**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 1 С. 31–37**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9, 517.4, 519.64

Задача интегральной геометрии с мероиндукцией

А. В. Коганов

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр. д. 36, корп. 1

E-mail: koganow@niisi.msk.ru

Получено 01 марта 2011 г.

Предлагается новая постановка задачи интегральной геометрии, в которой образ функции в каждой точке получается путем ее интегрирования по мере, зависящей от точки. Такую систему мер назовем мероиндукцией. Показано, что для класса мероиндукций, имеющих единичный атом в соответственной точке каждой меры и ограниченных на всем пространстве, существует устойчивая асимптотическая формула обращения. Это обобщает полученные ранее результаты для усреднений по системам измеримых разбиений и для весовых усреднений на графах.

Ключевые слова: интегральная геометрия, мера, пространство функций, линейные операторы, формулы обращения

The task of integral geometry with measure induction

A. V. Koganov

*Science research institute of System analyze of Russian Academy of Sciences (SRISA RAS),
Nakhimovsky st. 36 build 1, Moscow,117218, Russia*

Abstract. – A new statement of Integral Geometry problem where the image of function in each point is taken as an integral with respect to measure which depends on the point is suggested. Such Measure System is named Measure Induction. It is shown that an inversion formula exists for class of measures having a unit atom in corresponding point and limited on whole space. Previously obtained results for average on systems of measurement dissections and for weight average on graphs are generalized.

Keywords: integral geometry, measure, functional space, linear operators, inversion formulas

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 31–37.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00041а).

1. Введение

Традиционные методы интегральной геометрии решают задачу восстановления функции на области конечномерного действительного пространства по значению ее интегралов на всех *k*-плоскостях, пересекающих эту область. При этом используется аппарат классического функционального анализа [Гельфанд и др., 1962; Гельфанд и др., 2000]. В данной работе предлагается новый тип операторов усреднения функции. Каждой точке сопоставляется мера на всем пространстве. И образом функции является функция на том же пространстве аргумента, равная в каждой точке интегралу по соответственной мере. Доказывается, что при наложении определенных ограничений на такую систему мер существует оператор восстановления исходной функции по ее образу. Этот оператор может быть определен как предел некоторой последовательности интегральных операторов, примененных к образу функции.

Систему мер, удовлетворяющих упомянутым требованиям, будем называть мероиндукцией. В работах [Коганов, 2005; Коганов, 2005а] автором предложены условия восстановления функции по системе ее усреднений на элементах заданной последовательности разбиений пространства аргумента с заданной мерой. В работе [Граев, Коганов, 2008] предложен метод весового усреднения функций на подмножествах счетного множества, допускающий обращение асимптотической формулой. Формула обращения для мероиндукции является прямым обобщением этого метода на любые пространства аргумента с заданной сигма-алгеброй. При этом вместо системы весов задается система мер. Однако обобщение потребовало иного математического аппарата для описания метода и нового доказательства формулы обращения.

2. Мероиндукция и интегральное преобразование

Следующие определения задают строгую постановку задачи, решаемой в данной статье.

Определение 1. *Мероиндукцией* $[T, S, \mu]$ на множестве T с сигма-алгеброй подмножеств S назовем семейство μ мер на этой сигма-алгебре, сопоставляющее каждой точке $t \in T$ меру μ_t на всем T, которая удовлетворяет условиям:

A1) $\mu_t\{t\} = 0$;

A2) $\mu_t\{T\} < \eta < 1$ для всех $t \in T$;

A3) для любого $V \in S$ функция $\psi(x) = \mu_x(V)$ измерима по S.

Атомарным расширением мероиндукции назовем семейство мер ν_t, $t \in T$, каждая из которых получена добавлением атома $\nu_t\{t\} = 1$ к мере μ_t:

$$\nu_t\{V\} = \begin{cases} \mu_t(V), & t \notin V, \\ \mu_t(V) + 1, & t \in V. \end{cases} \tag{1}$$

Продолжением мероиндукции по транзитивности назовем семейство мер $\{\mu_{t,k} | t \in T, k \in \mathbb{N}\}$ вида

$$\mu_{t,k}(V) = \iint\limits_{x_1,\ldots,x_k \in T} d\mu_t(x_1) d\mu_{x_1}(x_2) \ldots d\mu_{x_{k-1}}(x_k) \mu_{x_k}(V), \tag{2}$$

$$\mu_{t,0}(V) =_{def} \mu_t(V).$$

Ядро этого усреднения обозначим

$$d\mu_t(x_1,\ldots,x_k) = d\mu_t(x_1) d\mu_{x_1}(x_2) \ldots d\mu_{x_{k-1}}(x_k). \tag{2a}$$

Заметим, что в силу условий А2 и А3 интегралы (2) существуют. Двойной знак интеграла здесь и далее означает нужную кратность интеграла в соответствии с числом переменных интегрирования.

Определение 2. *Интегральным преобразованием* по мероиндукции называется оператор h, действующий на функциях вида $f: T \to \mathbb{R}$ и определенный формулой

$$hf(t) = F(t) = f(t) + \int_{y \in T} f(y) d\mu_t(y) = \int_{y \in T} f(y) d\nu_t(y). \tag{3}$$

Область определения оператора составляют те функции, для которых определены все указанные интегралы при $t \in T$. Задача заключается в построении обратного оператора, который восстанавливает функцию $f(.)$ по заданной функции $F(.)$. Такой оператор называется формулой обращения для данного интегрального преобразования.

3. Формула обращения

Аппарат построения оператора обращения интегрального преобразования (3) основан на следующем утверждении.

Лемма 1. *На классе функций, измеримых по S и равномерно ограниченных на всем T, оператор интегрального преобразования определен и образ функции измерим, равномерно ограничен на T и интегрируем по любой мере из транзитивного продолжения мероиндукции.*

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_{y \in T} f(y) d\mu_t(y).$

Тогда $hf(t) = F(t) = f(t) + \varphi(t)$.

Поскольку $f(t)$ суть функция S, измеримая и суммируемая по всем мерам из транзитивного расширения, то достаточно доказать эти свойства для второго слагаемого $\varphi(t)$. По определению $|\varphi(t)| < M\eta < \infty$, $M = \sup\{|f|\}$, для всех $t \in T$. Поэтому из измеримости будет следовать суммируемость по любой ограниченной мере. По определению интеграла Лебега $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, где

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-2^n M}^{2^n M} \frac{k}{2^n} \mu_t \left\{ x \left| \frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n} \right. \right\}.$$

Все эти функции измеримы на S как конечные суммы измеримых функций по свойству А3. Тогда и функция $\varphi(t)$ измерима как монотонный предел последовательности измеримых функций. □

Эта лемма позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *На классе функций, измеримых по S и равномерно ограниченных на всем T, оператор интегрального преобразования определен и обратим. Формула обращения имеет вид сходящегося ряда*

$$f(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_{k-1}(t), \tag{4}$$

где

$$C_k(t) = \int_{y \in T} F(y) d\mu_{t,k}(y). \tag{5}$$

Доказательство будет следовать из нижеследующей леммы. При этом удобно будет пользоваться развернутой формулой с отождествлением $t = x_0$

$$C_k(t) = \iint\limits_{x_1,\ldots,x_k,\, y\in T} d\mu_t(x_1)d\mu_{x_1}(x_2)\ldots d\mu_{x_{k-1}}(x_k)d\mu_{x_k}(y)F(y). \tag{5a}$$

Лемма 2. *Для каждого четного натурального* $n\in\{2;4;\ldots\}$ *и любого* $t\in T$ *выполнено равенство*

$$f(t) = F(t) + \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k C_{k-1}(t)\right) + R_n(t), \tag{6}$$

где в обозначениях (2a)

$$R_n(t) = \iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} f(x_n)d\mu_t(x_1,\ldots,x_n). \tag{7}$$

Доказательство. Из определения (5a) следует:

$$\iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} C_1(x_n)d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) = C_{n+1}(t). \tag{8}$$

Из определения (7) следует:

$$\iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} R_2(x_n)d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) = R_{n+2}(t). \tag{9}$$

Из определения (3) следует:

$$f(t) = F(t) - \int\limits_{x\in T} f(x)d\mu_t(x). \tag{10}$$

Выразим значения под интегралом в формуле (10) итерацией этой же формулы:

$$f(t) = F(t) - \int\limits_{x\in T} F(x)d\mu_t(x) + \iint\limits_{x,y\in T} f(y)d\mu_t(x,y) = F(t) - C_1(t) + R_2(t). \tag{11}$$

Это соответствует (6) при $n = 2$.

Индукция по n. Допустим для некоторого произвольного четного n справедливость выражении (6), (7). Тогда подставим (11) в (7) под интегралом и используем (8) и (9).

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} (F(x_n) - C_1(x_n) + R_2(x_n))d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) = \\ &= \iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} F(x_n)d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) - \iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} C_1(x_n)d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) + \\ &+ \iint\limits_{x_1,\ldots,x_n\in T} R_2(x_n)d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) = C_n(t) - C_{n+1}(t) + R_{n+2}(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Подставим равенство (12) в (6) и получим выражение (6) для $n+2$. Индукция завершена. □

Доказательство теоремы 1. Достаточно доказать, что в выражении (6)

$$R_n(t) \to 0\big|_{n\to\infty}. \tag{13}$$

Поскольку по условию теоремы функция $f(.)$ равномерно ограничена, то имеется

$$\sup\{|f(t)|\,|\, t\in T\} = M \in [0;\infty). \tag{14}$$

Из (14) и условия А2 получаем оценку:

$$\left|R_n(t)\right| = \iint\limits_{x_1,\ldots,x_n \in T} f(x_n)\, d\mu_t(x_1,\ldots,x_n) < M\eta^n \to 0\big|_{n\to\infty}. \qquad (15)$$

□

Таким образом доказана формула обращения (4), (5) для интегрального преобразования (3). Исследуем устойчивость этого оператора к погрешностям исходных данных.

4. Устойчивость формулы обращения

Пусть исходные данные (3) известны с некоторой ограниченной сверху погрешностью $\xi(t)$:

$$P(t) = F(t) + \xi(t), \qquad (16)$$

$$\left|\xi(t)\right| < \varepsilon. \qquad (17)$$

Теорема 2. *В условиях* (16), (17) *погрешность восстановления функции ограничена сверху и оценивается как*

$$\left|q(t) - f(t)\right| < \frac{\varepsilon}{1-\eta}. \qquad (18)$$

Доказательство. Обозначим результат обращения (4), (5) для данных (16):

$$q(t) = P(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C_{k-1}^*(t), \qquad (19)$$

где

$$\begin{aligned} C_k^*(t) &= \iint\limits_{x_1,\ldots,x_k, y \in T} d\mu_t(x_1) d\mu_{x_1}(x_2) \ldots d\mu_{x_{k-1}}(x_k) d\mu_{x_k}(y) P(y) = \\ &= \iint\limits_{x_1,\ldots,x_k, y \in T} d\mu_t(x_1,\ldots,x_k,y) F(y) + \iint\limits_{x_1,\ldots,x_k, y \in T} d\mu_t(x_1,\ldots,x_k,y)\xi(y) = \\ &= C_k(t) + \delta_k(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\left|\delta_k(t)\right| < \eta^{k+1}\varepsilon. \qquad (20)$$

Тогда из (4), (20) погрешность восстановленной функции (19) оценивается геометрической прогрессией, что даёт оценку (18)

$$\delta(t) = \left|q(t) - f(t)\right| < \delta = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k = \frac{\varepsilon}{1-\eta}.$$

□

Оценка (18) абсолютной погрешности восстановления функции равномерна по всему классу приближенных исходных данных с заданной верхней оценкой (17) абсолютной погрешности интегрального преобразования. Оценить соответствующую относительную погрешность $\lambda(t) = \left|\delta(t)/f(t)\right|$ равномерно по этому классу исходных данных нельзя. Она зависит от абсолютного значения искомой функции в точке. Связь равномерных оценок абсолютной и относительной погрешностей для исходных данных и для результата обращения (обозначение со штрихом) задается такими формулами:

$$\lambda \le \varepsilon / \inf\left\{\left|P(t)\right| \mid t \in T\right\};\ \lambda' \le \varepsilon' / \inf\left\{\left|f(t)\right| \mid t \in T\right\};$$

$$\varepsilon \le \lambda \cdot \sup\left\{\left|P(t)\right| \mid t \in T\right\};\ \varepsilon' \le \lambda' \cdot \sup\left\{\left|f(t)\right| \mid t \in T\right\}.$$

В тех случаях, когда искомая функция или её образ могут принимать нулевые значения, оценка соответствующей относительной погрешности являются неограниченной. Поскольку $\left|q(t)\right| - \delta \le \left|f(t)\right| \le \left|q(t)\right| + \delta$, то

$$\lambda'(t) \le \begin{cases} \delta / (\left|q(t)\right| - \delta)\,;\ \delta < \left|q(t)\right|, \\ \infty;\ \delta \ge \left|q(t)\right|. \end{cases}$$

5. Заключительные замечания

Полученная формула обращения обладает хорошей вычислительной устойчивостью (18) к погрешности исходных данных и экспоненциальной сходимостью (15) по числу членов ряда, несмотря на низкую обусловленность исходной задачи. Это делает её практически удобной в тех случаях, когда имеются необходимые данные об усреднениях искомой функции в прикладных задачах. Однако необходимо знать, что усреднения происходят по мере, удовлетворяющей условиям мероиндукции A1–A3, (1), (3). В этой связи надо проанализировать эти условия с прикладной точки зрения.

Пространство T, на котором определена искомая функция $f(.)$, и сигма-алгебра S на этом пространстве обычно известны из содержательной постановки задачи. Условия A1, A2, (1) могут быть удовлетворены, если в реальной ситуации мера усреднения θ_t, которая соответствует точке $t \in T$, имеет атом $\theta_t(\{t\})$ в точке t, и, кроме того,

$$\theta_t(T \setminus \{t\}) / \theta_t(\{t\}) < \eta < 1. \tag{21}$$

Тогда можно ввести нормировку для произвольного подмножества $u \in S$

$$\nu_t(u) = \theta_t(u) / \theta_t(\{t\}), \tag{22}$$

$$\mu_t(u) = \nu_t(u \setminus \{t\}). \tag{23}$$

Эти меры образуют мероиндукцию.

Предполагается, что для всех $t \in T$ известны усреднения функции по исходной мере

$$\Phi(t) = \int_T f(x) d\theta_t(x). \tag{24}$$

Тогда можно рассчитать эквивалентные исходные данные (3) для мероиндукции

$$F(t) = \Phi(t) / \theta_t(\{t\}). \tag{25}$$

Примером прикладной ситуации, где возникает указанная постановка, может служить задача восстановления четкого изображения при слабой расфокусировке на фотоснимке. Мера усреднения $\theta_t(u)$ выражает световую энергию, которая попадает в пиксель точки t вместо области u в результате расфокусировки при съемке равномерного фона единичной яркости. Атом $\theta_t(\{t\})$ соответствует энергии, которая при этом верно фокусируется на этом пикселе. Эти данные надо получить, изучая аппаратуру и условия съемки. Для реального снимка исходное значение $\Phi(t)$ по (24) соответствует фактической яркости каждого пикселя, а восстановленная функция $f(t)$ означает верную яркость при идеальной резкости. Если меры θ_t точно не известны, но известен класс гипотез о них, то можно решать задачу оптимизации четкости изображения, реализуя восстановление $f(t)$ для разных гипотез о мероиндукции. От этих данных по формулам (22), (23), (25) можно перейти к стандартной постановке задачи и воспользоваться решениями (4), (5).

Список литературы

Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. – М.: Добросвет, 2000. – 208 с.

Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции, т. 5. Интегральная геометрия и связанные проблемы теории представлений. – М.: Физматгиз, 1962.

Граев М. И., Коганов А. В. Алгоритмы восстановления функции через ее усреднения по подмножествам // Программные продукты и системы, приложение к международному журналу «Проблемы теории и практики управления». – 2008. – №4. – С. 33–38.

Коганов А. В. Интегральная геометрия на системах покрытий. // Математические исследования, НИИСИ РАН, сб. трудов под редакцией акад. В. Б. Бетелина, 2005. С. 197–230.

Коганов А. В. Комбинаторные методы интегральной геометрии // Сб. “Математика. Компьютер. Образование”, вып. 12, часть 2. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.–Ижевск, 2005а. – С. 746–758.