**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 4 С. 489−502**

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 519.6

Математическая модель оптимизации с учетом нескольких критериев качества

Е. А. Федорова

Тверской государственный университет, Математический факультет
Россия, 170000, г. Тверь, ул. Володарского, 44а

E-mail: Elisaweta-85@mail.ru

*Получено 8 ноября 2011 г.,
после доработки 28 ноября 2011 г.*

Проведение эффективной региональной политики с целью стабилизации производства невозможно без анализа динамики протекающих экономических процессов. Данная статья посвящена разработке математической модели, отражающей взаимодействие нескольких экономических агентов с учетом их интересов. Разработка такой модели и ее исследование может рассматриваться в качестве важного шага в решении теоретических и практических проблем управления экономическим ростом.

Ключевые слова: математическая модель, экономический рост, многокритериальная задача, экономический агент

The mathematical optimization model based on several quality criteria.

E. A. Fedorova

Tver State University, Department of Mathematics, 44a Volodarsky st., Tver, 170000, Russia

Abstract. – An effective regional policy in order to stabilize production is impossible without an analysis of the dynamics of economic processes taking place. This article focuses on developing a mathematical model reflecting the interaction of several economic agents with regard to their interests. Developing such a model and its study can be considered as an important step in solving theoretical and practical problems of managing growth.

Keywords: mathematical model, economic growth, a multicriteria problem, the economic agent

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 489–502 (Russian).

Введение

Экономико-математическое моделирование является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики. Развитие математического анализа, теории вероятностей и математической статистики способствовало формированию различного рода моделей экономики.

Математические модели являются языком анализа экономических проблем: сферы занятости и рынка труда, достижения устойчивого экономического роста, поддержания стабильного уровня цен, повышения экономической эффективности, роста уровня жизни. Выбор структуры модели предопределяет ее качественные свойства и тем самым возможные практические рекомендации.

При разработке математической модели экономики возникают вопросы: каких экономических агентов описывать в модели и какой экономический смысл придавать каждому из них. Под экономическим агентом понимают экономическую структуру, которой можно приписать определенную функцию в рассматриваемой экономической системе.

Базовой моделью экономического роста считается модель, предложенная Р. Солоу [Колемаев, 2002].

Однако эта модель имеет недостатки. Например, рост ВВП объясняется экзогенными параметрами, а сбережения в 100% случаев становятся инвестициями, которые мгновенно превращаются в фонды.

Учитывая последнее замечание, В. А. Колемаев [Колемаев, 2002] предложил экономически разумную математическую модель превращения инвестиций в новые основные фонды с учетом эффекта запаздывания.

Итак, модель Колемаева, как и модель Солоу, рассматривает экономику как единое целое (без структурных подразделений). Эти модели достаточно адекватно отображают макроэкономические аспекты процесса производства и являются устойчивыми.

Рассматривая модели экономического роста, необходимо отметить, что ими число моделей в экономической науке не ограничивается. Многие современные авторы выстраивают новые теории в попытках учесть недостатки вышеперечисленных авторов. Но, несмотря на все недостатки, описанные модели роста продолжают оставаться ключевыми моделями в экономической науке.

В условиях рыночной экономики для экономического роста необходимо наращивание капитала, основой которого являются инвестиции. Стимулирование инвестиционной деятельности, направленной на развитие инфраструктуры, инноваций, на поддержку экспорта товаров, а также поддержку малого и среднего предпринимательства, обеспечения повышения конкурентоспособности экономики, производит банковская система.

В статье мы будем опираться на модель, разработанную коллективом авторов ВЦ РАН им. А. А. Дородницына [Петров, Поспелов, Шананин, 1996], которая может быть применима для описания деятельности некоторой фирмы [Крутов, Петров, Поспелов, 1989; Хасанова, Капогузов, 2010].

Математическая модель фирмы

Рыночная экономика – экономическая система, в которой роль основного регулятора экономических отношений играет рынок. В этой системе распределение ресурсов и формирование пропорций, удовлетворяющих общественные потребности, осуществляется с помощью рыночных механизмов. Они улавливают движение спроса и предложения через систему цен и прибылей. Рыночное движение потребительских благ и услуг и соответствующий ему перелив ресурсов образуют в целом экономический оборот любой рыночной экономики.

Перейдем к описанию общей структуры модели, в которой выделим следующие экономические агенты – банк и фирму. Деятельность внешней экономической среды, с которой взаимодействует рассматриваемая экономика, и торгово-посреднические структуры, обслуживающие обращение товаров, рассматривать не будем.

При построении модели будем опираться на общие положения, модели и методы системного анализа экономики, разработанные коллективом авторов ВЦ РАН им. А. А. Дородницына.

Перечислим главные предположения, на которых будет основано математическое описание модели.

1. Производство осуществляет фирма, которая функционирует ради извлечения максимальной прибыли.
2. Все произведенные продукты обращаются в товар.
3. Продукты продаются и покупаются по единой цене.
4. Учитывается численность рабочих, которые получают доход в виде заработной платы и тут же целиком расходуют его на потребление. Фирма получает доход в виде прибыли. Часть дохода она сберегает и обращает в капитал, остальную часть расходует на затраты производства и погашение кредитов.
5. Банк осуществляет финансовую деятельность в виде кредитов и текущих счетов фирмы.

Итак, в модели принято агрегированное описание производства: предполагается, что фирма выпускает однородный продукт.

Обозначим через $Y(t)$ величину выпуска продукта в единицу времени, затрачивая при этом рабочую силу в количестве $L(t)$ и используя в процессе производства капитал $K(t)$. Технологическую структуру производства зададим производственной функцией $Y(t)=F\big(K(t),L(t)\big)$. Будем считать, что структура производства изменяется медленно, поэтому процесс технологических нововведений не описываем.

Выпущенный продукт $Y(t)$ частью расходуется как сырье в текущем производстве $a(t)Y(t)$, часть используется как фондообразующий $b(t)Y(t)$ для возмещения выбывающих основных фондов и создания новых. $a(t), 0<a(t)<1$ – коэффициент материальных затрат, $b(t)$ $0<b(t)<1$ – коэффициент инвестиционных поступлений

Производитель планирует такой уровень выпуска продукта и затрат, который обеспечит ему максимальную прибыль.

Прибыль фирмы складывается из выручки $\big(1-a(t)-b(t)\big)Y(t)$ за вычетом оплаты занятой в производстве рабочей силы по фиксированной ставке заработной платы $\omega(t)$ и налоговых отчислений со ставкой налога $\nu(t)$.

Считаем, что фирма является должником банка, но, получая прибыль, имеет возможность расплатиться с долгами $s(t)$ и процентами по ним.

Предполагаем банк доминирующим участником взаимодействия. Это значит, что банк устанавливает ставку процента $r_2(t)$ и при заданной ставке предприятие берет кредит $\Phi(t)$, стремясь получить максимум остающейся у него прибыли. Следовательно, поведение производителя описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$s'(t)=r_2(t)s(t)+\Phi(t)-h(t)d(t),\ s(0)=s_0.$$

Соответственно, общий объем задолженности производства $s(t)$ банковской системы увеличивается за счет кредитов $\Phi(t)$ и начисления процента $r_2(t)$ на всю сумму долга и уменьшается за счет погашений $h(t)d(t)$, $0<h(t)<1$, $d(t)$ – текущий банковский счет фирмы.

При этом банк требует обеспечения выданных производству кредитов. Обеспечением служат некоторые активы производства, например, его основной капитал.

Изменение капитала зависит от поставок фондообразующих продуктов за вычетом амортизации капитала с темпом $\mu(t)$:

$$K'(t)=-\mu(t)K(t)+b(t)Y(t),\ K(0)=K_0,$$

где $\mu(t)$ $\left(0 \le \mu(t) \le 1\right)$ характеризует порядок списания балансовой стоимости приобретенного оборудования.

У остальных участников описываемой нами рыночной системы мы пренебрегаем текущими и капитальными затратами, связанными с их деятельностью.

Будем считать, что прибыль частично сберегается на счете в банке $d(t)$. Тогда для запаса наличности в руках у производителей получим уравнение

$$d'(t) = \left(r_1(t) - h(t)\right)d(t) + \left(1 - \nu(t)\right)\left[\left(1 - a(t) - b(t)\right)Y(t) - \omega(t)L(t)\right],\ d(0) = d_0,$$

где $r_1(t)$ – ставка банковского счета.

У фирмы есть возможность пополнить сберегательный счет, а также изъять вложенные средства и заработанные проценты $h(t)d(t)$.

В любом производстве наряду с проблемами комплексного использования сырья, ресурсов и так далее лимитирующим фактором выступает труд. Представим скорость изменения трудовых ресурсов логистическим уравнением Ферхюльста:

$$L'(t) = n(t)L(t)\left(1 - \frac{L(t)}{L_{\max}}\right),\ L(0) = L_0,$$

где n – коэффициент прироста рабочих, $L_{\max}$ – предельная численность рабочих.

Таким образом, скорость изменения трудовых ресурсов пропорциональна темпам увеличения числа рабочих с учетом оттока кадров, связанного с увольнением работников.

Проблема трудовых ресурсов – это ключевой вопрос в рыночной экономике, не решив который невозможно наладить эффективную деятельность экономики. Особенно остро проблема трудовых ресурсов и безработицы стоит сейчас. В большинстве экономико-математических моделях такой производственный фактор как рабочая сила изменяется экспоненциально.

Динамику трудовых ресурсов опишем логистическим уравнением Ферхюльста.

Однако для привлечения трудовых ресурсов фирма вынуждена повышать заработную плату. Данный факт предлагаем учесть с помощью функции $\gamma\left(\omega(t)\right)$.

Таким образом, дифференциальное уравнение динамики трудовых ресурсов имеет вид

$$L'(t) = n(t)L(t)\left(1 - \frac{L(t)}{L_{\max}}\right) + \gamma\left(\omega(t)\right)L(t),\ L(0) = L_0.$$

Неуправляемая модель деятельности и отношений основных субъектов экономики имеет вид

$$K'(t) = -\mu(t)K(t) + b(t)Y(t),\ K(0) = K_0, \quad (1)$$

$$d'(t) = \left(r_1(t) - h(t)\right)d(t) + \left(1 - \nu(t)\right)\left[\left(1 - a(t) - b(t)\right)Y(t) - \omega(t)L(t)\right],\ d(0) = d_0, \quad (2)$$

$$s'(t) = r_2(t)s(t) + \Phi(t) - h(t)d(t),\ s(0) = s_0, \quad (3)$$

$$L'(t) = n(t)L(t)\left(1 - \frac{L(t)}{L_{\max}}\right) + \gamma\left(\omega(t)\right)L(t),\ L(0) = L_0. \quad (4)$$

Данная модель дает возможность рассчитать уровень производства фирмы, прибыль, в зависимости от основных фондов, трудовых ресурсов, ссудных процентов банка и процента начисления на сбережения.

Построенная модель (1)–(4) отличается от модели [Петров, Поспелов, Шананин, 1996] следующим:

1. динамика трудящихся описывается логистическим уравнением Ферхюльста с учетом привлечения кадров за счет увеличения заработной платы $\gamma\left(\omega(t)\right)$;
2. задолженность списывается с банковского счета фирмы.

Устойчивость модели

Экономическая система, безусловно, является системой сложной и многофакторной. Важнейшим качеством такой системы, обеспечивающим ее эффективность, безотказность в работе и способность к самовосстановлению при сбоях и влиянии негативных факторов, является ее динамическая устойчивость. Обеспечение устойчивости экономической системы является важнейшей проблемой современного развития.

Устойчивость есть категория, относящаяся, прежде всего, к собственным движениям системы, порождаемым начальными условиями (возмущениями) и внутренними свойствами системы, но не внешними воздействиями.

Проверим систему дифференциальных уравнений (1)–(4) на устойчивость [Малкин, 1966].

Определим стационарное состояние системы дифференциальных уравнений (1)–(4), взяв в качестве производственной функции производственную функцию Кобба–Дугласа:

$$\begin{cases} -\mu\tilde{K}(t)+bA\tilde{K}^{\alpha}(t)\tilde{L}^{\beta}(t)=0, \\ (r_1-h)\tilde{d}(t)+(1-\nu)\left[(1-a-b)A\tilde{K}^{\alpha}(t)\tilde{L}^{\beta}(t)-\omega\tilde{L}(t)\right]=0, \\ r_2\tilde{s}(t)+\Phi-h\tilde{d}(t)=0, \\ n\tilde{L}(t)\left(1-\dfrac{\tilde{L}(t)}{L_{\max}}\right)+\gamma\tilde{L}(t)=0, \end{cases}$$

где все коэффициенты системы зависят, вообще говоря, от времени.

Состояние равновесия задается точкой $\left(\tilde{K},\tilde{d},\tilde{s},\tilde{L}\right)$, где

$$\tilde{K}=\left(\frac{\mu}{bA\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)^{\beta}L_{\max}^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$\tilde{d}=\frac{(1-\nu)\left[(1-a-b)\sqrt[\alpha-1]{A}\left(\dfrac{\mu}{b}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}L_{\max}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}-\omega\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)L_{\max}\right]}{h-r_1},$$

$$\tilde{s}=\frac{h(1-\nu)\left[(1-a-b)\sqrt[\alpha-1]{A}\left(\dfrac{\mu}{b}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}L_{\max}^{\frac{\beta}{1-\alpha}}-\omega\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)L_{\max}\right]-\Phi(h-r_1)}{r_2(h-r_1)},$$

$$\tilde{L}=\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)L_{\max},$$

при условиях:

- $h>r_1$;
- $0\le\gamma\le -n$ для $n\le 0$ или $-n\le\gamma<0$ для $n>0$;
- $\alpha\ne 1$.

Исследуем экономическую систему на устойчивость.

Поскольку об устойчивости системы можно судить, ограничиваясь рассмотрением лишь уравнений первого приближения, то, отбрасывая в системе (1)–(4) слагаемые выше первого порядка малости, получим систему

$$\begin{cases} K'(t) = -\mu K(t), \\ d'(t) = (r_1 - h)d(t) - (1-\nu)\omega L(t), \\ s'(t) = r_2 s(t) + \Phi - hd(t), \\ L'(t) = (n+\gamma)L(t) \end{cases}$$

с начальными возмущениями $K(0) = K_0$, $d(0) = d_0$, $s(0) = s_0$, $L(0) = L_0$.

Якобиан линеаризованной системы имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 - h & 0 & -(1-\nu)\omega \\ 0 & -h & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n+\gamma \end{pmatrix}.$$

Исследование асимптотической устойчивости системы сводится к исследованию собственных значений матрицы J, т. е. $|J - zE| = 0$.

Характеристическое уравнение принимает вид

$$z^4 - (r_1 + r_2 + n + \gamma - h - \mu)z^3 - \left[(r_1 + r - h)(\mu - n - \gamma) - r_2(r_1 - h)\right]z^2 -$$
$$-\left[(r_1 - h)(n+\gamma)(r_2 - \mu) - \mu r_2(r_1 + n + \gamma - h)\right]z - \mu r_2(r_1 - h)(n+\gamma) = 0.$$

Характеристические числа системы: $z_1 = -\mu$, $z_2 = r_1 - h$, $z_3 = r_2$, $z_4 = n + \gamma$.

Поскольку рассматриваемая нами модель – экономического содержания, то все входящие в нее переменные выступают с естественными для экономических величин ограничениями. В частности, ссудная процентная ставка банка не может быть отрицательной. Таким образом, среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной действительной частью, следовательно, динамическая система неустойчива. Поэтому система дифференциальных уравнений (1)–(4) неустойчива.

Подобное состояние системы выражается в таких экономических явлениях, как дефицит бюджета, инфляции, обесценение капитала, убыточность, увеличение безработицы, тяжесть налогового бремени и государственного долга.

Многокритериальная модель

Построенная модель (1)–(4) отличается от модели ВЦ РАН еще тем, что она рассматривается как оптимизационная с учетом двух критериев качества.

Действительно, взаимодействие описанных экономических субъектов происходит в процессе их экономической деятельности. С одной стороны, экономические процессы обособлены, но с другой – они опосредованно взаимодействуют, поскольку концептуальная зависимость субъектов очевидна.

В модели банки образуют кредитно-денежную систему. Функция банка состоит в стабилизации механизма регулирования производства. Банк берет на себя риски, возникающие у экономических агентов в связи с нерегулярностью коммерческой деятельности. С каждым из экономических агентов банк работает индивидуально.

Во-первых, банк кредитует производителей в те периоды, когда они терпят убытки. Производители возвращают кредит с процентами.

Во-вторых, банки привлекают средства в виде депозитов.

Итак, прибыль банка определяется разностью между его доходами и расходами за определенный промежуток времени. Тогда цель поставленной задачи (1)–(4) для банковской системы – максимизация дисконтированных финансовых потоков за цикл деятельности T :

$$\int_0^T e^{-\delta t}\left[r_2(t)s(t)-r_1(t)d(t)\right]dt \to \max .$$

Управляющей функцией банка может служить как функция начисления процентов на невыплаченную часть долга $r_2(t)$ ($0<\tilde{r}_2 \le r_2(t) \le \tilde{\tilde{r}}_2 < 1$), так и функция начисления процентов по вкладу $r_1(t)$ ($0<\tilde{r}_1 \le r_1(t) \le \tilde{\tilde{r}}_1 < 1$).

Клиентами банка являются фирмы. Производственные отношения выражаются в предположении, что фирма так регулирует уровень производства, чтобы извлечь из него максимальную прибыль.

Таким образом, цель поставленной задачи (1)–(4) для фирмы – максимизация дисконтированной прибыли за цикл деятельности T :

$$\int_0^T e^{-\delta t}(1-\nu)\left[\left(1-a-b(t)\right)Y(t)-\omega(t)L(t)\right]dt - s(T) \to \max .$$

Будем считать, что фирма достигает поставленной цели, управляя инвестиционными отчислениями $b(t)$ ($0<b_{\min} \le b(t) \le b_{\max} < 1$) и величиной погашения кредиторской задолженности $h(t)$ ($0<h_{\min} \le h(t) \le h_{\max} < 1$).

Рассмотрим математическую модель принятия оптимального решения одновременно по нескольким критериям [Гермейер, 1976], учитывая интересы фирмы и банка, т. е. рассмотрим линейную свертку критериев. Тогда задача оптимального управления имеет вид

$$N^O\left(\int_0^T e^{-\delta t}\left(1-\nu(t)\right)\left[\left(1-a(t)-b(t)\right)Y(t)-\omega(t)L(t)\right]dt - s(T)\right)+$$

$$+N^B\int_0^T e^{-\delta t}\left[r_2(t)s(t)-r_1(t)d(t)\right]dt \to \max,$$

$$K'(t)=-\mu(t)K(t)+b(t)Y(t),\ K(0)=K_0,$$

$$d'(t)=\left(r_1(t)-h(t)\right)d(t)+\left(1-\nu(t)\right)\left[\left(1-a(t)-b(t)\right)Y(t)-\omega(t)L(t)\right],\ d(0)=d_0,$$

$$s'(t)=r_2(t)s(t)+\Phi(t)-h(t)d(t),\ s(0)=s_0,$$

$$L'(t)=n(t)L(t)\left(1-\frac{L(t)}{L_{\max}}\right)+\gamma\left(\omega(t)\right)L(t),\ L(0)=L_0,$$

где N^B, N^O – весовые коэффициенты линейной комбинации критериев, удовлетворяющие условию $N^B+N^O=1$.

Функции управления многокритериальной задачи: $b(t)$, $h(t)$, $r_1(t)$, $r_2(t)$.

Остальные переменные – $K(t), L(t)$, $s(t), d(t)$ – выступают как фазовые с естественными для экономических величин ограничениями: $0 \le K(t) \le K_{\max}$, $0<L_{\min} \le L(t) \le L_{\max}$, $d(t) \ge 0$, $0 \le s(t) \le K(t)$.

Переменные $\nu(t)$, $a(t)$, $\mu(t)$, $\Phi(t)$, $n(t)$ будем считать экзогенными на временном промежутке T.

Многокритериальная задача может быть формализована как задача оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями.

Для построения численного решения используем метод штрафных функций. В этом случае фазовые ограничения учитываются в функционале с помощью штрафных функций:

$$N^O\left(\int_0^T e^{-\delta t}\,(1-\nu)\left[\left(1-a-b(t)\right)Y(t)-\omega(t)\,L(t)\right]dt - s(T)\right)+N^B\int_0^T e^{-\delta t}\left[r_2(t)s(t)-r_1(t)d(t)\right]dt -$$

$$-\int_0^T \left[A_k \left(\max\left\{-K(t),0\right\}\right)^2 + B_k \left(\max\left\{K(t)-K_{\max},0\right\}\right)^2 \right] dt - \int_0^T C_k \left(\max\left\{-d(t),0\right\}\right)^2 dt -$$

$$-\int_0^T \left[D_k \left(\max\left\{-s(t),0\right\}\right)^2 + E_k \left(\max\left\{s(t)-\left(1-a-b(t)\right)Y(t),0\right\}\right)^2 \right] dt - \tag{5}$$

$$-\int_0^T \left[F_k \left(\max\left\{L_{\min}-L(t),0\right\}\right)^2 + G_k \left(\max\left\{L(t)-L_{\max},0\right\}\right)^2 \right] dt \to \max,$$

$$K'(t) = -\mu K(t) + b(t)Y(t),\ K(0) = K_0, \tag{6}$$

$$d'(t) = \left(r_1(t) - h(t)\right)d(t) + (1-\nu)\left[\left(1-a-b(t)\right)Y(t) - \omega(t)L(t)\right],\ d(0) = d_0, \tag{7}$$

$$s'(t) = r_2(t)s(t) + \Phi - h(t)d(t),\ s(0) = s_0, \tag{8}$$

$$L'(t) = nL(t)(1 - \frac{L(t)}{L_{\max}}) + \gamma\left(\omega(t)\right)L(t),\ L(0) = L_0, \tag{9}$$

$$b_{\min} \le b(t) \le b_{\max}, h_{\min} \le h(t) \le h_{\max}, \tilde{r}_1 \le r_1(t) \le \tilde{\tilde{r}}_1,\ \tilde{r}_2 \le r_2(t) \le \tilde{\tilde{r}}_2, \tag{10}$$

где $A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, F_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ – параметры штрафов, положительные числа, стремящиеся к $+\infty$.

Выпишем необходимые условия оптимальности для задачи (5)–(10).

Пусть $\left(\bar{K}(t), \bar{L}(t), \bar{d}(t), \bar{s}(t), \bar{b}(t), \bar{h}(t), \bar{\omega}(t), \bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)\right)$, $t \in [0,T]$, – локально-оптимальный процесс в задаче (5)–(10), тогда:

1. оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума Понтрягина:

$$\left[\left(1-a-\bar{b}(t)\right)\bar{Y}(t) - \omega\bar{L}(t)\right]\left(e^{-\delta t}(1-\nu)N^O + (1-\nu)p_d(t)\right) + p_K(t)\bar{b}(t)\bar{Y}(t) =$$

$$= \max_{b_{\min} \le b(t) \le b_{\max}} \left\{\left[\left(1-a-b(t)\right)\bar{Y}(t) - \omega\bar{L}(t)\right]\cdot\left(e^{-\delta t}(1-\nu)N^O + (1-\nu)p_d(t)\right) + p_K(t)b(t)\bar{Y}(t)\right\} -$$

$$-\bar{h}(t)\bar{d}(t)\left(p_s(t) + p_d(t)\right) = \max_{h_{\min} \le h(t) \le h_{\max}} \left\{-h(t)\bar{d}(t)\left(p_s(t) + p_d(t)\right)\right\},$$

$$\bar{r}_1(t)\bar{d}(t)\left(p_d(t) - e^{-\delta t}\right) = \max_{\tilde{r}_1 \le r_1(t) \le \tilde{\tilde{r}}_1} r_1(t)\bar{d}(t)\left(p_d(t) - e^{-\delta t}\right),$$

$$\bar{r}_2(t)\bar{s}(t)\left(p_s(t) + e^{-\delta t}\right) = \max_{\tilde{r}_2 \le r_2(t) \le \tilde{\tilde{r}}_2} r_2(t)\bar{s}(t)\left(p_s(t) + e^{-\delta t}\right);$$

2. сопряженные функции $p_K(t), p_L(t), p_d(t), p_s(t)$ являются решением системы уравнений:

$$p_K'(t) = -(1-\nu)\left(1-a-b(t)\right)Y_K'(t)\left(p_d(t) + N^O e^{-\delta t}\right) - p_K(t)\left(-\mu + bY_K'(t)\right) -$$

$$-2A_k \max\left\{-K(t),0\right\} + 2B_k \max\left\{K(t)-K_{\max},0\right\} - 2E_k \max\left\{s(t)-K(t),0\right\};$$

$$p_d'(t) = -r_1(t)\left(p_d(t) - N^B e^{-\delta t}\right) + h(t)\left(p_d(t) + p_s(t)\right) - 2C_k \max\left\{-d(t),0\right\};$$

$$p_s'(t) = -r_2(t)\left(N^B e^{-\delta t} + p_s(t)\right) - 2D_k \max\left\{-s(t),0\right\} + 2E_k \max\left\{s(t)-K(t),0\right\};$$

$$p_L'(t) = -(1-\nu)\left(\left(1-a-b(t)\right)Y_L'(t) - \omega\right)\left(N^O e^{-\delta t} + p_d(t)\right) - b(t)p_K(t)Y_L'(t) -$$

$$-p_L(t)\left[n\left(1 - \frac{2L(t)}{L_{\max}}\right) + \gamma(\omega)\right] - 2F_k \max\left\{L_{\min} - L(t),0\right\} + 2G_k \max\left\{L(t)-L_{\max},0\right\};$$

3. выполняются условия трансверсальности: $p_K(T) = 0$, $p_d(T) = 0$, $p_s(T) = -N^O$, $p_L(T) = 0$.

Дискретная аппроксимация

Разобьем отрезок интегрирования $[0,\mathrm{T}]$ точками $t_i = i\Delta t$, $i = \overline{0,q}$ на q одинаковых частей, равных по величине Δt.

Дискретную задачу получим из непрерывной (5)–(10) заменой производных методом Рунге–Кутта второго порядка [Андреева, Семыкина, 2006], и интеграла – по правилу левых прямоугольников с шагом дискретизации $\Delta t = Tq^{-1}$.

$$I = N^O \sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta i \Delta t} (1-\nu)\left[\left(1-a-b^i\right) A K^{i\alpha} L^{i\beta} - \omega L^i\right]\Delta t - N^O s^q + N^B \sum_{i=0}^{q-1} e^{-\delta i \Delta t}\left[r_2^i s^i - r_1^i d^i\right]\Delta t -$$

$$-\sum_{i=0}^{q-1}\left[A_k\left(\max\left\{-K^i,0\right\}\right)^2 + B_k\left(\max\left\{K^i - K_{\max},0\right\}\right)^2\right]\Delta t - \sum_{i=0}^{q-1} C_k\left(\max\left\{-d^i,0\right\}\right)^2 \Delta t -$$

$$-\sum_{i=0}^{q-1}\left[D_k\left(\max\left\{-s^i,0\right\}\right)^2 + E_k\left(\max\left\{s^i - K^i,0\right\}\right)^2\right]\Delta t -$$

$$-\sum_{i=0}^{q-1}\left[F_k\left(\max\left\{L_{\min} - L^i,0\right\}\right)^2 + G_k\left(\max\left\{L^i - L_{\max},0\right\}\right)^2\right]\Delta t \to \max,$$

$$K^{i+1} = K^i - \Delta t \mu K^i\left(1 - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{b^i \Delta t}{2} A\left(K^i\right)^{\alpha-1}\left(L^i\right)^{\beta}\right) +$$

$$+\Delta t b^i A\left(K^i\right)^{\alpha}\left(L^i\right)^{\beta}\left(1 - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{b^i\Delta t}{2} A\left(K^i\right)^{\alpha-1}\left(L^i\right)^{\beta}\right)^{\alpha}\cdot\left(1 + \frac{n\Delta t}{2}\left(1 - \frac{L^i}{L_{\max}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\gamma(\omega)\right)^{\beta},\ K_0^i = K_0,$$

$$d^{i+1} = d^i + \Delta t\left(r_1^i - h^i\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\left(r_1^i - h^i\right)\right)d^i + \frac{\Delta t^2\left(r_1^i - h^i\right)(1-\nu)}{2}\left[\left(1-a-b^i\right)A\left(K^i\right)^{\alpha}\left(L^i\right)^{\beta} - \omega L^i\right] +$$

$$+(1-\nu)\left[\left(1-a-b^i\right)A\left(K^i\right)^{\alpha}\left(L^i\right)^{\beta}\left(1 - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{b^i\Delta t}{2}A\left(K^i\right)^{\alpha-1}\left(L^i\right)^{\beta}\right)^{\alpha}\cdot\left(1 + \frac{n\Delta t}{2}\left(1 - \frac{L^i}{L_{\max}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\gamma(\omega)\right)^{\beta} -\right.$$

$$\left.-\omega L^i\left(1 + \frac{n\Delta t}{2}\left(1 - \frac{L^i}{L_{\max}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\gamma(\omega)\right)\right],\ d_0^i = d_0,$$

$$s^{i+1} = s^i + \Delta t r_2^i\left(1 + \frac{r_2^i\Delta t}{2}\right)s^i + \Delta t\left(1 + \frac{r_2^i\Delta t}{2}\right)\Phi - \Delta t h^i\left(1 + \frac{\left(r_1^i + r_2^i - h^i\right)\Delta t}{2}\right)d^i -$$

$$-\frac{(1-\nu)h^i\Delta t^2}{2}\left[\left(1-a-b^i\right)AK^{i\alpha}L^{i\beta} - \omega L^i\right],\ s_0^i = s_0,$$

$$L^{i+1} = L^i + \Delta t L^i\left(1 + \frac{n\Delta t}{2}\left(1 - \frac{L^i}{L_{\max}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\gamma(\omega)\right)\left(n + \gamma(\omega) - \frac{nL^i}{L_{\max}}\left(1 + \frac{n\Delta t}{2}\left(1 - \frac{L^i}{L_{\max}}\right) + \frac{\Delta t}{2}\gamma(\omega)\right)\right),$$

$$L_0^i = L_0,$$

$$b_{\min} \le b^i \le b_{\max},\ h_{\min} \le h^i \le h_{\max},\ 0 < \tilde{r}_1 \le r_1^i \le \tilde{\tilde{r}}_1 < 1,\ 0 < \tilde{r}_2 \le r_2^i \le \tilde{\tilde{r}}_2 < 1,\ i = 0,\dots,q-1.$$

Для численного решения задачи была построена функция Лагранжа, выписаны условия стационарности, найдены сопряженные вектора в виде рекуррентных соотношений с соответствующими граничными условиями.

Нами проверено, что если $\Delta t \to 0$, то найденные рекуррентные формулы переходят в дифференциальные уравнения для сопряженных функций в непрерывной задаче (5)–(10).

Производственная функция сельскохозяйственной фирмы

Центральным элементом в математической модели фирмы является производственная функция. Производственная функция – это экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска и факторами производства (затраты ресурсов, уровень технологий и др.) в единицу времени. Эта функция имеет весьма широкое применение: в вычислении числовых (средних и предельных) характеристик производства, в анализе эффективности изменения масштаба производства, в предельном анализе.

Производственные функции позволяют определить влияние каждого из ресурсов на результат производства, дать прогноз относительно изменения объема производства при изменениях в объеме ресурсов, определить оптимальную комбинацию ресурсов для получения заданного количества продукции.

В теории производства традиционно используется двухфакторная производственная функция $Y = f(K, L)$, характеризующая зависимость между максимально возможным объемом выпуска Y и количествами применяемых ресурсов труда L и капитала K.

Производственные функции обладают следующими свойствами.

1. Производство невозможно при отсутствии хотя бы одного фактора производства:

$$F(K,0) = F(0,L) = 0.$$

2. С ростом ресурсов выпуск увеличивается: $F_K'(K,L) > 0, F_L'(K,L) > 0$.

3. С увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется:

$$F_{KK}''(K,L) < 0, F_{LL}''(K,L) < 0.$$

4. С ростом использования одного из факторов отдача от увеличения использования в производстве второго фактора увеличивается: $F_{KL}''(K,L) = F_{LK}''(K,L) > 0$.

5. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$F(K,\infty) = F(\infty,L) = \infty.$$

6. Равномерное увеличение всех производственных факторов вызывает пропорциональное увеличение продукта, т. е. производственная функция является однородной:

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha^n F(K,L),\ \alpha > 0.$$

Итак, в модели (5)–(10) производственную функцию $Y(t)$ определим как монотонно растущую, гладкую, вогнутую и зададим в виде производственной функции Кобба–Дугласа $Y(t) = AK^{\alpha}L^{\beta}$.

Модель (5)–(10) применена для исследования деятельности сельскохозяйственной фирмы Тверской области.

Исходной базой для расчетов являются статистические данные за 1998–2009 гг. [Тверская область в цифрах, 1998–2009] о выпуске продукта (табл. 1), стоимости капитала фирмы (табл. 2) и численности занятых в фирме (табл. 3).

Табл. 1. Выпуск продукции (тыс. руб.)

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Y	5828	7012	9107	11079	11565	11126	11505	12169	13882	15632	16039	16528

Табл. 2. Стоимость капитала (тыс. руб.)

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
K	2828	4012	5066	6541	6199	6938	7563	8037	9321	8193	9913	10245

Табл. 3. Численность занятых в фирме (тыс. чел.)

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
L	38,2	59,3	59,5	56,6	51,6	45,1	44,2	39	32	24,6	23,8	23,5

С помощью метода наименьших квадратов была построена производственная функция:

$$Y = 2,098K^{0,925}L^{0,075}. \tag{11}$$

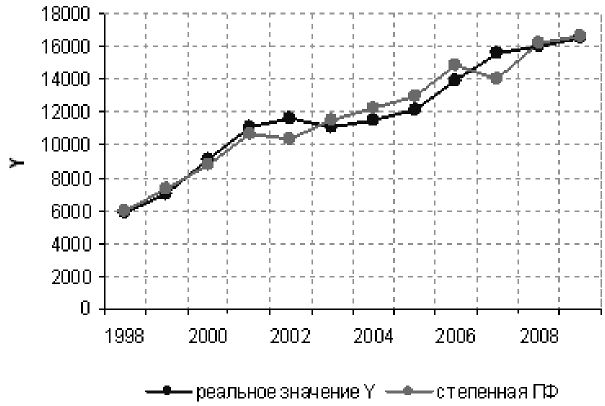

Рис. 1. Графическое представление результатов аппроксимации производственной функции

Для построенной производственной функции ошибка аппроксимации составила 6,97 %, а коэффициент детерминации равен 0,989.

Итак, можем сделать вывод о высоком качестве полученного вида аппроксимирующей функции для сельскохозяйственной фирмы Тверской области, поскольку ошибка аппроксимации менее 7% свидетельствует о хорошем качестве модели, а чем ближе к 1 коэффициент детерминации, тем в большей степени учтены факторы, влияющие на результативный признак.

Построенная функция Кобба–Дугласа обладает известной ограниченностью, так как весь прирост продукта приписывается количественному росту факторов, учтены только два фактора производства, допускается нейтральный технологический прогресс, предполагается единичная эластичность замещения.

Результаты численных экспериментов

Рассматривается временной промежуток $T = 1$ год.

Начальное состояние фирмы принято соответствующим данным на 2008 год:

- основные фонды в начальный момент времени $K_0 = 9913$ тыс.руб.,
- предельное значение основных фондов $K_{\max} = 10000$ тыс.руб.,
- трудовые ресурсы на начало периода $L_0 = 238$ тыс.чел.,
- предельная численность числа рабочих $L_{\max} = 600$ тыс.чел.,
- на текущем счету в банке $d_0 = 539$ тыс.руб.,
- задолженность фирмы составляет $s_0 = 325$ тыс.руб.,
- амортизационные отчисления $\mu = 0.13$ год$^{-1}$,
- инвестиционные отчисления $b = 0.16$ год$^{-1}$,
- материальные затраты $a = 0.25$ год$^{-1}$,
- погашение задолженности $h = 0.4$ год$^{-1}$ от имеющейся на счету суммы,
- кредит на начало года $\Phi = 500$ тыс.руб./год$^{-1}$,
- процент на задолженность $r_2 = 0.1$ год$^{-1}$,
- процент по вкладам $r_1 = 0.02$ год$^{-1}$,
- ставка по налогу на прибыль $\nu = 0$ год$^{-1}$,
- коэффициент прироста численности рабочих $n = -0.021$ год$^{-1}$.

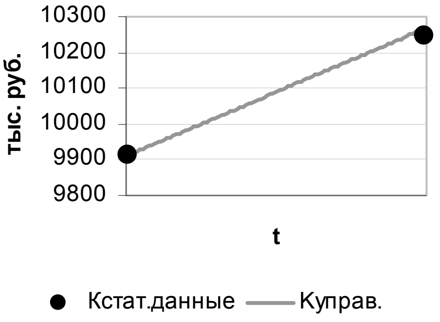

Рис. 2. Динамика капитала за 1 год (2008–2009)

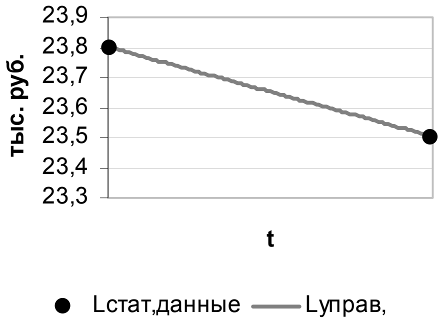

Рис. 3. Динамика трудовых ресурсов за 1 год (2008–2009)

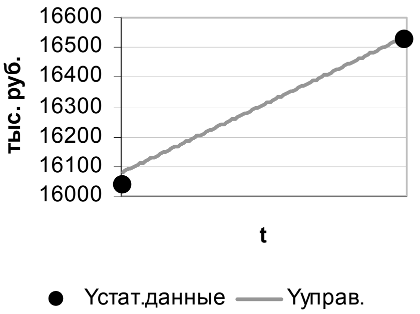

Рис. 4. Динамика выпуска продукции за 1 год (2008–2009)

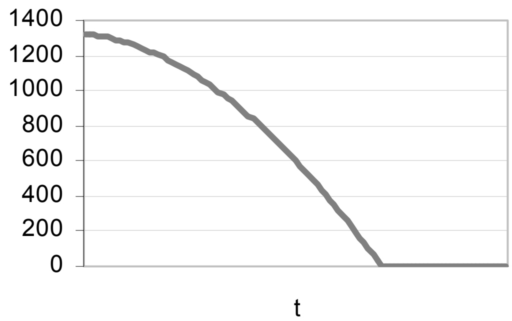

Рис. 5. Динамика задолженности s за 1 год (2008–2009)

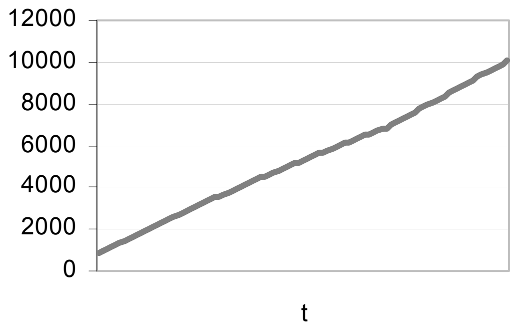

Рис. 6. Динамика текущего счета фирмы за 1 год (2008–2009)

На рис. 2–4 представлены результаты численных экспериментов в сравнении со статистическими данными. Как видно, построенная модель достаточно точно отражает динамику изменения капитала, трудовых ресурсов и выпуска продукции.

Основная задача фирмы – это получение максимальной прибыли. Инвестирование является вложением в будущую прибыль путем увеличения капитала. Поэтому, чтобы получить максимальную прибыль за короткий срок, фирма стремится к минимизации инвестиционных затрат (рис. 7).

Управляя величиной списания задолженности (рис. 8) фирма стремится к уменьшению величины долга на конец отчетного периода и по возможности сокращению сроков его погашения (рис. 5).

Основной задачей банка является максимальное получение прибыли от предоставляемых им услуг в виде кредита, хранения средств на счетах и банковских операций. Прибыль банка формируется как разность получаемых от фирмы процентов за пользование кредитом и процентов, выплачиваемых фирме за хранение средств на счете. Таким образом, банку выгодно увеличивать процентные ставки по выдаваемым им кредитам (рис. 10) и занижать процентные ставки за хранение денежных средств на счетах (рис. 9).

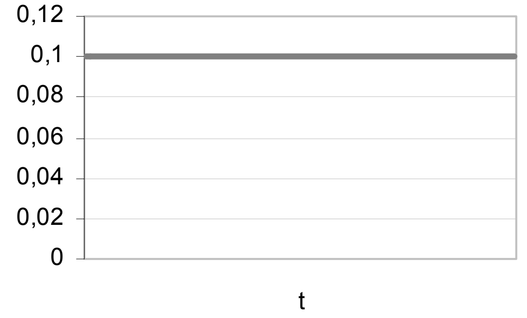

Рис. 7. Динамика инвестиционных поступлений b за 1 год (2008–2009)

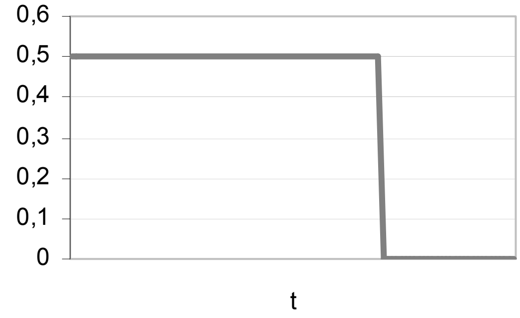

Рис. 8. Динамика списания задолженности h за 1 год (2008–2009)

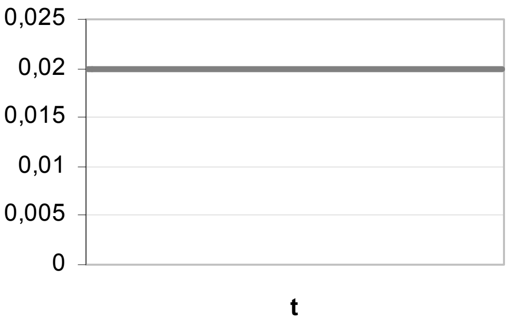

Рис. 9. Динамика процента на сумму вклада r1 за 1 год (2008–2009)

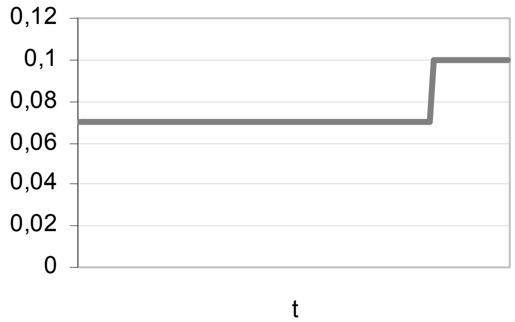

Рис. 10. Динамика процента на кредит r2 за 1 год (2008–2009)

Вычислительный эксперимент показывает, что модель адекватно отражает связь факторов производства и их влияние на выпуск продукции и прибыль фирмы.

Разработанная модель позволяет определить влияние факторов производства и весовых коэффициентов на функционирование фирмы, выбрать оптимальный путь развития и эффективно распределить ресурсы. Модель дает возможность исследовать деятельность фирмы с учетом совокупности таких факторов как: налоги, кредиты, инвестиции, сбережения, норма амортизации, затраты на производство.

Построенная многокритериальная экономико-математическая модель, может быть использована для анализа, оценки и прогнозирования основных тенденций развития и возможных изменений в процессе производства многих фирм.

Список литературы

Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – С. 554.

Колемаев В. А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 2002. – С. 390.

Андреева Е. А., Семыкина Н. А. Оптимальное управление: Учебное пособие / Тверь: Тверской филиал МЭСИ, 2006. – С. 264.

Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – С. 327.

Тверская область в цифрах. – Тверь: ТОКГС, 1998 – 2009.

Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – С. 523.

Крутов А. П., Петров А. А., Поспелов И. Г. Системный анализ экономики: модель общественного воспроизводства в плановой экономике // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. / Под ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева, А. А. Петрова. – М.: Наука, 1989.

Хасанова А. А., Капогузов Е. А. Возможности применения модели Солоу на микроуровне // Вестник Омского университета. Серия «Экономика». – 2010. – № 2. – С. 76–79.