

УДК 517.972; 519.6; 539.3

Континуальные трансформирующиеся оболочки из тонких пластин

В. А. Грачев, Ю. С. Найштут

Самарский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 443001, г. Самара, Молодогвардейская ул., д. 194

E-mail: neustadt99@mail.ru

Получено 10 февраля 2011 г.

Изучаются трансформирующиеся системы, собранные из трапециевидных пластин. При развертывании пакета пластинок образуется сетчатая оболочка с шестигранными ячейками. Доказывается, что при определенных соотношениях размеров граней в шестизвенниках появляются дополнительные внутренние степени свободы. Если же используются тонкие пластинки, то континуальная аппроксимация развернутой сети может интерпретироваться как оболочка с широким набором локальных кривизн. Строится кинематика континуальной модели методом подвижного репера Картана. Изучается механическое поведение континуальных сетей, если цилиндрические шарниры между пластинами выполнены из пластических материалов, обладающих памятью формы. Исследуются переходы оболочек из одной равновесной формы в другую. Показаны возможные практические применения континуальных сетей.

Ключевые слова: континуальные трансформирующиеся оболочки, репер Картана, пластические материалы, память формы, устойчивое равновесие, практическое применение

Continuum deployable shells made of thin plates

V. A. Grachev, Yu. S. Nayshtut

Samara State Architectural and Building University, 194 Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443096, Russia

Abstract. – This paper covers deployable systems assembled from trapezium plates. When the plate package is unwrapped, a net shell with six loop cells is formed. It is proved that additional degrees of freedom appear in case of certain correlation between the sizes of the six loop faces. When thin plates were used, the continuum approximation of the deployed net could be interpreted as a shell with a wide variety of local curvatures. Kinematics of the continuum model is analyzed by the method of Cartan moving hedron. Mechanical behavior of continuum nets is studied when cylindrical hinges between the plates are completed of shape memory plastic materials. The paper researches into shell transformations from one stable form to the other. Various practical applications of the continuum nets are demonstrated.

Keywords: continuum deployable shells, Cartan moving hedron, plastic materials, shape memory, stable equilibrium, practical application

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 3–29.

В последние десятилетия проявляется повышенный интерес к развертывающимся (трансформирующимся) механическим системам. Отличаясь большим конструктивным разнообразием, трансформирующиеся механизмы можно без видимых усилий «упаковать в небольшой ящик», а после развертки ограничить ими значительный объем [Pellegrino, 1992; Melin, Workman, 2000; Schenk et al., 2007; Luchsinger et al., 2004; Chen Y., You Z., 2008; Leung, Guest, 2007; Gan, Pellegrino, 2005; Figliolini et al., 2007; Nawratil, 2007].

Появление новых высокопрочных материалов позволяет применять трансформирующиеся оболочки во многих областях техники – от строительства и архитектуры до биотехнологий. В Интернете имеется множество сайтов [см. приложение], где постоянно демонстрируются новые технические достижения.

Следует отметить одно характерное свойство известных к настоящему моменту развертывающихся систем. С кинематической точки зрения трансформирующиеся системы – это классические машины, то есть набор абсолютно твердых тел, соединенных цилиндрическими или шаровыми шарнирами таким образом, чтобы «внутренние степени свободы» позволяли получить в ходе трансформации требуемую геометрию механизма. Следовательно, для развертывания применяемых систем конструктивное исполнение звеньев несущественно: можно наделить детали любой жесткостью, а «внутренние степени свободы» реализовать с помощью достаточного количества шарниров.

Между тем, современные технологии дают возможность построить механизмы иной природы. Если в качестве звеньев использовать упругоподатливые (на кручение и изгиб) тонкие пластинки, то в системе появляются дополнительные степени свободы, позволяющие осуществить трансформацию системы, не являющейся механизмом в классическом понимании. При этом затраты энергии на трансформацию минимальны, а несущая способность развернутой системы достаточно высока. Описанию одного из вариантов таких механизмов посвящается настоящий обзор. Представленные в статье системы состоят из пространственных шестизвенников, которые при произвольных соотношениях размеров не являются механизмами. Поэтому вначале выделяются шестизвенники, имеющие внутренние степени свободы. Затем строится кинематика континуальной модели, аппроксимирующей конечномерную сеть из шестизвенников. Эта модель называется в дальнейшем континуальной сетью (или континуальной оболочкой). Изучается механическое поведение континуальных сетей, если цилиндрические шарниры между пластинами являются идеально пластическими (либо материал шарниров обладает памятью формы).

Континуальные оболочки из пластин под действием внешних и внутренних воздействий могут находиться в различных устойчивых равновесных формах. Исследуются переходы из одной равновесной формы в другую. Завершается обзор иллюстрацией возможных применений континуальных сетей в технике.

1. Кинематика трансформирующихся оболочек, собранных из трапециевидных пластинок

Хорошо известно: если образовать сеть, склеив несколько бумажных шестизвенников, состоящих из одинаковых прямоугольных пластинок (показано на схеме 2, рис. 1), а затем развернуть образовавшийся пакет, то средние линии пластинок образуют плоскость. Тот же результат получится, если пакет склеивать не из шестизвенников, а из прямолинейных полос, составленных из шарнирно соединенных прямоугольников (схема 1, рис. 1).

Сеть является механизмом при любом числе составляющих ее пластинок с произвольно выбранными размерами сторон, так как шарнирный шестиугольник имеет на плоскости шесть степеней свободы, а каждая склеенная грань отнимает три степени свободы.

Если заменить в ячейке недеформирующиеся прямоугольники на трапеции, соединив их как ранее цилиндрическими шарнирами, то собранная из них сеть не развернется (шестизвенник из абсолютно твердых деталей является почти всегда неизменяемым телом).

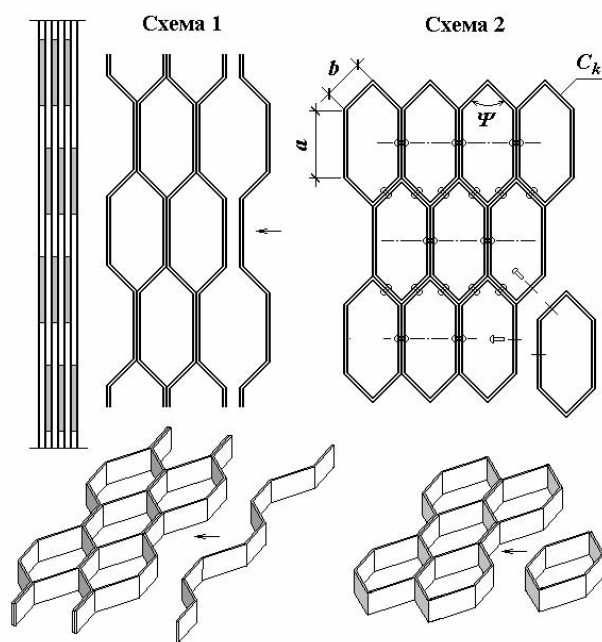


Рис. 1

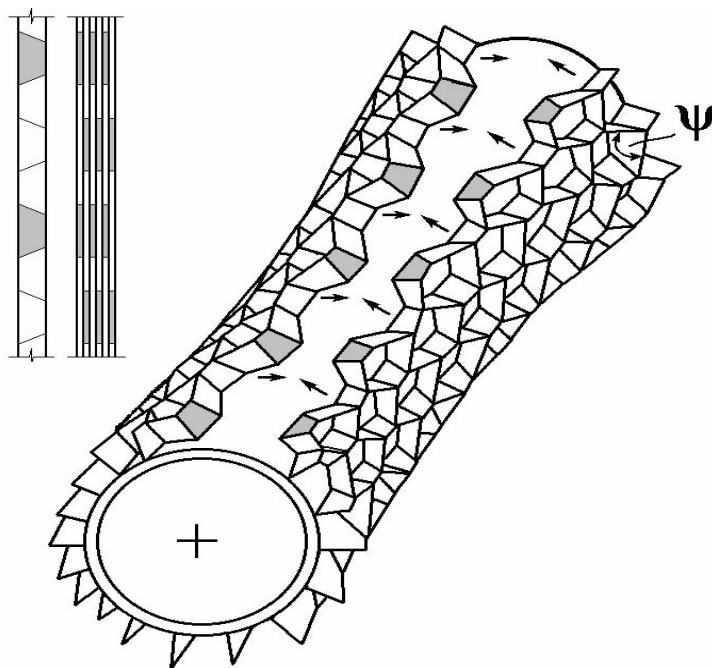


Рис. 2

Если же принять, что ячейка является симметричной (состоит из двух типов деталей), а пластинки – тонкие (их жесткость на изгиб и кручение мала), то пакет можно развернуть в оболочку (рис. 2).

Изобретателями представленной конструкции являются М. Swank (USA) [Swank, 1990] и В. А. Грачев (Россия) [Грачев, Найштут, 1992]. В работах [Грачев, Найштут, 1995, 1996] развиты основы механики трансформирующихся систем, составленных из одинаковых пластинок трапециевидной формы. В настоящей статье и содержащиеся в работе [Грачев, Найштут, 1999] эти построения излагаются с общих геометрических позиций, что позволяет рассмотреть с единой точки зрения более широкие классы трансформирующихся оболочек.

В последующем изложении будем называть шестизвенник зеркально симметричным, если он симметричен относительно двух плоскостей ($\alpha_1 O n$, $\alpha_2 O n$) и составлен из двух типов трапеций (светлых и темных), соединенных цилиндрическими шарнирами (рис. 3). Вектор \mathbf{n} перпендикулярен векторам α_1 , α_2 .

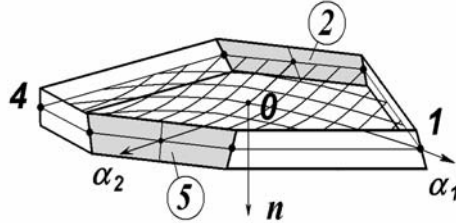


Рис. 3

Вначале убедимся, что зеркально симметричный шестизвенник является механизмом с одной степенью свободы, а поверхность, построенная на серединах его граней (изображена сеткой), служит аппроксимацией гладкой оболочки с координатными линиями α_1, α_2 .

С этой целью детальнее рассмотрим ячейку, показанную с необходимыми проекциями на рис. 4. Цифрами в кружках обозначены номера трапеций, составляющих шарнирный шестизвенник. Линии пересечения средних линий трапеций пронумерованы арабскими цифрами, те же цифры характеризуют линейный шарнир между гранями. Радиусы-векторы средних линий трапеций обозначаются \vec{r}_i , $i=1, \dots, 6$, а вектор \vec{r}_0 соединяет центр тяжести ячейки с точкой 1.

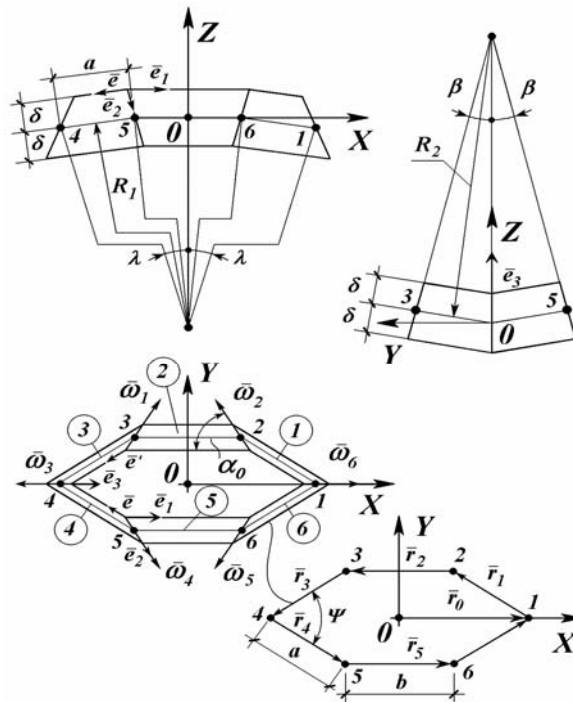


Рис. 4

Вектор относительной угловой скорости грани с номером i относительно грани $(i+1)$ назван $\vec{\omega}_i$. Длина средней линии граней 1, 3, 4, 6 равна a , длина средней линии граней 2 и 5 равна b . Оси X и Y декартовой системы координат расположим в плоскости векторов \vec{r}_2 , \vec{r}_0 , ось Z перпендикулярна осям X и Y .

Заметим, что если грани шестизвенника представляют собой абсолютно жесткие пластины, соединенные линейными цилиндрическими шарнирами, то такая конструкция не является, вообще говоря, механизмом. В самом деле, поскольку каждая жесткая пластинка имеет в пространстве шесть степеней свободы, а линейный шарнир лишает систему пяти степеней свободы, то число степеней свободы шестизвенника равно

$$F = 6 \times 6 - 6 \times 5 = 6.$$

Это означает, что произвольно масштабированный шестизвенник может перемещаться в пространстве только как абсолютно твердое тело. Для того чтобы появились дополнительные степени свободы, нужно его конструировать специальным образом. Убедимся, что симметричный шестигранник имеет, по крайней мере, одну степень свободы, за которую можно принять, например, угол Ψ (рис. 4).

Для доказательства выпишем ограничения, которые налагаются на шесть угловых скоростей $\vec{\omega}_i$ [Лурье, 1961]. Из замкнутости многогранника и теоремы о сложении угловых скоростей имеем

$$\sum_{i=1}^{i=6} \vec{\omega}_i = 0. \quad (1)$$

К трем уравнениям (1) присоединим еще три, отражающие тот факт, что скорость точки, находящейся на пересечении граней, одинакова, если ее вычислять применительно к той или иной грани:

$$\begin{aligned} & \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}_3 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4) \times \vec{r}_4 + \\ & + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5) \times \vec{r}_5 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5 + \vec{\omega}_6) \times \vec{r}_6 = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство вместе с соотношением

$$\sum_{i=1}^{i=6} \vec{r}_i = 0 \quad (2)$$

означает, что сумма моментов векторов $\vec{\omega}_i$ относительно точки O равна нулю. При фиксированных \vec{r}_i равенства (1), (2) показывают, что всегда существует нулевое решение

$$\vec{\omega}_i = 0,$$

при котором шестигранник геометрически неизменяем. Но при дополнительных ограничениях существуют и ненулевые решения. Покажем, что для симметричной относительно оси X ячейки равенства (1), (2) допускают ненулевое решение.

Приняв за неизвестные $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \vec{\omega}_6$, видим, что уравнения проекций на ось Y и два уравнения моментов относительно осей X и Z удовлетворяются тождественно в силу симметрии векторов. Таким образом, для четырех неизвестных векторов имеются только три независимых уравнения. Следовательно, симметричная ячейка является механизмом с одной степенью свободы. Такой же результат получаем, если ячейка имеет две оси симметрии. В этом случае $|\vec{\omega}_3| = |\vec{\omega}_6|$, $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}_2|$. Из шести уравнений только одно (уравнение проекций угловых скоростей на ось Z) для двух неизвестных векторов не выполняется тождественно. В качестве единственной обобщенной координаты симметричной деформации ячейки выберем угол Ψ (рис. 4). Знание этого угла позволяет вычислить все углы ячейки. Будем их обозначать $\Psi_i, i = 1, 2, \dots, 6$, имея в виду, что $\Psi_4 = \Psi$.

Свяжем со средними линиями трапеций, составляющими ячейку, двумерную поверхность (рис. 3) по следующему правилу. Координатная линия α_2 проходит через пересечение средних

линий пластинок – трапеций 2 и 5, а координатная линия α_1 – через точки 1 и 4. Единичные координатные векторы вдоль линий α_1, α_2 обозначим соответственно $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$. Направление $\vec{\alpha}_2$ выбираем перпендикулярно пластинке 5, совпадающим с вектором $\vec{B}_1 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Направление $\vec{\alpha}_2$ свяжем с вектором $\vec{B}_2 = (\vec{e} + \vec{e}')/2$, а направление $\vec{\alpha}_3$ примем перпендикулярно α_1 и α_2 .

Выберем фиксированную систему координат и обозначим радиус-вектор точки поверхности буквой \vec{r} . Введенную поверхность характеризует связность, определенная дифференциальными формами ω^j, ω_i^j [Картан, 1962]

$$d\vec{r} = \omega^j \vec{\alpha}_j, \quad d\vec{\alpha}_i = \omega_i^j \vec{\alpha}_j, \quad (3)$$

которые линейны относительно дифференциалов $d\vec{\alpha}_1, d\vec{\alpha}_2$. В формуле (3) и далее используется тензорная запись со сверткой по повторяющимся индексам.

Параметр α_1 совпадает с длиной, измеряемой вдоль ячейки от точки 1 до точки 4, когда угол $\Psi = 0$. Параметр α_2 изменяется на величину $2b$ при переходе от пластинки 2 к пластинке 5.

Найдем явный вид связности (3) как функцию угла Ψ . Вычислим для правильного шестиугольника векторы, показанные на рис. 4, при условии $a = b$. Считаем, что острый угол трапеций α_0 близок к прямому. Иначе говоря, предполагается, что угол $\alpha_0 \neq \pi/2$, но членами, в которых участвует квадрат косинуса этого угла $\alpha = \cos \alpha_0$, можно пренебречь в приводимых ниже вычислениях.

Определим проекции векторов единичной длины:

$$\begin{aligned} \vec{e}_4 = \{0, 0, 1\}, \quad \vec{e}_1 = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{e}_2 = \{-a_1\alpha, a_2\alpha, a_3\}, \quad \vec{e} = \{-\psi_1, \psi_2, -\alpha\psi_3\}, \\ \vec{e}' = \{-\psi_1, -\psi_2, -\alpha\psi_3\}, \quad \vec{e}_3 = \{-\alpha a'_1, 0, a'_3\}. \end{aligned}$$

Учтем зависимости

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e} = -\alpha, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\alpha, \quad \vec{e}_3 \cdot \vec{e} = \alpha, \quad \vec{e}_1^2 = \vec{e}^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1$$

и тот факт, что векторы $\vec{e}, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ находятся в одной плоскости

$$(\vec{e}_2 \times \vec{e}) \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Получается

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad -a_1\psi_1 + a_2\psi_2 - a_3\psi_3 = 1, \quad \psi_1 a'_1 - \psi_3 a'_3 = 1, \\ \alpha^2 \psi_3^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 = 1, \quad a_1^2 \alpha^2 + a_2^2 \alpha^2 + a_3^2 = 1, \quad \alpha^2 a_1'^2 + a_3'^2 = 1, \\ a_2 \psi_3 \alpha^2 + a_3 a'_1 \psi_2 + a'_3 a_1 \psi_2 + a'_3 a_2 \psi_1 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В семи уравнениях – восемь неизвестных. Выразим все неизвестные через один параметр ψ_1 . Учтем также, что α – малое число. Это позволяет отбросить в уравнениях (4) подчеркнутые члены. В итоге получим

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad a_3^2 = a_3'^2 = 1, \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 = 1, \\ \psi_3 = -\psi_1^3 + \psi_1^2 - \psi_2^2 \psi_1 + \psi_2^2, \quad a'_1 = \frac{1 - \psi_3}{\psi_1}, \quad a_2 = \frac{1 - \psi_3 - \psi_1}{\psi_2}. \end{aligned}$$

Обозначим буквой λ угол между осью Z и вектором $(\vec{e} + \vec{e}')$, а удвоенный угол между плоскостями 2 и 5 – буквой β (рис. 4). В соответствии с введенными ранее обозначениями получаем

$$\lambda = \alpha\psi_3, \quad \beta = \alpha a_2.$$

Длина линии между серединами граней 2 и 5 равна $2b\psi_2$, а между точками 1 и 4 (измерение производится вдоль средней линии трапеций) составляет $b(1+2\psi_1)$. Следовательно, можно связать с симметричной ячейкой «главные радиусы кривизны» по формулам

$$\rho_1 = \frac{b(1+2\psi_1)}{2\alpha\psi_3}, \quad \rho_2 = \frac{b\psi_2}{\alpha\alpha_2}. \quad (5)$$

Поскольку при $\psi_1 \rightarrow 1$ обе величины α_2 и ψ_3 стремятся к нулю, видим, что в «свернутом» виде ячейке отвечают радиусы кривизны, равные бесконечности.

Предполагая размеры ячейки достаточно малыми, введем на поверхности оболочки, ассоциированной с бесконечным количеством шестизвенников, метрику, которая согласуется с измерениями вдоль средних линий трапеций. Так как изменение координаты α_1 при переходе от точки 1 к точке 4 равно $3b$, а изменение координаты α_2 при переходе от пластинки 2 к пластинке 5 составляет $2b$, то первую квадратичную форму поверхности можно записать в виде

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2, \quad (6)$$

$$A_1 = 1 + \psi_1, \quad A_2 = \psi_2. \quad (7)$$

Аналогично, вторая квадратичная форма поверхности, отнесенная к касательной плоскости с началом координат в точке O , запишется так:

$$B(d\alpha_1, d\alpha_2) = \frac{A_1^2 d\alpha_1^2}{\rho_1} + \frac{A_2^2 d\alpha_2^2}{\rho_2} \quad (8)$$

По первой и второй квадратичным формам выписываются выражения для дифференциальных форм поверхности ω^i , ω_j^i из (3). Указанные формы в специальной системе отсчета (рис. 3) зависят от одного параметра ψ_1 .

Примем основное допущение, описывающее трансформацию сети из зеркально симметричных шестизвенников: соединенные по схеме рис.1 ячейки разворачиваются в оболочку таким образом, что связность (3) локально преобразуется как жесткое перемещение касательной плоскости из первоначального положения Π в положение Π_1 (рис. 5). Это требование обеспечивает деформацию оболочки без растяжения и изгиба срединной поверхности. Имеют место незначительные кручение и изгиб пластинок вследствие замены континуальной оболочки ее конечномерным аналогом из малых правильных недеформируемых шестизвенников. Поскольку толщина пластинки незначительна по сравнению с двумя другими ее размерами, потенциальная энергия упругой деформации оболочки оказывается минимальной, и из всех способов разворачивания оболочки описанный выше требует наименьшей дополнительной энергии.

Для того, чтобы записать формы ω^i , ω_j^i применительно к поверхности Π_1 , достаточно преобразовать векторы $d\vec{\alpha}_i$, $\vec{\alpha}_i$, $d\vec{r}$, повернув их в соответствии с углами Эйлера, которые возникают после совмещения точек O и O_1 . Для совмещения координатных осей плоскостей Π и Π_1 нужно задать три угла Эйлера. Вместе с параметром раскрытия ячейки ψ_1 получаем в связности (3) четыре произвольные функции. Эти функции должны удовлетворять трем соотношениям Гаусса–Кодацци (уравнениям, обеспечивающим интегрируемость системы (3)).

Кроме того, примем во внимание, что пластинки, составляющие оболочку, тонкие: мала толщина δ по сравнению с габаритом оболочки, а отношение $h/\delta \ll 1$. Последнее условие означает, что в процессе разворачивания пакета в оболочку пластинки могут изгибаться и закручиваться, но недопустимо «кручение ячейки в целом». Действительно, ячейки оболочки взаимодействуют друг с другом по соприкасающимся пластинкам типа **a** (рис. 5). Напряжения, которые приложены к пластинке, могут быть сведены к равнодействующей силе и моменту,

отнесенным к ее средней линии. Составляющие момента по оси α_1 и нормали вызывают изгиб и кручение пластинки. Отвечающие этим моментам относительные деформации χ_1, χ_2 пропорциональны жесткостям пластинки, равным соответственно $\delta h^3/12$ и $\delta h^3/3$. В то же время относительная деформация по оси α_2 (обозначим ее χ_{tw}) пропорциональна $\delta^3 h/12$. Условие $h/\delta \ll 1$ обеспечивает соотношение $\chi_{tw} \rightarrow 0$ (так как составляющие момента на грани a одного порядка). Если обозначить компоненты вектора перемещений срединной поверхности \vec{r} буквами u_1, u_2, u_3 и воспользоваться формулами для $\chi_1, \chi_2, \chi_{tw}$ [Новожилов, 1962], то придем к равенству

$$\chi_{tw} = -\frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2 R_2} + \frac{1}{A_2^2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1 R_1} + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right) \right) = 0. \quad (9)$$

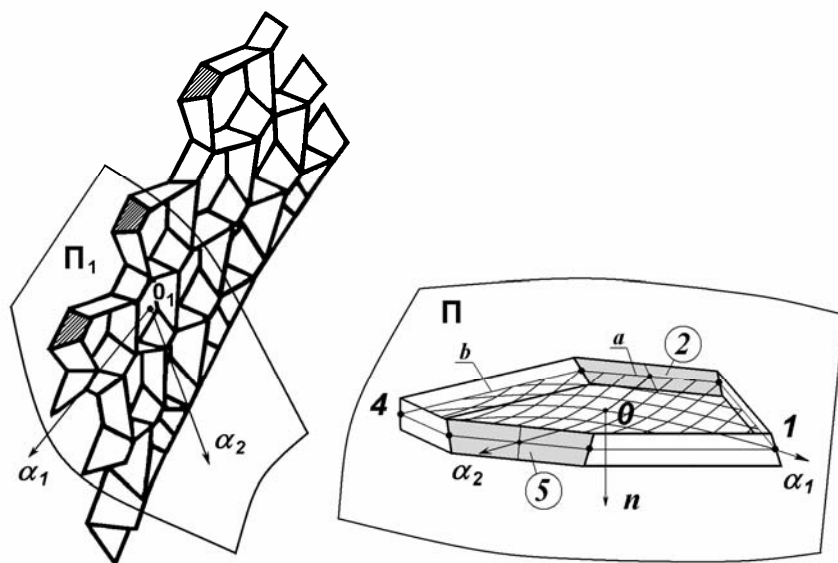


Рис. 5

Следовательно, соотношения Гаусса–Кодацци и ограничение (9) допускают единственное решение задачи Коши, если известны значения компонент вектора \vec{r} на нехарактеристической кривой. Таким образом, оболочка рис. 5 является механизмом, поведение которого определяется формой только одной линии.

Описанное поведение развертывающегося пакета лент является «достаточно жестким». Например, если требуется создать замкнутую оболочку вращения, то отвечающая ей система становится переопределенной. Это означает, что нельзя создать замкнутую оболочку вращения, так как количество уравнений (соотношения Гаусса–Кодацци вместе с условием (9)) превосходит число искомых функций.

Покажем, однако, что оболочка вращения может быть собрана из тонких пластинок, имеющих незначительную жесткость на кручение. В самом деле, если крутильная жесткость невелика, то можно определить дополнительную степень свободы (угол поворота граней φ) и переписать формулы (7) в виде

$$\lambda = \alpha \psi_3, \quad \beta = \alpha a_2 - \varphi, \quad (10)$$

$$\rho_1 = \frac{a + 2b\psi_1}{2\alpha\psi_3}, \quad \rho_2 = \frac{b\psi_2}{\alpha a_2 - \varphi}. \quad (11)$$

Первая квадратичная форма остается без изменения, линии главной кривизны совпадают с координатными линиями, радиусы кривизны ρ_1, ρ_2 остаются главными.

Уравнения Гаусса–Кодацци записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial A_1}{A_2 \partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial A_2}{A_1 \partial \alpha_1} \right) = -\frac{A_1 A_2}{\rho_1 \rho_2}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial A_1}{\rho_2} \right) = \frac{\partial A_1}{\rho_2 \partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{\rho_2} \right) = \frac{\partial A_2}{\rho_1 \partial \alpha_1}.$$

Для оболочек вращения уравнения (12) упрощаются: пропадают производные по аргументу α_1 . Таким образом, остается два уравнения, и ρ_1 явно выражается из первого уравнения

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\rho_2}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial A_1}{A_2 \partial \alpha_2} \right). \tag{13}$$

Если подставить это выражение во второе уравнение (12), то получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $\psi_0 = \partial \psi_1 / \partial \alpha_1$.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\rho_2 \partial}{A_2 \partial \alpha_2} \left(\frac{\psi_0}{A_2} \right) \right) = -\frac{\psi_0}{\rho_2}. \tag{14}$$

Найдя из этого уравнения ψ_1 (с точностью до трех постоянных), вычислим затем по (11) параметр закручивания пластинок φ единственным образом.

Знание функции $\psi_1(\alpha_2)$ позволяет проинтегрировать систему (1) и найти координаты поверхности оболочки. Отсюда заключаем, что замкнутая оболочка представляет собой конечномерный механизм, геометрия которого зависит от раскрытия только двух ячеек (начальных условий $\psi_1^k(\alpha_{10})$, $k = 1, 2, 3$). Обратим внимание также и на то, что структура (14) близка к дифференциальному уравнению второго порядка с большим коэффициентом при старшей производной.

Максимальное раскрытие ячейки ограничено, и замкнутая оболочка обнаруживает следующее интересное свойство (рис. 6).

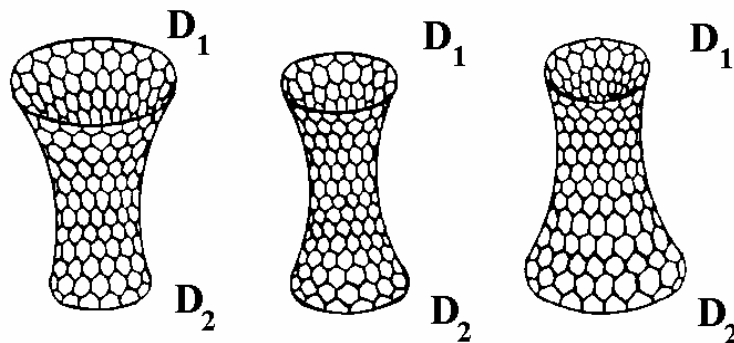


Рис. 6

Если оболочку с максимально раскрытыми внизу ячейками перевернуть, поменяв местами «доньшки» D_1 и D_2 , то под действием собственного веса и отсутствии трения на доньшке D_2 оболочка должна принять первоначальную форму.

2. Кинематика трансформирующихся оболочек, собранных из пластинок в форме параллелограммов

В предыдущем параграфе построена механика трансформирующихся оболочек, собранных из одинаковых тонких пластинок в форме трапеций. Изменение формы таких оболочек оказывается возможным, потому что составляющие их шестизвенники имеют в пространстве семь степеней свободы (соты в процессе движения остаются симметричными относительно одной плоскости). Если составить аналогичную сеть из пластинок в форме параллелограммов [Грачев, Найштут, 2008], то соты сохраняют свойство инверсии (в процессе движения средние линии трех последовательных звеньев преобразуются в три оставшихся путем поворота на угол 180° вокруг некоторой оси с последующим отражением относительно плоскости, перпендикулярной этой оси). Рассмотрим шестизвенник, составленный из одинаковых пластинок, срединная поверхность которых имеет форму параллелограмма с острым углом α . Толщина пластинки равна h , а ширина – δ . Пластины соединены цилиндрическими шарнирами, как показано на рис. 1 и рис. 2.

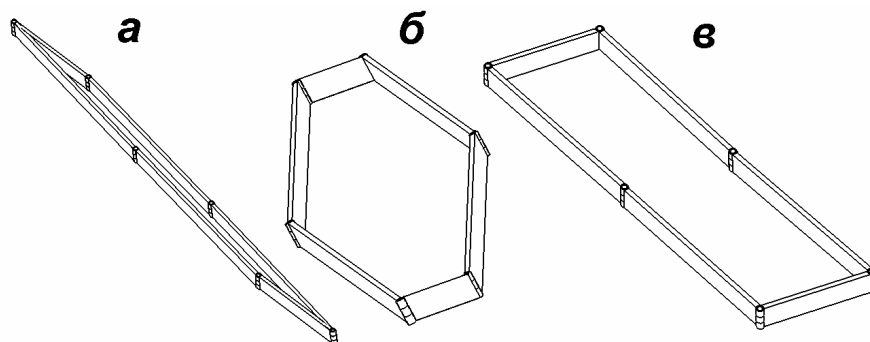


Рис. 7

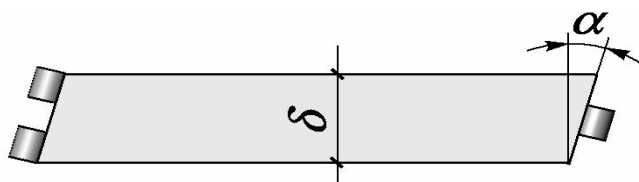


Рис. 8

Представленная конструкция является кинематической системой, имеющей в пространстве семь степеней свободы. Для доказательства этого факта учтем соотношения (1), (2) и наличие инверсии.

Уравнение проекций моментов векторов $\vec{\omega}_i$ относительно оси Z тождественно обращается в нуль, а в два оставшихся уравнения моментов относительно осей X и Y входят три неизвестных. Следовательно, первоначально асимметричная ячейка, в которой средние линии звеньев $\vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6$ получают последовательным поворотом звеньев $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ на угол 180° относительно оси Z и отражения относительно плоскости XOY , является механизмом с одной степенью свободы при любом угле Ψ .

Таким образом, шестизвенник с одинаковыми гранями из параллелограммов (назовем его инверсионным шестизвенником) представляет собой механизм типа «Турбула» [Phillips, 1984; Lee, Dai, 2003]. Он имеет в пространстве семь степеней свободы. Твёрдотельная модель такого механизма представлена на рисунках 7–10 и реализована с помощью программы Solid Works 2004.

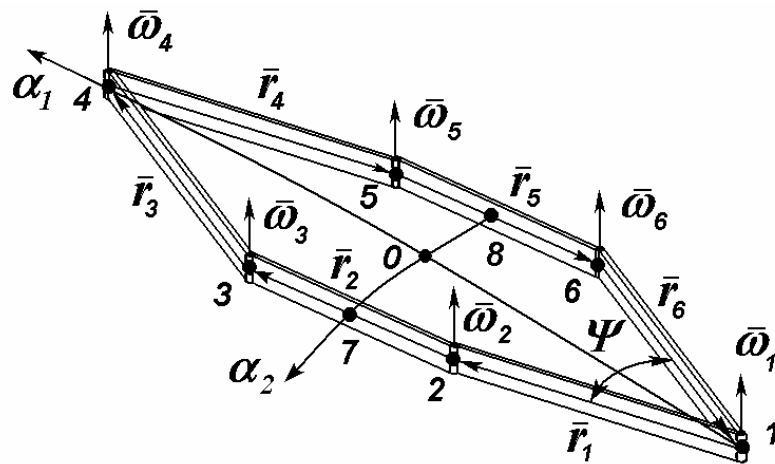


Рис. 9

Если допустить, что тонкие пластинки обладают ничтожно малой крутильной жесткостью, то механизм на рис. 9 имеет в пространстве $7 + 6 = 13$ степеней свободы.

Из таких «турбул» можно составить сеть, соединив в первоначальном состоянии (когда $\psi = 0$) соответствующие грани (или образовав полосы из параллелограммов, как это сделано из трапеций на рис. 1). Сеть будет «раздвигаться», если перпендикулярно к пластинкам с размером a приложена погонная нагрузка p .

Откажемся от предположения, что пластинки – абсолютно гибкие на кручение диски. Пусть размеры ячеек малы по сравнению с габаритами сети, а острый угол параллелограммов α невелик. В этих условиях деформация любой ячейки сети может быть представлена как сумма следующих движений.

1. Раскрытие свободной ячейки (рис. 9) на угол Ψ .
2. Совмещение средних линий пластинок в раскрытой ячейке с их расположением в сети путем поворота ячейки как твердого плоского тела на угол ω .

При этом форма срединной поверхности сети почти не отличается от плоской (в силу инверсии ячеек в любой момент развертки пакеты векторы r_i «в среднем» лежат в одной плоскости).

В свободной ячейке при изменении угла ψ все грани остаются плоскими. Грани, по которым осуществляется склеивание сети, имеют разный наклон в фиксированной системе координат. Обозначим единичные нормали к соответствующим граням буквами m и n (рис. 10).

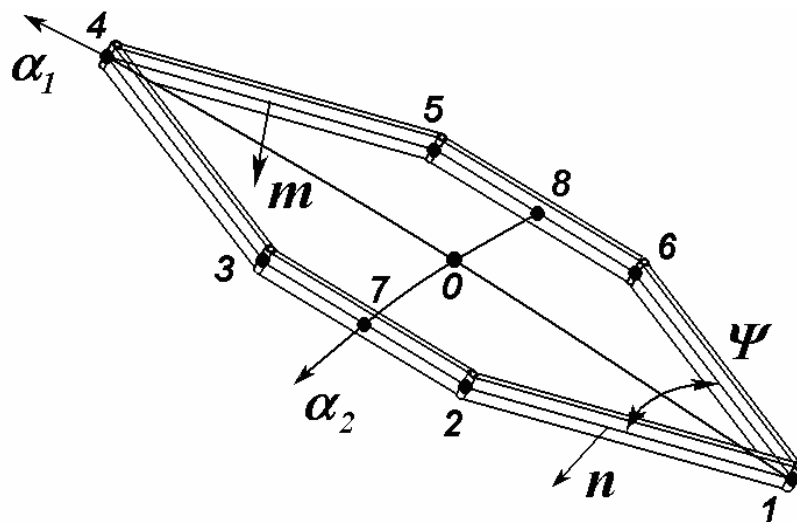


Рис. 10

Введем параметризацию точек сети: координатная линия α_2 проходит через середины отрезков 2-3 и 5-6, а координатная линия α_1 – через точки 1 и 4. Единичные координатные векторы вдоль линий α_1 , α_2 обозначим соответственно $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$. Значение координаты α_1 для точек сети равно расстоянию вдоль средней линии 1-2-3-4, а координата α_2 изменяется при переходе от точки 7 к точке 8 на величину $2b$.

Таким образом, вектор перемещения промежуточных точек с координатами $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ может быть записан (в системе координат X, Y , фиксированной в начальном положении ячейки) в такой форме:

$$\vec{u} = \vec{\alpha}_1 c_i(\psi) d\alpha_i + \vec{\alpha}_2 c_k(\psi) d\alpha_k. \quad (15)$$

Здесь функции $c_i(\psi)$ представляют собой составляющие относительного смещения точек 7 и 8 (деленные на $2b$), а $c_k(\psi)$ – относительное смещение точек 1 и 4, деленное на $3b$.

Как отмечалось ранее, чтобы получить перемещения \vec{v} любой точки срединной линии в развернутой сети, достаточно повернуть вектор \vec{u} на угол ω . Получатся формулы типа

$$\vec{v} = \vec{\alpha}_1 d_i(\psi, \omega) d\alpha_i + \vec{\alpha}_2 d_k(\psi, \omega) d\alpha_k, \quad (16)$$

где четыре функции $d_i(\psi, \omega)$ должны удовлетворять двум равенствам

$$\frac{\partial d_1(\psi, \omega)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial d_2(\psi, \omega)}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial d_3(\psi, \omega)}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial d_4(\psi, \omega)}{\partial \alpha_1}, \quad (17)$$

которые обеспечивают непрерывность деформаций.

Решив задачу Коши для системы (17), можно найти функции ψ, ω , если известны их значения на одной линии. Таким образом, положение точек сети, расположенных на срединной поверхности параллелограммов, однозначно определяется раскрытием ячеек вдоль одной линии. Вычисления, основанные на этих соображениях, позволяют получить приближенную формулу для упругой потенциальной энергии, накопленной в ячейке с одинаковыми сторонами $a = b = l$ в зависимости от угла ее раскрытия ψ :

$$W = 0.24 \frac{G\delta^3 h}{l} \alpha^2 \sin^2(2\beta\psi). \quad (18)$$

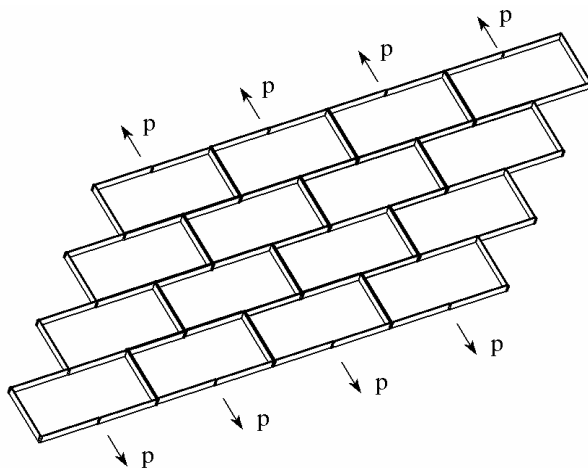


Рис. 11

Здесь α – острый угол параллелограмма, G – модуль сдвига материала пластинок, а $\beta = 1 + \frac{\alpha}{\pi}$. Формула (18) показывает, что в сети имеются три состояния, когда потенциальная энергия ми-

нимальна и равна нулю. А именно, первоначальное положение набора лент по рис.1, и два развернутых состояния пакета, когда соседние пластинки шестизвенников (рис. 11, 12) располагаются в одной плоскости (только такие конфигурации могут быть точно реализованы в твердотельном моделировании с помощью программы Solid Works).

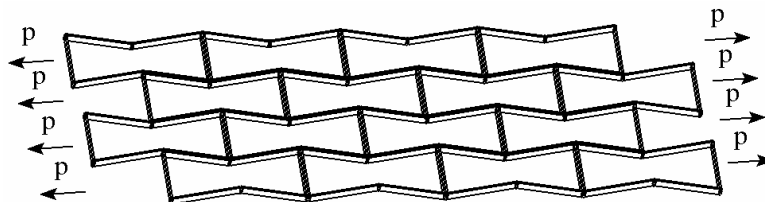


Рис. 12

Для произвольного угла ψ величину потенциальной энергии деформации ячейки W качественно изображает график (рис. 13): при этом точка 0 отвечает собранному пакету, точка 1 – рис. 11, а точка 2 – рис. 12. Точка 3 вновь возвращает к первоначальному виду.

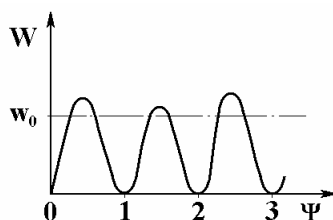


Рис. 13

Получается, что если при растяжении сети сообщается энергия W_0 , после чего силы p обращаются в нуль, то система может вернуться в состояния 0, 1 либо 2 в зависимости от величины угла ψ . В отличие от сетей, собираемых из трапеций, когда процесс разворачивания оболочки приводит к внутренним напряжениям, равновесным состояниям инверсионных ячеек отвечает ненапряженное состояние пластинок.

3. Движение оболочек, собранных из шарнирно соединенных пластинок. Шарниры из материалов с памятью формы

Предположим, что соединения пластинок в ячейках не являются идеальными. Пусть каждый шарнир моделируется классической жесткопластической связью. В шарнире с номером i действует внутренний момент m_i . Ячейка остается неподвижной, пока справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 < 2k^2. \quad (19)$$

При выполнении равенства

$$\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 = 2k^2 \quad (20)$$

ячейка становится механизмом с одной степенью свободы, а неравенство

$$\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 > 2k^2$$

не является возможным и означает разрушение ячейки (не существует допустимых напряжений).

Формулы (19), (20) переносятся на континуальную оболочку, если подразумевать под m_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, соответствующие плотности, распределенные по площадке $d\alpha_1 d\alpha_2$. Обозначим угловые скорости раскрытия шарниров (скорость изменения двугранного угла между соседними пластинками) при выполнении условия (16) буквами θ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Связь между m_i и θ_i примем в форме Сен-Венана (Saint-Venant) [Качанов, 1969; Койтер, 1961]:

$$\theta_i = \lambda m_i. \quad (21)$$

Множитель $\lambda > 0$. Из равенств (20), (21) следует

$$m_i = \frac{k\theta_i}{\sqrt{\theta_k \theta_k}}. \quad (22)$$

В этой и последующих формулах предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Постоянную k естественно назвать пределом текучести ячейки, а функцию

$$D(\theta_i) = k\sqrt{\theta_i \theta_i}$$

считать диссипативным потенциалом.

Пространство возможных скоростей θ_i (назовем его BV) определяется следующим образом. Рассмотрим функции $\psi_1^k(\alpha_1, \alpha_2)$, которым отвечает форма одной из оболочек. Пусть функции $\psi_1^k(\alpha_1, \alpha_2)$ принимают значения $\psi_1^k(\alpha_{20})$ на нехарактеристической кривой C^k . Далее найдем, все оболочки, получающиеся при измененных на той же кривой C^k граничных условиях $\psi_1^{*k}(\alpha_{20}) = \psi_1^k(\alpha_{20}) + tc^k$. Здесь c^k – произвольная непрерывная функция, а t – числовой параметр (время). Найдем соответствующие ψ_i^* (удовлетворив соотношению (9) и равенствам Гаусса-Кодацци) и вычислим

$$\theta_i^* = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_i^* - \psi_i}{t}.$$

Наконец, пополним это множество в классе мер Радона, приняв норму

$$|\theta_i^*|_{BV} = \sum_{i=1}^{i=6} \int |\theta_i^*| d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Возможным скоростям θ_i^* отвечают вычисленные по функциям ψ_i^* и ψ_i возможные скорости точек оболочки

$$u_i^* = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}^* - \vec{r}}{t},$$

а также скорости изменения коэффициентов первой квадратичной формы \dot{A}_1^* , \dot{A}_2^* и скорость изменения площади поверхности v^* .

Изучим движения трансформирующихся оболочек при медленно изменяющейся нагрузке. Пусть на оболочку действуют внешние поверхностные силы q_i , а в сотах находится газ под давлением p . Внутренние моменты m_i должны находиться в равновесии с внешними силами. Это требование равносильно равенству

$$\int_V (m_i \theta_i^* - q_i u_i^* - p v^*) dV = 0, \quad dV = d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (23)$$

для всех возможных скоростей θ_i^* и соответствующих u_i^* и v^* . Буквой V отмечается поверхность оболочки.

Задача о движениях оболочки формулируется следующим образом.

Для известной нагрузки q_i и внутреннего давления p определить поля m_i, θ_i так, чтобы выполнялось равенство (23) с любым допустимым полем θ_i^* и соотношения (19), (20). При этом связность (1) должна быть интегрируема.

Постановка задачи фактически повторяет задачу о жесткопластических движениях твердого тела.

Запишем слегка измененное условие равновесия

$$\int_V (m_i \theta_i^* - M q_i u_i^* - M p v^*) dV = 0, \quad dV = d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (24)$$

здесь M – постоянная величина.

Воспользуемся доказанной [Мосолов, Мясников, 1981; Eklund, Temam, 1976] теоремой. Существует такое число M^* , что до тех пор, пока $M < M^*$, задача о движении оболочки (с условием (24) вместо (23)) имеет только тривиальное решение $\theta_i \equiv 0$. Моменты m_i остаются неопределенными, удовлетворяя соотношению

$$\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 \leq 2k^2. \quad (25)$$

Если же $M = M^*$, то θ_i не равно везде нулю. Число M^* называется коэффициентом предельной нагрузки, а поле θ_i определено с точностью до константы.

Движение оболочки θ_i доставляет минимум функционалу

$$\int_V (D(\theta_i^*) - M^* q_i u_i^* - M^* p v^*) dV = 0, \quad dV = d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (26)$$

на множестве допустимых полей θ_i^* .

Для числа M^* имеет место формула

$$M^* = \inf_{\theta_i^* \in BV} \frac{\int_V D(\theta_i^*) dV}{\int_V (q_i u_i^* + p v^*) dV}.$$

Из сформулированной теоремы следует, что любое из состояний, когда $M < M^*$, является положением устойчивого равновесия (оболочка остается неподвижной). При $M = M^*$ (увеличились поверхностные силы или поднялось внутреннее давление) оболочка переходит из первоначального состояния в конечное. В отличие от традиционных задач теории пластичности, когда движение при условии $M = M^*$ не прекращается, трансформация оболочек заканчивается, когда площадь ячеек достигает максимума. Таким образом, предельная нагрузка переводит трансформирующуюся оболочку, по механическим свойствам похожую на вязкую жидкость, в твердое тело, когда соединения граней перестают быть шарнирными. Концы всех граней, собранные в одном узле, деформируются при этом как единое абсолютно твердое тело: трансформирующаяся система переходит в прочную упругую сетчатую оболочку.

Механическое поведение упругих сетчатых оболочек изучено достаточно хорошо, основные разрешающие уравнения сравнительно просто получаются на основе вариационных принципов для упругого тела и принятия гипотез Кирхгоффа–Лява [Новожилов, 1962; Васидзу, 1987]. Не останавливаясь подробнее на особенностях расчета таких оболочек, отметим только, что их деформация не сильно отличается от деформаций сплошных тонких оболочек с «приведенной» толщиной, зависящей от формы ячейки и геометрических характеристик составляющих ее пластинок. Упругие оболочки обладают высокой прочностью и малой деформативностью, поскольку предел текучести материала пластинок в сотни раз превосходит число k из критерия (16), а модуль Юнга примерно во столько же раз выше предела текучести.

Вернемся к трансформации оболочки, показанной на рис. 5, в предположении, что материал шарниров обладает свойством памяти формы. Как показано в [Найштут, 2008], для описания «обратной деформации» при постоянной температуре достаточно в постановку задачи (20)–(24) внести некоторые видоизменения. Односвязную область допустимых внутренних моментов

$$\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 \leq 2k^2 \text{ нужно заменить двусвязной}$$

$$2\varepsilon^2 k^2 \leq \sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 \leq 2k^2. \quad (27)$$

Формулу (27) с малым параметром $\varepsilon \ll 1$ иллюстрирует двумерный рис. 14. Поверхности S и S_ε относятся к уравнениям $\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 = 2k^2$ и $\sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 = 2\varepsilon^2 k^2$. Если моменты в шарнирах отвечают внутренней точке B , то скорости деформаций равны нулю; если же моменты находятся на поверхностях S и S_ε , то наблюдаются пластические деформации θ_i и θ_i^ε .

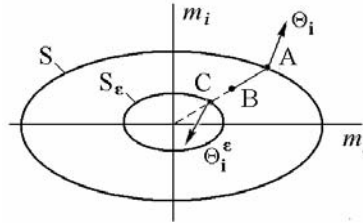


Рис. 14

Пусть среда занимает двумерную область D с границей $\partial D = \partial D_u + \partial D_p$. На части границы ∂D_u задан вектор скоростей θ_i , а на ∂D_p известен тензор m_i . Будем изучать задачу на интервале времени $[0, t]$. Определим трехмерную область $M = D \times [0, t]$ с границей

$$\partial M = \partial M_u + \partial M_p, \quad \partial M_u = \partial D_u \times [0, t], \quad \partial M_p = \partial D_p \times [0, t], \quad dm = d\alpha_1 d\alpha_2 dt$$

и пространство напряжений $H \{H: \sum_{i=1}^{i=6} m_i^2 \leq 2k^2\}$.

Выделим в пространствах H и BV множества m_i и θ_i так, чтобы выполнялись условия на границе и следующие соотношения (всюду далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по области M):

$$R = \{(m_i : m_i \in L^\infty(M), 2\varepsilon^2 k_2^2 \leq m_i^2 \leq 2k_2^2), (\theta_i \text{ ограничен в } BV)\}; \quad (28)$$

$$Q = \int \dot{q} dm = \int (-m_i \theta_i + k_2 \sqrt{2} (\theta_i \theta_i)^{1/2}) dm; \quad (29)$$

$$\int T_{2\varepsilon} \dot{s} dm = \int k_2 \sqrt{2} (\theta_i \theta_i)^{1/2} dm \geq \int \dot{q} dm. \quad (30)$$

Условие (28) означает, что рассматриваются лишь допустимые напряженные состояния, а соотношения (29) и (30) – это первый и второй законы термодинамики, где буквы $\dot{q}, \dot{s}, Q, T_{2\varepsilon}$ означают соответственно: скорость подвода тепла, скорость изменения энтропии, подведенное тепло и температуру, отвечающую поверхности S_ε .

Пусть, наконец, к телу приложена нагрузка, которая может быть уравновешена безопасными моментными напряжениями m_i^0 , и

$$2\varepsilon_1 k_2^2 < m_i^0 m_i^0 < 2k_{02}^2, \quad k_{02} < k_2, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon. \quad (31)$$

Так же как в работах [Найштут, 1993, 2008], можно убедиться в справедливости такого утверждения: для Лагранжиана

$$L(m_i, \theta_i) = \int (m_i^0 - m_i) \theta_i dm \quad (32)$$

на множестве $R \times BD(M)$ с условиями (24)–(26) существуют m_i, θ_i , которые соответствуют седловой точке функции $L(m_i, \theta_i)$.

Если m_i и θ_i – дифференцируемые по координатам и времени функции, то в равенстве (32) можно заменить область M на D и установить справедливость закона Сен-Венана. В самом деле, вариацию $L(m_i, \theta_i)$ представим в форме

$$\int_D \theta_i (m_i - m_i') dx \geq 0. \quad (33)$$

Вследствие произвольности $(m_i - m_i')$ везде, кроме точек поверхности

$$\Phi = m_i^2 - 2k_2^2 \varepsilon^2 = 0, \quad (34)$$

можно записать равенство: $\theta_i = 0$. Если же m_i находится на поверхности S_ε , то $\theta_i = \lambda \partial \Phi / \partial m_i$. Итак, имеет место закон Сен-Венана, из которого следует, что для гладких функций, отвечающих течению на поверхности S_ε , соотношение (29) принимает вид

$$\int \dot{q} dm = \int (1 - \varepsilon) k_2 \sqrt{2} (\theta_i \theta_i')^{1/2} dm.$$

Интеграл в правой части написанной формулы неотрицателен, поэтому приток тепла имеет направленный характер, и второе начало термодинамики становится следствием первого.

Таким образом, показано, что деформированная силами (необратимым образом) оболочка восстанавливает при достижении температуры $T_{2\varepsilon}$ свою первоначальную форму. Это свойство может найти многочисленные технические приложения. В самом деле, соберем оболочку, склеив пластинки по схеме рис. 1. С помощью внешних q_i и внутренних p сил развернем ее в требуемую форму. Разгрузим оболочку и сложим граничную полосу S^k так, чтобы параметр ψ_2 в формуле (7) оказался равным $\psi_2 = 0$. Такое состояние возможно (оно отвечает двугранному углу между пластинками 3 и 4 на рис. 4, равному 2π , когда $\Psi = 2\pi - 2\alpha_0$), подробнее оно разъяснено на рис. 32 в разделе 5. Тогда $A_2 = 0$, площадь оболочки становится нулевой, происходит «коллапс односвязной поверхности в точку».

Нагреем «точку» до температуры $T_{2\varepsilon}$. Оболочка примет форму поверхности, в точности совпадающую с той, которая была получена после первоначальной развертки.

4. Новые формы ячеистых оболочек

Оболочки, образованные разверткой пакетов (рис. 1), имеют отрицательную гауссову кривизну. Один из способов получения оболочек произвольной кривизны состоит в том, чтобы соединить специальным образом прямолинейные полосы, составленные из двух типов трапеций.

Сеть, изображенная на рис. 15, состоит из десятизвенников (собранных из трапеций двух типоразмеров). Она обладает «лишними» степенями свободы и имеет повышенную подвижность. Для преобразования сети в оболочку требуемой формы необходимо управлять несколькими параметрами, что часто оказывается затруднительным. Поэтому поступим иначе. Составим из четырех типов трапеций прямолинейные полосы, соединив их по боковым сторонам цилиндрическими шарнирами (рис. 16). Каждая из пластинок с подробным обозначением размеров и углов показана на рис. 17.

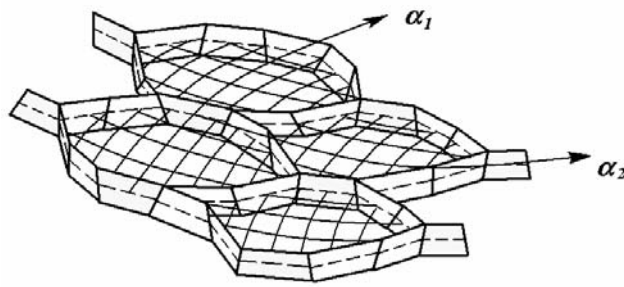


Рис. 15

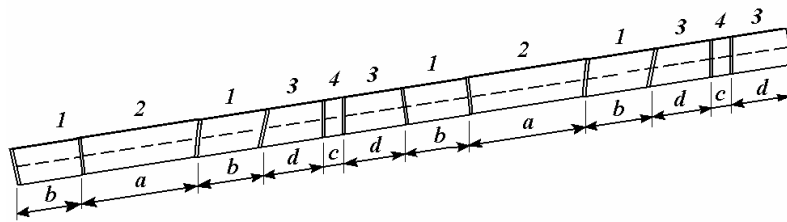


Рис. 16

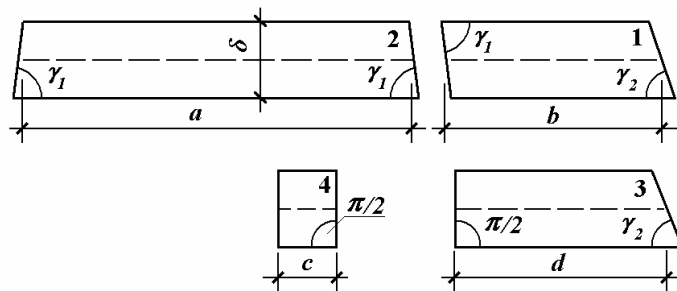


Рис. 17

Буквы a, b, c, d обозначают длины средних линий различных трапеций. Толщину всех пластинок будем считать одинаковой – h . Объединим по две полосы, совместив оси шарниров O_1 и O'_1 (рис. 18).

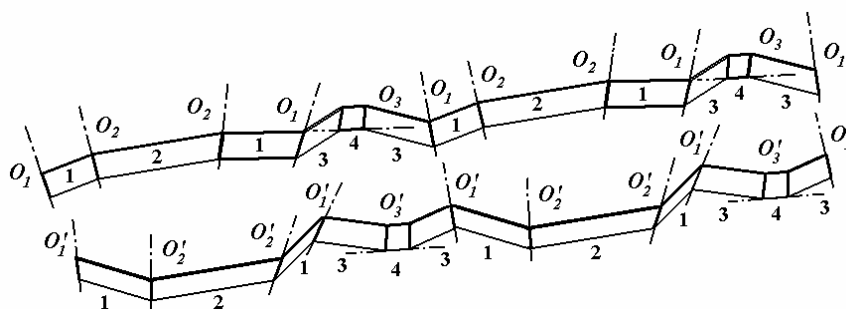


Рис. 18

Объединим теперь пары полос, совместив оси шарниров O_2 и O'_2 , а также O_3 и O'_3 . В результате получится пакет, показанный на рис. 19.

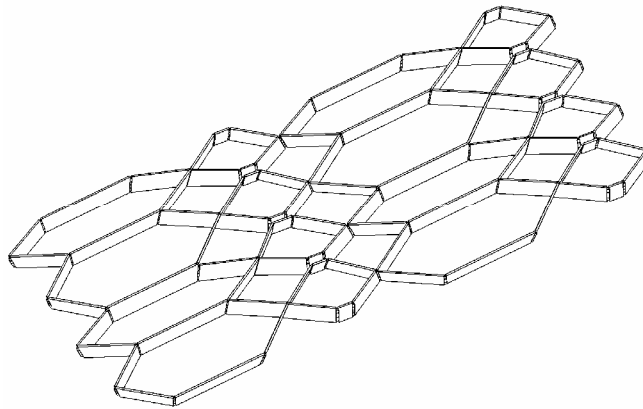


Рис. 19

По аналогии с рис. 2 и рис. 3 геометрия развернутой оболочки определяется поведением ячейки M , показанной на рис. 20.

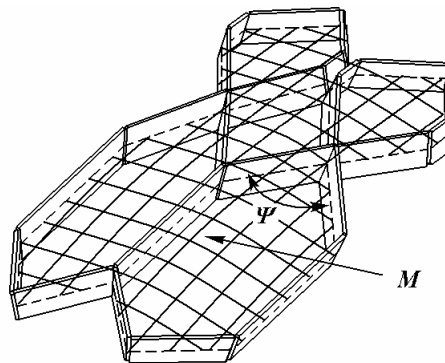


Рис. 20

Существенно, что, будучи выполненными из недеформируемого материала, обе ячейки (рис. 3 и рис. 20) имеют в пространстве 7 степеней свободы.

Если принять отношение $c/d \ll 1$, то форма оболочки определится только пластинками – трапециями 1, 2 по рис. 21. Следовательно, конструкция рис. 18 позволяет образовать ячеистые оболочки любой кривизны. При этом конечная форма оболочки зависит только от величины угла ψ в нескольких ячейках.

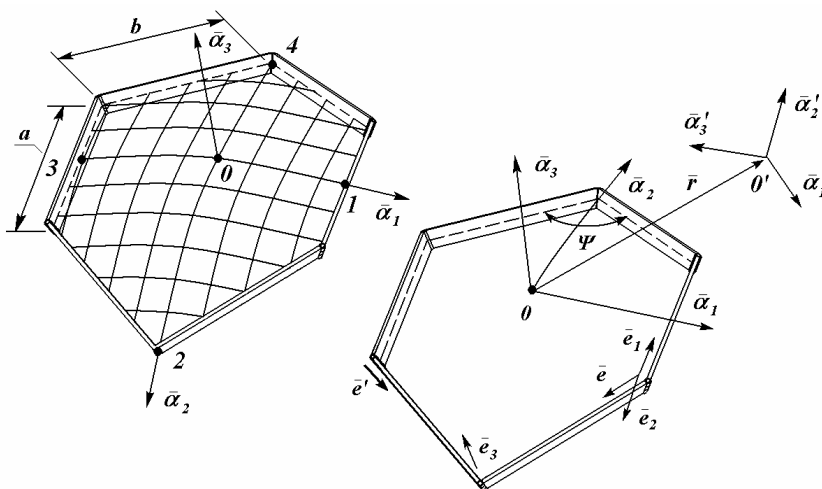
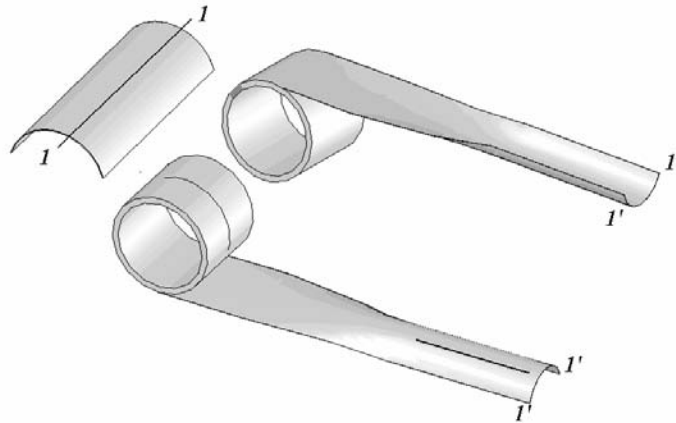


Рис. 21

Ячеистые оболочки позволяют моделировать системы, которые могут находиться в различных равновесных формах под действием поверхностных сил. На рис. 22 показана схема изготовления труб из свернутых рулонов, производимых фирмой RolaTubeTechnology Ltd (Norman et al., 2008). Технология базируется на том, что упругая полоса, армированная прочными волокнами, располагаемыми под углом 45° к длинной стороне, предварительно напрягается при сворачивании в рулон. При разворачивании рулона образуется устойчивая форма в виде трубы другого радиуса.



Говоря иначе, прямолинейные образующие, изображенные на первоначальной оболочке линиями (1-1), преобразуются в окружности при разворачивании заготовки (1'-1'). Тот же эффект можно получить и на сетчатых оболочках. Рассмотрим шестизвенник (рис. 23), состоящий из четырех равнобоких трапеций с длиной средней линии b и двух – с длиной a . Угол α близок к прямому. Трапеции соединяются идеальными цилиндрическими шарнирами. Расположим симметрично в трапециях длины a неидеальные цилиндрические шарниры (обозначены буквой H), которые обладают следующим свойством: до тех пор, пока изгибающий момент M в трапеции длины a меньше некоторой константы M_0 , пластинка остается плоской. Условие $M > M_0$ означает переход этой пластинки в шарнирный механизм, состоящий из трех пластин.

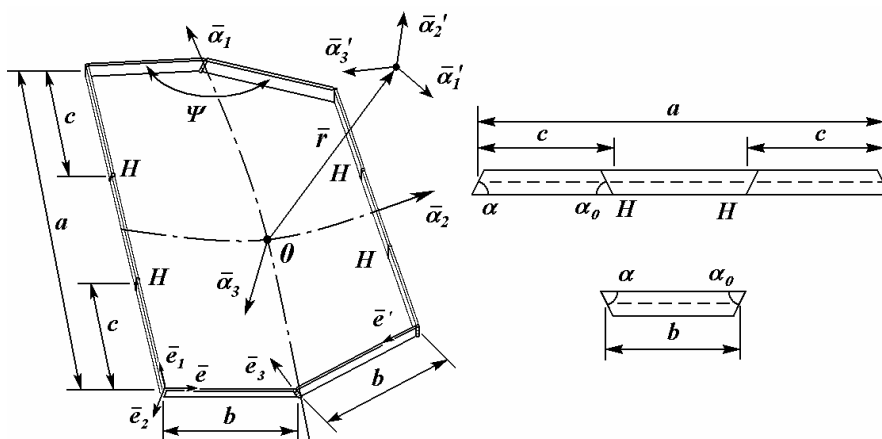


Рис. 23

Объединим пластинки в сеть, как показано на рис. 2, и будем растягивать ее силами либо нагнетать газ в ячейки. Расширение сети (первый этап) происходит до тех пор, пока шестизвенники превратятся в четырехзвенники (пары пластин шириной b лежат в одной плоскости).

В этот момент площадь сети становится максимальной. Продолжим растягивать конструкцию (второй этап). В ходе этого движения пластинки длины b не смещаются относительно друг друга, а шарниры H «начинают работать». При этом четырехзвенник, показанный на рис. 24 слева, перейдет в четырехзвенник, изображенный справа.

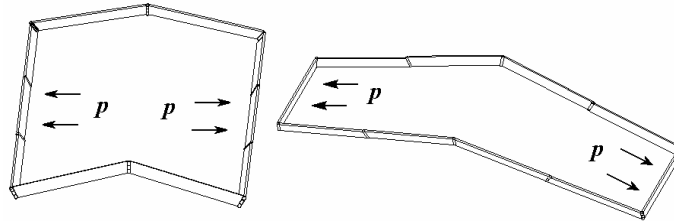


Рис. 24

Соответствующие сети из пластин показаны на рис. 25.

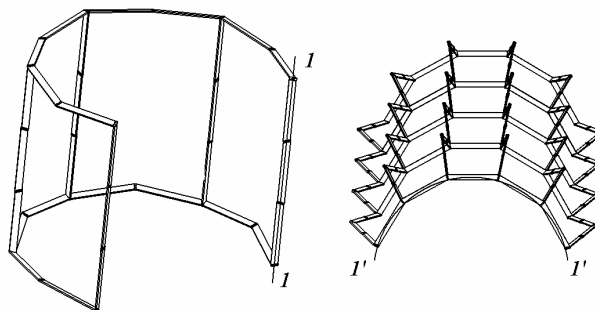


Рис. 25

В итоге просматривается полная аналогия с изображением на рис. 22. Линии 1–1 и 1'–1' преобразуются одинаковым образом.

Аналогичным образом, можно преобразовать плоские системы (рис. 12) в оболочку, если добавить в параллелограммы по два жестких шарнира (рис. 26).

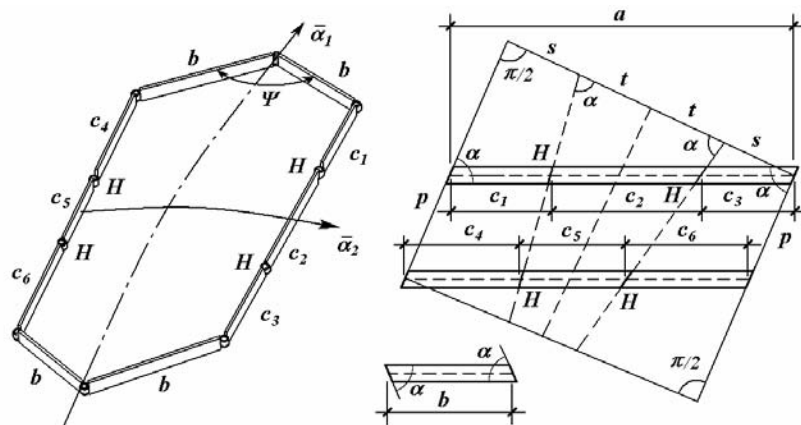


Рис. 26

Преобразование плоской ячейки из параллелограммов, составляющих сеть (рис. 12), в ячейку, близкую по форме к той, что изображена на рис. 3, видно на рис. 26. Склеивая соты, расположенные справа на рис. 27, получается оболочка отрицательной кривизны по рис. 2, которая исследована в [Грачев, Найштут, 2007].

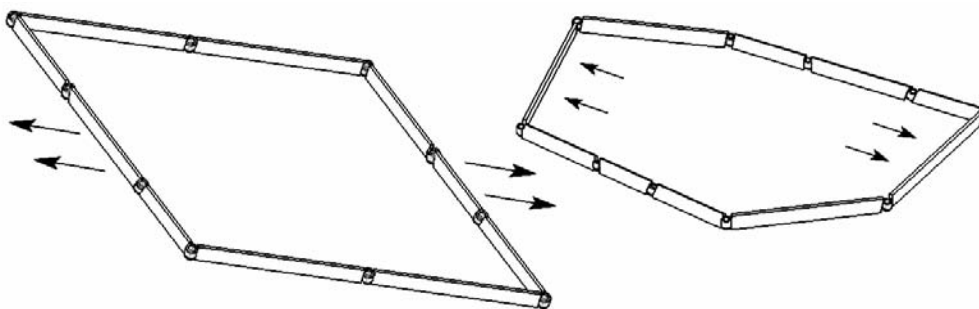


Рис. 27

5. Некоторые приложения

Решетки из сочлененных «турбул» могут быть полезны при создании прочных трансформирующихся оболочек, а также систем привода механизмов.

Одна из таких возможностей представлена на рис. 28, когда полосы (рис. 1) собираются из прямолинейных блоков параллелограммов, при этом каждый блок состоит из трех параллелограммов длины a и одного длины $b < a$. Развернув первоначально собранный пакет (рис. 1), получается «двухкамерная» система (рис. 28).

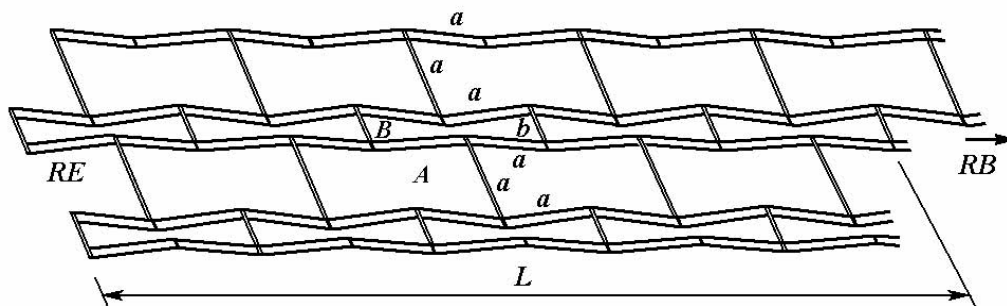


Рис. 28

Эта система обладает следующим свойством: если создать внутреннее давление в камере **B**, увеличив ее объем и уменьшив объем в камере **A**, то сократится габарит L . Поднимем затем давление в камере **A** и восстановим габарит L . Следовательно, если закрепить сеть со стороны **RB** и освободить сторону **RA** во время нагнетания газа в камере **B**, а затем сменить крепления при подъеме давления в камере **A**, то можно вызвать перемещение всей сети в направлении по стрелке.

Другая возможность передвижения по плоскости представлена на рис. 29. Шестизвенник собирается из трех различных параллелограммов 1, 2, 3. Если внутри шестизвенника поместить расширяющийся газ, снабдить камеру выпускным клапаном, а внешние стороны «склеивать» поочередно с плоскостью, то получим катящуюся гусеницу переменного объема. Характерные положения гусеницы обозначены цифрами в кружках. Действительно, если в положении 1 нагнетать воздух внутрь, склеив второе звено с плоскостью, то механизм перейдет в положение 2. Склейка с плоскостью третьего звена и дальнейшее увеличение объема камеры приводят систему в положение 3. Наконец, соединив с плоскостью первое звено, подняв внутреннее давление, увеличим объем камеры и придем в состояние 4. После открытия выпускного клапана система возвращается в исходное состояние, передвинувшись на величину половины периметра средней линии шестизвенника. Отметим, что движение «гусеницы» происходит единственным образом, так как «турбула» обладает одной степенью свободы, а расширяющийся газ способен только увеличивать объем камеры.

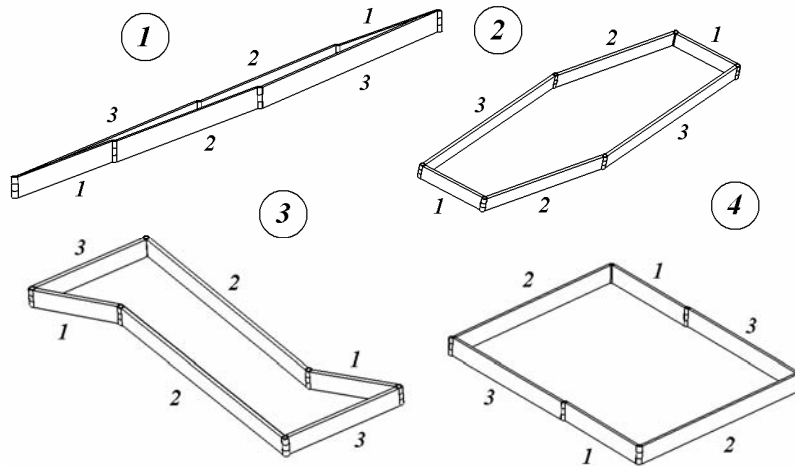


Рис. 29

Трансформирующиеся ячеистые оболочки из трапеций также имеют интересные приложения. Одно из них показано на рис. 30. Если использовать ячейки двух типов, то можно реализовать беспоршневой двухтактный насос или двигатель, подавая топливо последовательно в большие и малые соты. Беспоршневой насос с идеальными упруго пластическими шарнирами работает по принципу «тейлоровой неустойчивости» (Drucker, 1980): как только угол θ_1 презойдет определенное значение, поверхность малых ячеек начинает уменьшаться, и можно сократить объем, заключенный внутри оболочки.

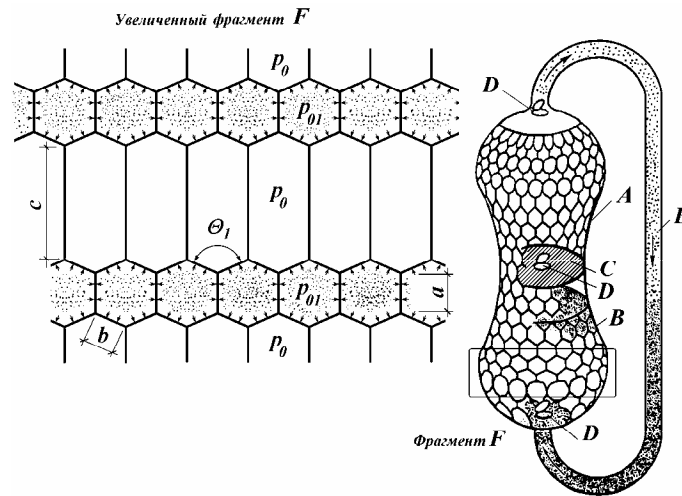


Рис. 30

В самом деле, формулы для радиусов кривизны с учетом размеров на рис. 30 станут такими

$$\rho_1 \approx \frac{\left(\frac{c+a}{2} + 2b\psi_1\right)\psi_1}{2\beta(1-\psi_1)}, \quad \rho_2 \approx \frac{b\psi_1^2}{\beta\sqrt{1-\psi_1^2}} + \varphi \frac{b}{\beta}. \quad (35)$$

Коэффициенты первой квадратичной формы преобразуются к виду

$$A_1 = \frac{\left(\frac{c+a}{2b} + 2\psi_1\right)}{3}, \quad A_2 = \sqrt{1-\psi_1^2}. \quad (36)$$

Формула для объема, заключенного внутри оболочки отрицательной кривизны при малых углах α , может быть представлена в виде

$$V = Cb^2 \sin^2 \gamma (c + a + 2b \cos \gamma), \quad \gamma = \theta_1 / 2.$$

Постоянная C зависит от количества ячеек. Объем достигает максимума, когда

$$\gamma \approx b/c.$$

Если это отношение – малое число, то по мере разворачивания пакета объем V увеличивается. В то же время площадь, занимаемая «малыми» ячейками $F = 2ba \sin \gamma + b^2 \sin 2\gamma$ при $a/b \rightarrow 0$, максимальна, когда $\gamma \approx \pi/4$. Существенно, что двигатель будет работать, если подавать топливо не во все ячейки. Например, когда активны только заштрихованные ячейки (рис. 31), сокращается вся поверхность оболочки. Наблюдается аналогия с изображением на рис. 2, когда конфигурация всей системы определяется поведением одной ячейки. Не менее интересна возможность складывания полос подобно школьной шпартгалке, показанная на рис. 32. Это позволяет упаковать большую поверхность в очень малый по объему ящик с габаритом порядка $(a + b)$.

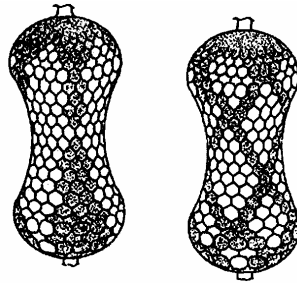


Рис. 31

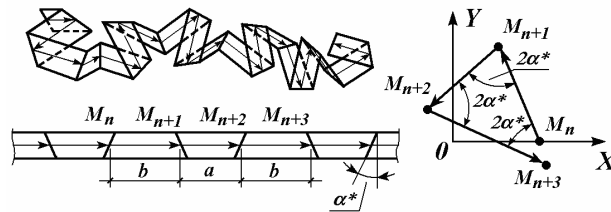


Рис. 32

В процессе разворачивания сотовые оболочки могут увеличивать кривизну, моделируя поведение ракообразных животных, зажимающих щупальцами жертву в объеме V (рис. 33).

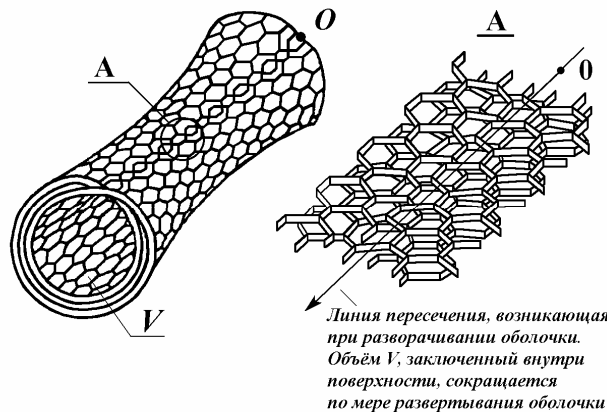


Рис. 33

Двумерные сотовые оболочки допускают обобщения на трехмерные многообразия [Грачев, Найштут, 1999]. Раскладка полос на плоскости показана на рис. 34. По пунктирным линиям можно согнуть систему, превратив ее в полосу, которая затем упаковывается как шаргалка вдоль линий 1.

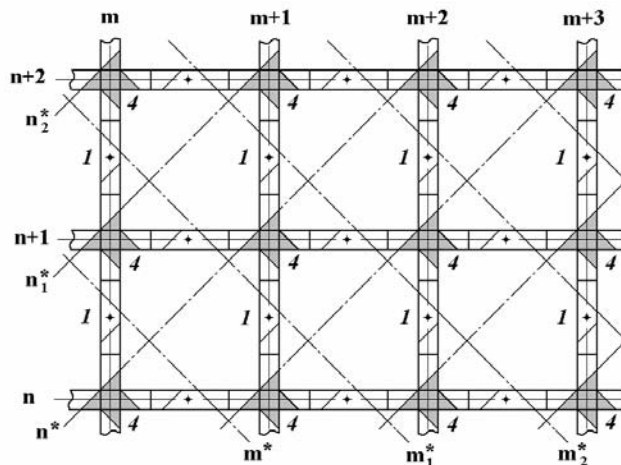


Рис. 34

Схема образующей при таких операциях «трехмерной соты» представлена на рис. 35.

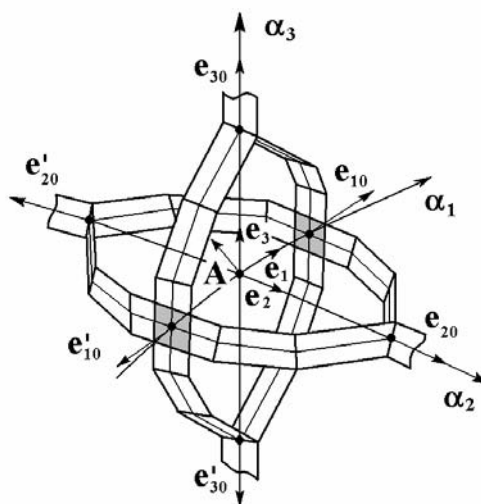


Рис. 35

Схемы на рисунках 27–35 далеко не исчерпывают всех возможностей, которые предоставляют тонкостенные шестизвенники для моделирования прочных развивающихся структур [Norman et al., 2008; Hutchinson et al., 2003].

Снова подчеркнем, что описанные выше разворачивающиеся системы не являются классическими механизмами с абсолютно жесткими звеньями. Их трансформация возможна, только если пластинки являются тонкими и прочными. Последнее обстоятельство объясняет, почему предложенные механизмы, основанные по существу на принципах подвижности шестизвенников Брикарда и Шаца [Bricard, 1927; Schatz, 1975], не находили пока широкого применения. Разработанные в последние десятилетия материалы, включая сплавы с памятью формы, вселяют надежду на применение описанных трансформирующихся систем при создании новых механизмов, полезных не только в традиционных инженерных приложениях, но и в медицине и биотехнологиях.

Список литературы

- Bricard R.* Lecons de cinématique, vol. 2. Gauthier-Villars, Paris. 1927.
- Chen Y., You Z.* An extended Myard linkage and its derived 6R linkage // *ASME Journal of Mechanical Design*. – 2008. – Vol. 130, Issue 5.
- Chen Y., You Z.* On Mobile Assemblies of Bennett Linkages // *Proceedings of the Royal Society A*. – 2008. – Vol. 464. – P. 1275–1283.
- Drucker D. C.* Taylor instability of surface of an elastic-plastic plate // *In Mechanics Today*. Pergamon Pttress. 1980. Vol.5, P. 37–47.
- Eklund I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam etc.: North-Holland. 1976. – 399 p.
- Figliolini G., Stachel J., Angeles J.* A new look at the Ball-Disteli diagram and its relevance to spatial gearing. // *Mech. Mach. Theory*. – 2007. – 42(10). – P. 1362–1375.
- Gan W. W., Pellegrino S.* Kinematic bifurcations of closed-loop deployable frames // *In Computation of Shell and Spatial Structures*. Salzburg, 2005.
- Hutchinson R. G., Wick N., Evans A. G., Fleck N. F., Hutchinson J. W.* Kagome plane structures for actuation // *International Journal of solids and structures*. – 2003. – 40. – P. 6969–6980.
- Lee C.-C., Dai J. S.* Configuration analysis of the Schatz linkage // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – 2003. – 217. – P. 779–786.
- Leung, A. C. H., Guest S. D.* Single member actuation of kagome lattice structures // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. – 2007. – (2). – P. 303–317.
- Luchsinger R. H., Pedretti M., Reinhard A.* Pressure induced stability: from pneumatic structures to Tensairity. // *Journal of Bionics Engineering*. – 2004. – P. 141–148.
- Melin N., Workman R.* Large Area Maintenance Shelter Foundation Design // *CE489 Project Report*, United States Military Academy. 2000.
- Nawratil G.* New Performance Indices for 6R Robots // *Mechanism and Machine Theory*. – 2007. – 42 (11). – P. 1499–1511.
- Norman A. D., Golabchi M. R., Seffen K. A., Guest S. D.* Multistable Textured Shell Structures // *Advanced Science and Technology*. – 2008. – Vol. 54. – P. 168–173.
- Pellegrino S.* A class of tensegrity domes // *International Journal of Space Structures*. – 1992. – 7(2). – P. 127–142.
- Phillips J.* Freedom in Machinery. Vol. 2, Screw Theory Exemplified. Cambridge Univ. Press. 1984. – 192 p.
- Schatz P.* Rhythmusforschung und Technik. Freiesleben. Stuttgart. 1975.
- Schenk M., Guest S.D., Herder J. L.* Zero Stiffness Tensegrity Structures // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – 44(20). – P. 6569–6583.
- Patent. N 4981744, B32B3/12(USA).* Non-planar expandable honeycomb structure // *M. W. Swank*. – Filed 24.04.1990. Ser. N 513761; NKI 428–16.
- Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
- Патент E04C002/36 B32B003/12 (Россия).* Способ изготовления плоских и пространственных сотовых структур и конструкций на их основе / *Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Приоритет 15.06.1992. Номер публикации 2126875.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Континуальные трансформирующиеся оболочки из прямолинейных полос. – СПб.: ТО Терция, 1995. – 38 с.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С.* Управляемые трансформирующиеся оболочки. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского Университета, 1996. – 35 с.

- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Трансформирующиеся среды из прямолинейных полос. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского Университета, 1999. – 43 с.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Трансформирующиеся оболочки на основе шестизвенников // Вестник Самарского технического университета. СамГТУ. Самара, 2007. – Вып. 2 (6). – С. 29–40.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Трансформирующиеся системы на основе правильных шестизвенников // Математика, компьютер, образование. – М.: 2008. Вып. 15 (2). С. 131–139.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Устойчивые формы оболочек из пластин // Вестник Самарского технического университета. СамГТУ. Самара, 2009. – Вып. 19 (1). – С. 91–104.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Равновесные формы трансформирующихся оболочек // Вестник Самарского технического университета. СамГТУ. Самара, 2009. – Вып. 21 (2). – С. 82–93.
- Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. – М.: Изд-во Московского Ун-та, 1962. – 237 с.
- Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
- Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. – 79 с.
- Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
- Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
- Найштут Ю. С. Обобщенные решения в теории течения идеальных упругопластических тел // Изв. РАН. МТТ. 1993. – № 6. – С. 74–78.
- Найштут Ю. С. Вариационный принцип для сплошных сред, обладающих памятью формы // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия математика, физика, химия. Челябинск, 2009. – Вып. 22(122). – С. 4–11.
- Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз. 1962. – 431 с.

Приложение

Адреса интернет-ресурсов, посвященных трансформирующимся системам

- Computers and Structures Online Journals, Elsevier Science
<http://www.sciencedirect.com/science/journal/00457949/>
- Association of Kinetic Art
<http://www.kinetic-art.org>
- MIT Kinetic Design Group
<http://www.robotecture.com/kdg>
- Cambridge University Deployable Structures Laboratory
<http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/>
- Chuck Hoberman Unfolding Structures
<http://www.hoberman.com>
- Santiago Calatrava
<http://www.calatrava.com>
- Terzidis, Instructor of the “Kinetic Architecture Courses in Harvard School of Architecture
<http://www.gsd.harvard.edu/people/faculty/terzidis/index.html>
- University of Liverpool – Portable Architecture Research Unit
<http://www.liv.ac.uk/abe/portablearchitecture/index.html>
- D.S.A. De Focatiis, Oxford University
<http://www.deployables.net>
- Foster-Miller Company
<http://www.foster-miller.com>
- Chadzis
<http://www.chadzis.com>