КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 1 С. 39–45

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.91.1

Орбиты в задаче двух тел с симметрийной точки зрения

Г. Н. Яковенко

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: yakovenko_g@mtu-net.ru

Получено 07 марта 2011 г.

Для задачи двух тел вычисляется 12-параметрическая группа симметрий, преобразования которой переводят очевидное решение — равномерные движения тел по круговым орбитам с общим неподвижным центром — в движения с произвольными начальными данными.

Ключевые слова: задача двух тел, преобразование симметрии, эллиптическая орбита, параболическая орбита, гиперболическая орбита

Orbits in the two-body problem in terms of symmetries

G. N. Yakovenko

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutsky street, Dolgoprudny, 141700, Russia

Abstract. — For the two-body problem computed 12-parameter group symmetry transformations which translate the obvious solution — uniform motion of bodies in circular orbits with a common fixed center — a motion with arbitrary initial data.

Keywords: two-body problem, a symmetry transformation, elliptical orbit, the parabolic orbit, hyperbolic orbit

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 39–45 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00228) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (проект 2.1.1/3604).

Введение

Две материальные точки с массами m_1 и m_2 взаимодействуют только друг с другом, и это взаимодействие происходит по закону всемирного тяготения. Положения точек определяют радиус–векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, отложенные от неподвижной в системе отсчета точки O. Введем вектор $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, проведенный от второй точки к первой. Динамика точек задается уравнениями [Маркеев, 2007; Яковенко, 2006]

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\gamma \frac{m_2}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \gamma \frac{m_1}{\rho^3}\boldsymbol{\rho},$$

где γ — всемирная постоянная. Цель работы: построить 12-параметрическую группу симметрий, преобразования которой переводят очевидное решение, например, равномерные движения по круговым орбитам с общим неподвижным центром, в движения с произвольными начальными данными. Из приведенных уравнений следуют уравнения

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_C = 0, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2 r^3}\boldsymbol{r}$$

для радиус–вектора $\boldsymbol{r}_C = \overline{OC}$, определяющего положение центра инерции C системы, и для радиус–вектора $\boldsymbol{r}$, определяющего положение первой точки в кёниговой системе, перемещающейся поступательно вместе с центром инерции C [Маркеев, 2007; Яковенко, 2006]:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \boldsymbol{r} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right).$$

Любые результаты (симметрии, движения, законы сохранения), полученные для векторов $\boldsymbol{r}_C$ и $\boldsymbol{r}$ могут быть перенесены на точки $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$: $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_C - m_1\boldsymbol{r}/m_2$. Поведение $\ddot{\boldsymbol{r}}_C = 0$ центра инерции в нормальном виде определяется уравнениями $\dot{x}_{Ci} = y_{Ci}$, $\dot{y}_{Ci} = 0$, $i = 1, 2, 3$, с очевидной 6-параметрической группой симметрий $\widehat{t} = t$, $\widehat{x}_i = x_i + a_i + b_i t$, $\widehat{y}_i = y_i + b_i t$, $i = 1, 2, 3$. Дальнейшее изложение будет посвящено симметриям уравнений движения материальной точки в кёниговой системе.

Поведение первой материальной точки в кёниговой системе определяется векторным уравнением

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где обозначено $\mu = \gamma \dfrac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$. Требуется определить решения $\boldsymbol{r}(t)$ уравнения (1), соответствующие начальным данным $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}^0$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \dot{\boldsymbol{r}}^0 = \boldsymbol{V}^0$. Фиксируем правую ортогональную декартову систему координат с началом C в центре инерции и спроектируем на ее оси уравнение (1):

$$\ddot{x}_i = -\mu \frac{x_i}{r^3}, \qquad i = \overline{1, 3}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Введением дополнительных переменных $y_i = \dot{x}_i$ придадим системе нормальный вид:

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = -\mu \frac{x_i}{r^3}, \qquad i = \overline{1, 3}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{2}$$

Требуется исследовать решения $x_i(t)$, $y_i(t)$ системы (2) при произвольных начальных данных $x_i(0) = x_i^0$, $y_i(0) = y_i^0$.

Вариационные симметрии

Система (2) допускает группу симметрий

$$\tilde{t} = t, \qquad \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k, \qquad \tilde{y}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} y_k, \qquad i = \overline{1,\, 3}, \tag{3}$$

где $A = \|a_{ik}\|$ — ортогональная матрица: $AA^T = E$, $\det A = 1$. Действительно, замена переменных (3) в системе (2) с учетом $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = r$ (следствие ортогональности матрицы $A = \|a_{ik}\|$) приводит к системе

$$\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{y}_i, \quad \dot{\tilde{y}}_i = -\mu \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{r}^3}, \qquad i = \overline{1,\, 3}, \qquad \tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}$$

с такими же правыми частями, как и у системы (2), что соответствует определению группы симметрий системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде [Овсянников, 1978; Олвер, 1989; Яковенко, 2002]. Другое эквивалентное определение [Овсянников, 1978; Олвер, 1989; Яковенко, 2002]: группа симметрий переводит любое решение $x_i(t)$, $y_i(t)$ системы (2) в ее же решение $\tilde{x}_i(t)$, $\tilde{y}_i(t)$.

Группа (3) есть трехпараметрическая группа Ли. Ее параметризацию можно ввести, представив ортогональные матрицы $A(\tau^1,\, \tau^2,\, \tau^3)$ $(AA^T = E)$ следующим образом [Маркус, Минк, 1972]:

$$A = e^B = E + B + \frac{1}{2} B^2 + \cdots , \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\tau^3 & \tau^2 \\ \tau^3 & 0 & -\tau^1 \\ -\tau^2 & \tau^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

— кососимметрическая матрица.

Группа (3) определяет **вариационные симметрии** [Овсянников, 1978; Олвер, 1989; Яковенко, 2004] движений в поле всемирного тяготения: для соответствующей движениям функции Лагранжа

$$L(x,\, y) = T - \Pi = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{3} y_k^2 + \frac{m\mu}{r} \tag{6}$$

и группы (3) выполняется $L(\tilde{x},\, \tilde{y}) = L(x,\, y)$. По теореме Эмми Нётер [Овсянников, 1978; Олвер, 1989; Яковенко, 2004] трехпараметрическая группа вариационных симметрий порождает законы сохранения — три первых интеграла системы (2):

$$w_1 = m(-x_3 y_2 + x_2 y_3), \qquad w_2 = m(x_3 y_1 - x_1 y_3), \qquad w_3 = m(-x_2 y_1 + x_1 y_2). \tag{7}$$

Коэффициенты в (7) при $m y_i$ вычисляются в соответствии с теоремой Эмми Нётер как коэффициенты

$$\left.\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tau_j}\right|_{\tau=0} = \sum_{k=1}^{3} \left.\frac{\partial a_{ik}(\tau)}{\partial \tau_j}\right|_{\tau=0} x_k = \sum_{k=1}^{3} \left.\frac{\partial b_{ik}(\tau)}{\partial \tau_j}\right|_{\tau=0} x_k$$

инфинитезимальных операторов. Учтено, что $\partial a_{ik}(0)/\partial \tau_j = \partial b_{ik}(0)/\partial \tau_j$ (см. (4), (5)).

Правые части в (7) — проекции кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ на координатные оси, то есть вектор $\boldsymbol{K}_O = m[\boldsymbol{r},\, \dot{\boldsymbol{r}}] = m[\boldsymbol{r}^0,\, \dot{\boldsymbol{r}}^0]$ сохраняется при движении как следствие вариационных симметрий (3). Далее предполагаем, что для начальных условий выполняется $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{r}^0,\, \dot{\boldsymbol{r}}^0] \neq 0$.

Из (7) следует равенство

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0, \tag{8}$$

постоянные коэффициенты w_i в котором вычисляются из (7) по начальным данным. Равенство (8) показывает, что любое движение в поле всемирного тяготения происходит в плоскости, проходящей через начало координат C и начальные данные $\boldsymbol{r}^0$, $\dot{\boldsymbol{r}}^0$. Свяжем с плоскостью движения правый ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$: орт $\boldsymbol{e}_1$ направим по начальному радиус-вектору $\boldsymbol{r}^0$; орт $\boldsymbol{e}_2$ расположим в плоскости движения перпендикулярно орту $\boldsymbol{e}_1$ так, чтобы выполнялось $(\dot{\boldsymbol{r}}^0, \boldsymbol{e}_2) > 0$; орт $\boldsymbol{e}_3$ определим по формуле $\boldsymbol{e}_3 = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$. Существует единственное ортогональное преобразование $\boldsymbol{i}_j = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{jk}\boldsymbol{e}_k$ $(a_{jk} = (\boldsymbol{i}_j, \boldsymbol{e}_k))$, переводящее базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в базис $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, связанный с координатной системой x_1, x_2, x_3. Преобразование переведет плоскость (8) и движение $\boldsymbol{r}(t)$ на ней в плоскость $x_3 = 0$ и в движение с начальными данными x_1^0, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 0$, y_1^0, y_2^0, $y_3^0 = 0$, в силу выбора ортов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ выполняется $x_1^0 > 0$, $y_2^0 = (\dot{\boldsymbol{r}}^0, \boldsymbol{e}_2) > 0$.

Дивергентные симметрии

Далее предполагаем, что движению в поле всемирного тяготения соответствуют начальные данные

$$x_1^0 > 0, \qquad x_2^0 = 0, \qquad x_3^0 = 0, \qquad y_1^0, \qquad y_2^0 > 0, \qquad y_3^0 = 0, \tag{9}$$

и движение происходит в плоскости (8): $x_3 = 0$ (постоянные w_i в (8) вычислены в соответствии с (7) и (9)). При движении в плоскости можно ввести полярные координаты r, φ и спроектировать уравнение (1) на радиальное и трансверсальное направления [Яковенко, 2006]:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \qquad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \tag{10}$$

Если умножить второе уравнение на r, то результат представим в виде $d(r^2\dot{\varphi})/dt = 0$, то есть второе уравнение в (10) влечет закон сохранения

$$r^2\dot{\varphi} = c = x_1^0 y_2^0 > 0, \tag{11}$$

который подтверждает сохранение выраженной в полярных координатах величины кинетического момента [Яковенко, 2006].

В системе (10) сделаем переход от независимой переменной t и искомых функций $r(t)$, $\varphi(t)$ к независимой переменной φ и искомым функциям

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}, \qquad t(\varphi) \tag{12}$$

(штрихом обозначена производная по φ):

$$u'' + u = \frac{\mu}{c^2}, \qquad t' = \frac{1}{cu^2}, \qquad c' = 0. \tag{13}$$

Первое уравнение — уравнение Бине (вторая формула Бине), подробности вывода см. в [Яковенко, 2006]; второе уравнение — иначе записанный закон сохранения (11); третье уравнение подчеркивает, что выражение $r^2\dot{\varphi} = c$ из (11) не меняется во время движения (но зависит от начальных данных). Введением дополнительной переменной $v = u'$ придадим системе (13) нормальный вид:

$$u' = v, \qquad v' = -u + \frac{\mu}{c^2}, \qquad t' = \frac{1}{cu^2}, \qquad c' = 0. \tag{14}$$

Определим несколько групп симметрий системы (14). Первые два уравнения в (14) — замкнутая линейная неоднородная система. Добавление к какому-нибудь ее решению произвольного решения соответствующей однородной системы приводит к решению системы (14). Другими словами, группа

$$\tilde{u} = u + \tau_4 \cos\varphi, \qquad \tilde{v} = v - \tau_4 \sin\varphi \tag{15}$$

— группа симметрий первых двух уравнений в (14). Распространим группу (15) на третье уравнение в (14). На основе двух первых интегралов

$$w_4 = \left(u - \frac{\mu}{c^2}\right)\cos\varphi - v\sin\varphi, \qquad w_5 = \left(u - \frac{\mu}{c^2}\right)\sin\varphi + v\cos\varphi \tag{16}$$

первых двух уравнений в (14) сделаем в (14) переход $u,\ v,\ t,\ c,\ \varphi \leftrightarrow w_4,\ w_5,\ t,\ c,\ \varphi$ к новым переменным:

$$w'_4 = 0, \qquad w'_5 = 0, \qquad c' = 0, \qquad t' = \frac{1}{c\left(w_4\cos\varphi + w_5\sin\varphi + \dfrac{\mu}{c^2}\right)^2}. \tag{17}$$

Интегрирование при $t(0) = 0$ последнего уравнения в (17) приводит к результату $t(\varphi) = F(w_4,\ w_5,\ \varphi)$, где обозначено

$$F(w_4,\ w_5,\ \varphi) = \frac{1}{c}\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(w_1\cos\varphi + w_2\sin\varphi + \dfrac{\mu}{c^2}\right)^2}. \tag{18}$$

Учет группы (15) приводит к следующей группе симметрий системы (17):

$$\tilde{w}_4 = w_4 + \tau_4, \qquad \tilde{w}_5 = w_5, \qquad \tilde{c} = c, \qquad \tilde{t} = t + F(w_4 + \tau_4,\ w_5,\ \varphi) - F(w_4,\ w_5,\ \varphi).$$

Возврат к исходным переменным $u,\ v,\ t,\ c,\ \varphi$ определяет группу симметрий системы (14):

$$\begin{gathered} \tilde{u} = u + \tau_4\cos\varphi, \qquad \tilde{v} = v - \tau_4\sin\varphi, \qquad \tilde{c} = c, \\ \tilde{t} = t + \{F(w_4 + \tau_4,\ w_5,\ \varphi) - F(w_4,\ w_5,\ \varphi)\}|_{w_4,\, w_5}. \end{gathered} \tag{19}$$

Входящая в (19) функция $F(\cdot,\ \cdot,\ \cdot)$ введена равенством (18).

Первое уравнение в (13) — уравнение Лагранжа, а группа $\tilde{u} = u + \tau_4\cos\varphi$ (см. (15)) — **группа дивергентных симметрий** [Овсянников, 1978; Олвер, 1989; Яковенко, 2004], следствием чего является первый интеграл w_4 в (16). Первый интеграл w_5 в (16) есть следствие группы дивергентных симметрий $\tilde{u} = u + \tau\sin\varphi$. Отметим, что первые интегралы w_1 — w_5 (см. (7), (16)) — интегральный базис независящих от t (стационарных) первых интегралов: любой другой стационарный первый интеграл есть функция от них. Нестационарный первый интеграл $w_6 = F(w_4,\ w_5,\ \varphi)|_{w_4,\, w_5} - t$ (функция $F(w_4,\ w_5,\ \varphi)$ введена в (18)) дополняет до полного набора w_1 — w_6 первых интегралов, эквивалентного общему решению системы (2). Группа симметрий (19) переводит решения системы (14) в ее же решения. В качестве исходного решения рассмотрим

$$u(\varphi) \equiv 1, \qquad v(\varphi) \equiv 0, \qquad c = \sqrt{\mu}, \qquad t(\varphi) = \varphi/\sqrt{\mu}. \tag{20}$$

Такое решение с учетом $r = 1/u$ (см. (12)) приводит к равномерному движению по окружности единичного радиуса: $r(t) \equiv 1$, $\varphi(t) = t\sqrt{\mu}$ — круговой орбите. Подстановка решения (20) в уравнения (19) группы определит однопараметрическое семейство траекторий $\tilde{u}(\varphi) = 1 + \tau_4\cos\varphi$ или в полярных координатах ($r = 1/u$):

$$r(\varphi,\ \tau_4) = \frac{1}{1 + \tau_4\cos\varphi} \tag{21}$$

— конические сечения с фокусом в точке C, с фокальным параметром равным 1 и с эксцентриситетом равным $|\tau_4|$. Время t в силу (18) и (19) на каждом луче $\varphi = \mathrm{const}$ преобразуется следующим образом:

$$t(\varphi,\, \tau_4) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \tau_4 \cos\varphi)^2}. \tag{22}$$

Решению (20) соответствуют следующие начальные данные в декартовых координатах:

$$t_0 = 0, \quad x_1^0 = r_0 = \frac{1}{u_0} = 1, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = \frac{c}{x_1^0} = \sqrt{\mu}, \quad y_3^0 = 0. \tag{23}$$

Группа (19) переводит (23) в начальные данные

$$t_0 = 0, \quad x_1^0 = \frac{1}{1 + \tau_4}, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = \sqrt{\mu}(1 + \tau_4), \quad y_3^0 = 0. \tag{24}$$

При $|\tau_4| < 1$ траектории (21) — эллипсы, которым соответствуют большие полуоси a и периоды обращения T (см. (21), (22)):

$$\begin{gathered} a = \frac{1}{2}\{r(0,\, \tau_4) + r(\pi,\, \tau_4)\} = \frac{1}{1 - \tau_4^2}, \\ T = t(2\pi,\, \tau_4) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \tau_4 \cos\varphi)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu(1 - \tau_4^2)^3}}. \end{gathered} \tag{25}$$

При $|\tau_4| = 1$ траектория (21) — парабола, при $|\tau_4| > 1$ — гиперболы.

Конформные симметрии

Вид уравнений (14) наводит на мысль поискать конформные симметрии [Яковенко, 2004; Ибрагимов, 1983] $\tilde{u} = \lambda_1(\tau_5)u$, $\tilde{v} = \lambda_2(\tau_5)v$, $\tilde{t} = \lambda_3(\tau_5)t$, $\tilde{c} = \lambda_4(\tau_5)c$, $\tilde{\varphi} = \lambda_5(\tau_5)\varphi$ системы (14), то есть при подстановке указанных преобразований в (14) множители $\lambda_i(\tau_5)$ должны сократиться. Достаточно простой анализ приводит к следующей **группе конформных симметрий**:

$$\tilde{u} = ue^{-2\tau_5}, \qquad \tilde{v} = ve^{-2\tau_5}, \qquad \tilde{t} = te^{3\tau_5}, \qquad \tilde{c} = ce^{\tau_5}, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi. \tag{26}$$

Суперпозиция двух групп симметрий (19) и (26) приводит к следующему двухпараметрическому тиражированию круговой орбиты

$$r(\varphi,\, \tau_4,\, \tau_5) = \frac{e^{2\tau_5}}{1 + \tau_4 \cos\varphi}. \tag{27}$$

Растяжение (26) размеров и времени следующим образом определит для эллиптических орбит (в (27) $|\tau_4| < 1$) большие полуоси a и периоды обращения T:

$$\begin{gathered} a = \frac{1}{2}\{r(0,\, \tau_4,\, \tau_5) + r(\pi,\, \tau_4,\, \tau_5)\} = \frac{e^{2\tau_5}}{1 - \tau_4^2}, \\ T = t(2\pi,\, \tau_4)e^{2\tau_5} = \frac{e^{3\tau_5}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \tau_4 \cos\varphi)^2} = \frac{2\pi e^{3\tau_5}}{\sqrt{\mu(1 - \tau_4^2)^3}}. \end{gathered} \tag{28}$$

Суперпозиция групп симметрий (19) и (26) переведет начальные данные (23) круговой орбиты в следующие начальные данные в декартовых координатах:

$$t_0 = 0, \quad x_1^0 = \frac{e^{2\tau_5}}{1+\tau_4}, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = \sqrt{\mu}(1+\tau_4)e^{-\tau_5}, \quad y_3^0 = 0. \tag{29}$$

Из (29) видно, что выбором параметров τ_4, τ_5 можно добиться любого начального положения $x_1^0 > 0$ на оси x_1 и любой начальной скорости $y_2^0 > 0$, параллельной оси x_2. Соответствующие начальным данным (29) конические сечения (27) симметричны относительно оси x_1. Переменная φ — циклическая переменная в уравнениях (13) и (14), поэтому уравнения (13) и (14) допускают еще одну группу вариационных симметрий

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \tau_6, \qquad \tilde{u} = u, \qquad \tilde{v} = v, \qquad \tilde{c} = c, \qquad \tilde{t} = t \tag{30}$$

— подгруппу ортогональных преобразований (3). Суперпозиция трех групп симметрий (19), (26) и (30) переведет круговую орбиту единичного радиуса в семейство конических сечений

$$r(\varphi,\, \tau_4,\, \tau_5,\, \tau_6) = \frac{e^{2\tau_5}}{1+\tau_4\cos(\varphi-\tau_6)}. \tag{31}$$

Траекториям (31) соответствуют следующие начальные данные в декартовых координатах:

$$\begin{gathered} t_0 = 0, \quad x_1^0 = \frac{e^{2\tau_5}}{1+\tau_4\cos\tau_6}, \quad x_2^0 = 0, \quad x_3^0 = 0, \\ y_1^0 = -\sqrt{\mu}\tau_4 e^{-\tau_5}\sin\tau_6, \quad y_2^0 = \sqrt{\mu}(1+\tau_4\cos\tau_6)e^{-\tau_5}, \quad y_3^0 = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Три параметра τ_4, τ_5, τ_6 дают возможность создать в (32) любые значения для $x_1^0 > 0$, y_1^0, $y_2^0 > 0$ и, соответственно, — любое движение, лежащее в плоскости $x_3 = 0$ и имеющее «фамилию, имя, отчество» $x_1^0 > 0$, y_1^0, $y_2^0 > 0$. Трехпараметрическая группа (3) ортогональных преобразований «возвратит» плоскость $x_3 = 0$ и траектории на ней в первоначальное положение, не меняя расстояния и соответствующие точкам траектории моментов времени.

Список литературы

Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 280 с.

Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 572 с.

Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1972. — 232 с.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. — 639 с.

Яковенко Г. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». —2002. — Вып. 3. — С. 40–83 (http://www.neva.ru/journal).

Яковенко Г. Н. Краткий курс аналитической динамики — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 238 с.

Яковенко Г. Н. Краткий курс теоретической механики — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 128 с.