложен численный метод решения квазилинейных уравнений параболического типа, основанный на аппроксимации потоков. Описана реализация метода на прямоугольной сетке. Приведены результаты численных расчетов. В отличие от применяемых методов для данного метода используется аппроксимация потоков на нерасширенном шаблоне. Для каждой итерации метода Ньютона возможно решение линейной задачи с помощью метода верхней релаксации (SOR). По сравнению с методами потоковой прогонки рассмотренный метод обладает большим потенциалом для использования на современных параллельных вычислительных комплексах.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение параболического типа, красно-черное упорядочивание, разностная схема, метод Ньютона, метод верхней релаксации

## Flow relaxation method in solving quasilinear parabolic equations

**V. A. Usenko, A. I. Lobanov**

*Moscow institute of physic and technology (State university)*
*Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, 141700, Russia*

**Abstract.** – This article proposes a numeric method of solution of quasilinear parabolic equations, based on the flux approximation, describes the implementation of the method on a rectangular grid and presents numerical results. Unlike methods used in common practice, this method uses an approximation of flows in non-dilated template. For each iteration of the Newton method it is possible to solve a linear problem using the method of upper relaxation (SOR). Compared with the methods of flux sweeping, the considered method has greater potential for use in modern parallel computing system.

Keywords: parabolic quasilinear equation, red-black ordering, difference scheme, qasilinearization, SOR

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 47–53 (Russian).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант №10-01-00751а и ФЦП «Научные и научно-педагогический кадры инновационной России», контракт №П954.

## Описание метода

Квазилинейные уравнения в частных производных параболического типа встречаются в разнообразных приложениях. Например, они описывают электронный и ионный теплоперенос в плазме [Режимы с обострением..., 1987], процессы в лазерной термохимии [Нестационарные структуры и диффузионный хаос, 1992] и на поверхности платинового катализатора, популяционную динамику [Свирежев, 1987; Белотелов, Лобанов, 1997]. Уравнениями такого типа в некоторых моделях описывается перенос излучения. Последние задачи часто характеризуются сильной анизотропией переносных коэффициентов [Аристова, Гольдин, 1997].

В ряде простых постановок смешанных (начально-краевых) задач для таких уравнений удается найти точное решение. Как правило, это либо автомодельные решения [Режимы с обострением ..., 1987; Куркина, Никольский, 2007], либо неавтомодельные решения, найденные с использованием методов теории групп [Режимы с обострением ..., 1987; Дородницын, Свирщевский, Князева, 1983]. Такие решения качественно описывают основные свойства решений более сложных задач, дают представление об асимптотическом поведении последних. Но при практическом применении математических моделей такого типа становится необходимо численное решение.

Разностные схемы для решения квазилинейных задач для уравнений параболического типа строились на использовании принципа полной консервативности [Режимы с обострением …, 1987]. В [Магомедов, Холодов, 1988] проанализированы некоторые разностные схемы для квазилинейного уравнения теплопроводности в одномерном случае на основе анализа в пространстве неопределенных коэффициентов.

В задачах переноса излучения важно не только правильно вычислять интенсивность излучения, но и потоки энергии. Для корректного учета потоков при решении квазилинейных уравнений используются методы потоковой прогонки [Федоренко, 1994]. Но при использовании методов такого типа на современных высокопроизводительных вычислительных комплексах эффективно распараллелить возможно только прогонки по одному направлению. Для случая нескольких пространственных измерений алгоритмы, основанные на потоковой прогонке, не обладают внутренним параллелизмом.

Разработаны потоковые методы решения квазилинейных уравнений параболического типа в многомерном случае на нерегулярных сетках, основанные на вариационных принципах [Головизнин, Самарский, 1998; Разностные схемы..., 1996]. Отметим, что алгоритмы реализации этих методов в той или иной мере опираются на выполнение прогонок в переменных направлениях и могут быть эффективно реализованы только на вычислительных системах с традиционной (фон-Неймановской) архитектурой.

С целью построения численных методов, допускающих эффективное распараллеливание, разрабатываются различные подходы. Так, в [Коконков, Аристова, 2009] рассматривается вариант метода прямых. Вначале строится разностная аппроксимация дифференциального оператора по пространственным переменным, получившаяся система ОДУ большой размерности решается методом Розенброка.

В данной работе предлагается альтернативный подход. На основе использования простой разностной аппроксимации по времени задача для квазилинейного уравнения параболического типа формально сводится к эллиптической задаче. Для решения эллиптической задачи используется метод релаксации с красно-черным упорядочиванием [Деммель, 2001]. Такой метод обладает значительным потенциалом для распараллеливания.

Для корректного вычисления потоков излучения применяется потоковый вариант метода релаксации.

## Постановка тестовой задачи

Рассмотрим модельное квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{dU}{dt} = \operatorname{div}\left(\kappa \operatorname{grad}\left(U\right)\right) + f\left(U,t\right). \tag{1}$$

В рассматриваемом уравнении $\kappa = U^{\alpha}$ , где $\alpha$ – показатель нелинейности. Известно, что начально-краевая задача для данного уравнения поставлена корректно, если $\alpha \geq -1$ [Режимы с обострением..., 1987]. В качестве тестовой задачи рассмотрим решение Я. Б. Зельдовича в виде распространяющейся с конечной скоростью тепловой волны при $f(U,t)=0$ и $\alpha > 0$. В этом случае уравнение (1) с граничными условиями $u(0,t)=Ct^{1/\alpha}$, $u(+\infty,t)=0$ и начальным условием $u(x,0)=0$ имеет точное решение вида

$$u(x,t)=\begin{cases}[-\alpha V(x-Vt)]^{\alpha}, & x\leq Vt,\\ 0, & x>Vt.\end{cases}$$

Здесь $V=\sqrt{C^{\alpha}/\alpha}$. Данное решение не является классическим, а должно рассматриваться как слабое. Видно, что на фронте тепловой волны первая производная решения может терпеть разрыв.

## Построение численного метода

Для построения численного метода решения уравнения (1) сначала введем дискретизацию по времени:

$$\frac{U^{n+1}-U^{n}}{\tau}=(\operatorname{div}(\kappa^{n+1}\operatorname{grad}(U^{n+1})))+f\left(U^{n+1}\right).$$

Перепишем уравнение в следующем эквивалентном виде:

$$U^{n+1}-\tau\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(K\left(U^{n+1}\right)\right)=\tau f\left(U^{n+1}\right)+U^{n}, \qquad (2)$$

где $K(U)=\int\kappa(U)dU$ — первообразная коэффициента теплопроводности.

В случае если коэффициент теплопроводности к представим в виде $\kappa=\kappa_1(x,t)\cdot\kappa_2(U)$, обозначим $K_2(U)=\int\kappa_2(U)dU$ и будем представлять уравнение (2) в виде

$$U^{n+1}-\tau\operatorname{div}\left(\kappa_1(x,t)\operatorname{grad}\left(K_2\left(U^{n+1}\right)\right)\right)=\tau f\left(U^{n+1}\right)+U^{n}$$

по аналогии с мультипликативным представлением коэффициента теплопроводности при построении численных методов в [Федоренко, 1994].

Разностное уравнение (2) решается с помощью итераций по нелинейности с использованием метода квазилинеаризации (Ньютона). Введем в рассмотрение для рассматриваемой задачи поток $\mathbf{W}=-\operatorname{grad}K(U)$.

Обозначим значение функции на предыдущем шаге по времени $\check{U}$, для краткости опустим индекс шага по времени $n$ + 1, тогда на текущей итерации по нелинейности

$$U^{k}-\tau\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(K\left(U^{k}\right)\right)=\tau f\left(U^{k}\right)+\check{U},$$

где $k$ – номер итерации по нелинейности. Считаем, что значения на итерациях связаны соотношением $U^{k+1}=U^{k}+\delta U$.

Для приращения на каждой итерации по нелинейности с использованием метода Ньютона получим

$$\delta U-\tau\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\kappa\left(U^{k}\right)\right)\delta U-\tau f_{U}'\left(U^{k}\right)\delta U=\check{U}-U^{k}+\tau f\left(U^{k}\right)+\tau\operatorname{div}\operatorname{grad}K(U^{k}) \qquad (3)$$

и дополнительное соотношение для определения приращения потока

$$\delta\mathbf{W}=-\operatorname{grad}\kappa(U^{k})\delta U.$$

Для краткости изложения опишем построение метода потоковой релаксации на прямоугольной разнесенной сетке. На таких сетках температура $U$ относится к центру ячейки, вектор потока – к узлам ячейки, нормальные проекции вектора потока – к центрам соответствующих ребер. Индексы ячейки совпадают с индексами ее левого нижнего узла, индексы граней – с индексами соответствующего левого (нижнего) узла. Используя теорему Гаусса–Остроградского для двумерного случая, можно записать

$$\int\limits_{S_{ij}} \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\kappa\left(U^k\right)\right)\delta U dS_{ij} - \int\limits_{\partial S_{ij}} \operatorname{div}\delta\mathbf{W}d\mathbf{\Gamma}_{ij} =$$

$$= -(-\delta W_{xij}\mathit{\Gamma}_{xij} + \delta W_{xij+1}\mathit{\Gamma}_{xij+1} - \delta W_{yij}\mathit{\Gamma}_{yij} + \delta W_{yi+1j}\mathit{\Gamma}_{yi+1j}) = -\sum_{Ш_{ij}}\delta W\mathit{\Gamma},$$

где $S_{ij}$ – площадь рассматриваемой ячейки $(i, j)$, $\mathit{\Gamma}_{xij}, \mathit{\Gamma}_{xij+1}, \mathit{\Gamma}_{yij}, \mathit{\Gamma}_{yi+1j}$ – длины ребер, а $\delta W_{xij}$, $\delta W_{xij+1}$, $\delta W_{yij}$, $\delta W_{yi+1j}$ – проекции введенного выше потока на нормали к соответствующим ребрам. Аналогично

$$\int\limits_{S_{ij}} \operatorname{divgrad}\left(K\left(U^k\right)\right)dS_{ij} = -\int\limits_{\partial S_{ij}} \operatorname{div}\mathbf{W}^k d\mathbf{\Gamma}_{ij} =$$

$$= -(-W_{xij}{}^k\mathit{\Gamma}_{xij} + W_{xij+1}{}^k\mathit{\Gamma}_{xij+1} - W_{yij}{}^k\mathit{\Gamma}_{yij} + W_{yi+1j}{}^k\mathit{\Gamma}_{yi+1j}) = -\sum_{Ш_{ij}} W^k\mathit{\Gamma}.$$

Проинтегрировав линеаризованное уравнение (3) по ячейке, получим

$$\delta U_{ij}S_{ij} + \tau\sum_{Ш_{ij}}\delta W\mathit{\Gamma} - \tau f_U^{'}\left(U_{ij}{}^k\right)\delta U_{ij}S_{ij} = (\check{U}_{ij} - U_{ij}{}^k + \tau f\left(U_{ij}{}^k\right))S_{ij} - \tau\sum_{Ш_{ij}} W^k\mathit{\Gamma}. \tag{4}$$

Для краткости записи обозначим $\left(\check{U}_{ij} - U_{ij}{}^k + \tau f\left(U_{ij}{}^k\right)\right)S_{ij} = g_{ij}(U^k)$.

Уравнение (4) можно записать в виде

$$\delta U_{ij}S_{ij}\left(1 - \tau f_U^{'}\left(U_{ij}{}^k\right)\right) = \tau\sum_{Ш_{ij}} W^k\mathit{\Gamma} + \tau\sum_{Ш_{ij}}\delta W\mathit{\Gamma} + g_{ij}\left(U^k\right)$$

или

$$\delta U_{ij} = \frac{\tau\sum_{Ш_{ij}} W^k\mathit{\Gamma} + \tau\sum_{Ш_{ij}}\delta W\mathit{\Gamma} + g_{ij}\left(U^k\right)}{S_{ij}\left(1 - \tau f_U^{'}\left(U_{ij}{}^k\right)\right)}. \tag{5}$$

Разностные аппроксимации для определения потоков:

$$\begin{aligned}
\delta W_{xij} &= M_1\kappa_{i,j}^k\delta U_{i,j} + M_2\kappa_{i,j-1}^k\delta U_{i,j-1},\\
\delta W_{xij+1} &= M_3\kappa_{i,j}^k\delta U_{i,j} + M_4\kappa_{i,j+1}^k\delta U_{i,j+1},\\
\delta W_{yij} &= M_5\kappa_{i,j}^k\delta U_{i,j} + M_6\kappa_{i,j-1}^k\delta U_{i-1,j},\\
\delta W_{yi+1j} &= M_7\kappa_{i,j}^k\delta U_{i,j} + M_8\kappa_{i+1,j}^k\delta U_{i+1,j}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $M_i$ – коэффициенты, определяемые формой ячеек. Для расчета на прямоугольной сетке коэффициенты определяются как (на примере $M_1, M_2$)

$$M_{1,2} = \mp\frac{1}{\left|\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{x}_{i,j-1}\right|}.$$

Данную систему уравнений будем решать методом «красно–черной релаксации». При решении уравнения методом «красно–черной релаксации» на каждом шаге по времени ячейки расчетной сетки условно делятся на 2 группы:

$$n+i+j=2l \text{ – красные ячейки,}$$

$$n+i+j=2l+1 \text{ – черные ячейки.}$$

Запишем (5) в виде

$$\frac{\tau\sum\limits_{Ш_{ij}}\overset{s+1}{W^k}\,\Gamma+\tau\sum\limits_{Ш_{ij}}\overset{s+1}{\delta W}\,\Gamma+g\left(U^k\right)}{S_{ij}\left(1-\tau f_U^{'}\left(U_{ij}^{\ k}\right)\right)}-\delta\overset{s+1}{U_{ij}}=\frac{\delta\overset{s+1}{U_{ij}}-\delta\overset{s}{U_{ij}}}{\omega_s}, \tag{7}$$

где $s$ – номер линейной итерации, $\omega_s$ — параметр релаксации.

Нормальные проекции потоков (6) на линейных итерациях определим по правилам

$$\begin{aligned}
\delta\overset{s+1}{W_{xij}}&=M_1\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_2\kappa_{i,j-1}^k\,\delta\overset{s}{U_{i,j-1}},\\
\delta\overset{s+1}{W_{xij+1}}&=M_3\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_4\kappa_{i,j+1}^k\,\delta\overset{s}{U_{i,j+1}},\\
\delta\overset{s+1}{W_{yij}}&=M_5\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_6\kappa_{i,j-1}^k\,\delta\overset{s}{U_{i-1,j}},\\
\delta\overset{s+1}{W_{yi+1j}}&=M_7\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_8\kappa_{i+1,j}^k\,\delta\overset{s}{U_{i+1,j}}
\end{aligned} \tag{8}$$

для «красных» ячеек, и

$$\begin{aligned}
\delta\overset{s+1}{W_{xij}}&=M_1\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_2\kappa_{i,j-1}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j-1}},\\
\delta\overset{s+1}{W_{xij+1}}&=M_3\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_4\kappa_{i,j+1}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j+1}},\\
\delta\overset{s+1}{W_{yij}}&=M_5\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_6\kappa_{i,j-1}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i-1,j}},\\
\delta\overset{s+1}{W_{yi+1j}}&=M_7\kappa_{i,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i,j}}+M_8\kappa_{i+1,j}^k\,\delta\overset{s+1}{U_{i+1,j}}
\end{aligned} \tag{9}$$

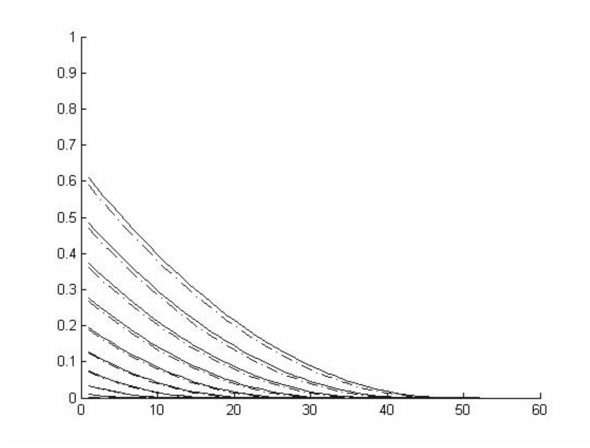
для «черных» ячеек соответственно.

Уравнения (7, 8) и (7, 9) составляют линейную систему уравнений для нахождения потоков и значения расчетной функции в каждой ячейке. Стоит заметить, что на произвольной четырехугольной сетке структура метода остается неизменной, за исключением выражений для аппроксимации потоков. Решая данную систему можно определить как значения температуры, так и значения потоков в каждый из моментов времени.

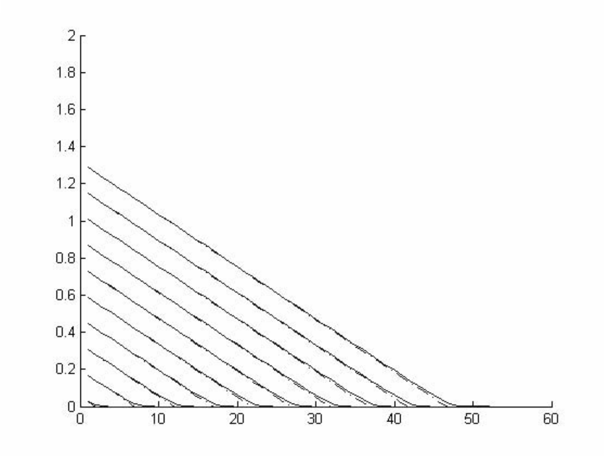
## Результаты расчетов

Были проведены тестовые расчеты задачи о распространении тепловой волны для следующих значений параметра $\alpha$: 0.5, 1, 2.5, 4, 8. Получены формы фронта (рис. 1), распространяющегося с постоянной скоростью для каждого из значений $\alpha$. Отношение шага по времени к шагу по пространству было подобрано таким образом, чтобы фронт тепловой волны за один шаг по времени перемещался приблизительно на половину характерного размера ячейки.

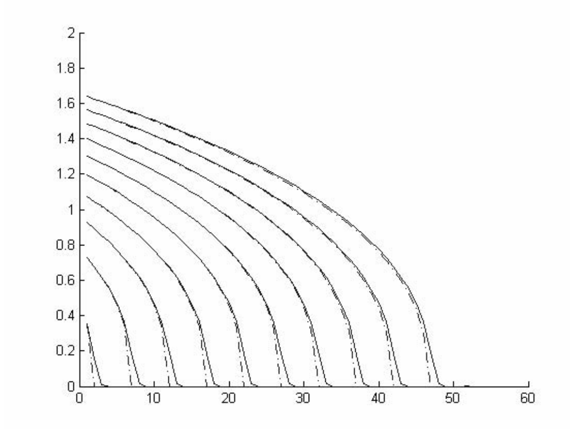
Метод показал хорошую сходимость и точность расчетов. Для данной тестовой задачи допустимая норма погрешности в $L^2$ вычислений на каждой из итераций по нелинейности была принята $\varepsilon_2^C = 10^{-4}$. Для каждого из показателей нелинейности $\alpha$ погрешность расчета приведена в таблице 1.



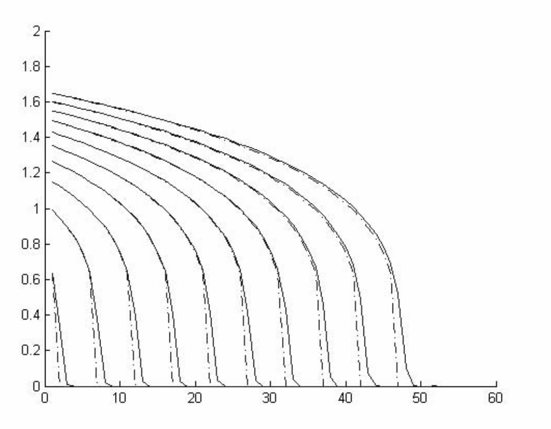
$\alpha = 0.5$



$\alpha = 1.0$



$\alpha = 2.5$



$\alpha = 4.0$

Рис. 1. Форма фронта при различных показателях нелинейности

Таблица 1. Норма разности в $L^2$ численного и точного решения при различных $\alpha$

| **h** | $\alpha$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0.5 | 1.0 | 2.5 | 4.0 | 8.0 |
| 0.02 | 0.018 | 0.020 | 0.033 | 0.037 | 0.034 |
| 0.05 | 0.023 | 0.026 | 0.036 | 0.040 | 0.038 |

В качестве еще одной тестовой задачи рассматривалось распространение плоского фронта по диагонали относительно расположения ячеек сетки. В этом случае на двух смежных границах задается в качестве граничных условий автомодельное решение. На остальных границах в качетсве условия используется нулевой сток ($U \equiv 0$).

Численное решение в один из моментов времени приведено на рис. 2.

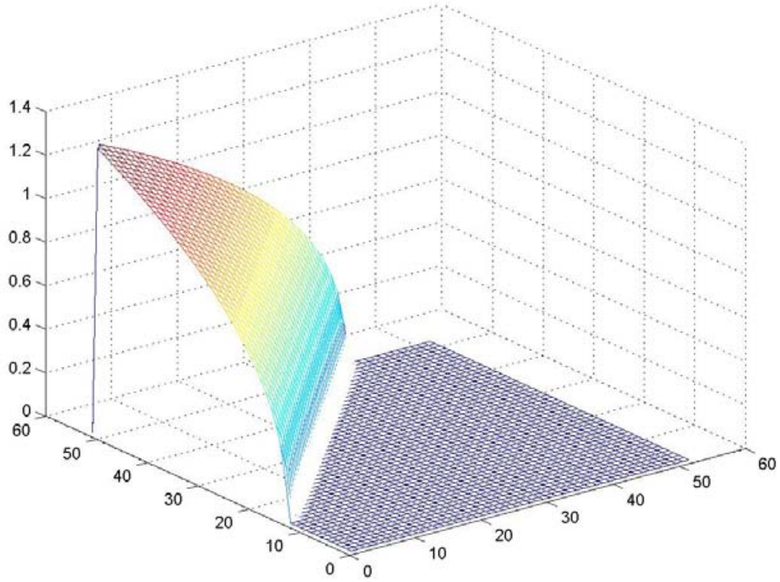



Рис. 2. Распространение фронта по диагонали. Показатель нелинейности $\alpha = 4.0$, $h = 0.05$

## Литература

*Аристова Е. Н., Гольдин В. Я.* Метод учета сильной анизотропии рассеяния в уравнении переноса // Математическое Моделирование. – 1997. – Т. 9, № 6. – С. 39–52.

*Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992.

*Белотелов Н. В., Лобанов А. И.* Популяционные модели с нелинейной диффузией // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 12. – С. 44–56.

*Головизнин В. М., Самарский А. А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. – 1998. – С.86–100.

*Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 432 с.

*Дородницын В. А., Свирщевский С. Р., Князева Е. Н.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 7. – С. 1215–1223.

*Коконков Н. И., Аристова Е. Н.* Схема Розенброка для двумерного нестационарного нелинейного уравнения теплопроводности // Математика. Компьютер. Образование. – 2009.

*Куркина Е. С., Никольский И. М.* Асимптотические свойства решений нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником // Математика. Компьютер. Образование. – 2007. – Т. 2. – 392 с.

*Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

*Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнении. – М.: Наука, 1987. – 480 с.

*Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Фаворский А. П.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. – Минск: ЗАО «Критерий», 1996.

*Свирежев Ю. М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

*Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. – 504 с.