

УДК: 519.6

Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей

И. И. Морозов, А. В. Гасников, В. Н. Тарасов,
Я. А. Холодов^а, А.С. Холодов

¹ Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Московская область, Долгопрудный

E-mail: ^аkholodov@crec.mipt.ru

Получено 23 ноября 2011 г.

Целью данной работы является обобщение макроскопических гидродинамических моделей, описывающих автомобильное движение, с помощью алгоритма построения адекватного реальным наблюдаемым условиям уравнения состояния – зависимости давления от плотности транспортного потока, определяемого по экспериментальным данным (возможно, с использованием параметрических решений модельных уравнений). Доказано, что именно вид уравнения состояния, замыкающего систему модельных уравнений и полученного из экспериментально наблюдаемого вида фундаментальной диаграммы – зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности, полностью определяет все свойства исследуемой феноменологической модели.

Ключевые слова: автомобильное движение, уравнение состояния, гиперболические системы уравнений, транспортные потоки, феноменологические модели

Numerical study of traffic flows by the hydrodynamic models

I.I. Morozov, A.V. Gasnikov, V.N. Tarasov, Y.A. Kholodov^a, A.S. Kholodov

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow region, 141700, Russia,

Abstract. – The purpose of this paper is to generalize the macroscopic hydrodynamic vehicular traffic models by using the algorithm for constructing the adequate state equation – dependence the pressure from traffic density by taking into account the real experimental data (possibly using the parametric solutions for model equations). It is proved that this kind of state equation which closed model equations system and obtained from the experimentally observed form of the fundamental diagram - dependence the traffic intensity from its density, completely determines the all properties of the used phenomenological model.

Keywords: vehicular traffic, the state equation, hyperbolic equation systems, traffic flows, phenomenological models

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 389–412 (Russian).

Работа поддержана грантами РФФИ 10-07-00620-а, 11-01-00494-а.

© 2011 Иван Игоревич Морозов, Александр Владимирович Гасников, Василий Николаевич Тарасов,
Ярослав Александрович Холодов, Александр Сергеевич Холодов

Введение

В 50-е годы прошлого века наблюдалось бурное развитие газовой динамики (обобщенные решения законов сохранения, устойчивые разностные схемы расчета решений). Тогда же появились первые макроскопические (гидродинамические) модели, в которых транспортный поток уподобляется потоку «мотивированной» сжимаемой жидкости [Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Уизем, 1977]. В модели Лайтхилла–Уизема–Ричардса (LWR) транспортный поток уподобляется потоку сжимаемой жидкости, и описывается законом сохранения количества (погонной плотности) автомобилей. При этом в модели постулируется существование функциональной зависимости (уравнения состояния) между величиной потока автомобилей (произведения его скорости на плотность) и плотностью. Эту зависимость часто называют фундаментальной диаграммой.

В последующие годы класс микро- и макромоделей был значительно расширен. В современном макроскопическом подходе транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений (для плотности и скорости потока) с диффузией [Payne, 1971; Уизем, 1977]. При этом уравнение состояния потока входит во второе уравнение этой системы как стремление водителей двигаться с желаемой скоростью.

Несмотря на то, что с момента появления первых фундаментальных работ прошло более полувека, по мнению ряда известных специалистов в области математического моделирования дорожного движения, проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще до конца не изучена (и сродни проблеме описания турбулентных течений). Используя терминологию, предложенную Б. С. Кернером [Kerner, 2009], можно сказать, что на данный момент нет общепринятого подхода, описывающего поведение движения автотранспорта в области синхронизированного потока. Иначе говоря, если автомобильный поток уподобляется жидкости, то наиболее сложная для моделирования ситуация – это «замерзающая жидкость». Подтверждением вышесказанному может служить тот факт, что разные коллективы, занимающиеся моделированием транспортных потоков, как правило, используют разные модели: начиная от модели Лайтхилла–Уизема [Lighthill, Whitham, 1955], заканчивая моделями, в которых каждый водитель описывается своим вариационным принципом. Важным атрибутом многих современных зарубежных работ, в которых предлагаются математические модели транспортного потока, является проверка предложенных моделей на возможность описания ими трех фаз Кернера транспортного потока [Kerner, 2009], наблюдаемых в многочисленных эмпирических (измеренных) данных.

Из-за сильной неустойчивости решений уравнений (при достаточно больших плотностях), описывающих транспортные потоки, задача получения достоверного прогноза загрузки транспортной сети по имеющимся данным на час вперед сродни задаче получения достоверного прогноза погоды на неделю вперед. При этом вычислительные мощности современных высокопроизводительных кластеров (триллион и выше операций типа умножения чисел с плавающей точкой в секунду) позволяют просчитывать реальную ситуацию по Москве (в которой, напомним, порядка трех миллионов автомобилей) со значительным опережением реального времени. Другими словами, основной проблемой при моделировании транспортных потоков является не ограничение по вычислительным мощностям (ресурсам памяти), а большая чувствительность описываемой реальной транспортной системы к входным данным (характеристики источников и стоков автомобилей) и невозможность собрать достаточно полную информацию о входных данных.

Сегодня популярный формат данных о транспортной системе в виде GPS-треков автомобилей позволяет контролировать и тем самым постоянно уточнять параметры рассмотренных моделей и некоторых их важных обобщений. Имея информацию о том, как распределяются потоки, можно получать оценки матриц перемешивания в узлах графа транспортной сети, тем самым замыкать целостную модель. К сожалению, такой способ также остается крайне чувствительным к точности (полноте) входных данных.

Система уравнений автомобильного движения на автодороге

Для макро моделирования автомобильного движения используются различные математические модели, в том числе основанные на дифференциальных уравнениях в частных производных, в частности, гидродинамические модели, аналогичные уравнениям течения сжимаемой многокомпонентной жидкости с мотивацией.

Нами рассматривается вычислительная математическая модель интенсивного уличного движения в мегаполисе, основанная на решении соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных гиперболического типа. За основу берется гидродинамическая модель, являющаяся обобщением модели Пэйна–Уизема [Payne, 1971; Уизем, 1977] на случай произвольного уравнения состояния – зависимости давления от плотности транспортного потока, замыкающего систему уравнений, записанную в дивергентной форме.

Гиперболическая система уравнений, описывающая автомобильное движение, представляет собой дифференциальные законы сохранения (изменения) «массы» и «импульса» на автодорогах (по аналогии с гидродинамикой), записанные в дивергентной форме:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial x = f_0, \\ \partial(\rho v) / \partial t + \partial(\rho v^2 + P(\rho)) / \partial x = f_1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь

$$P = P(\rho) \quad (2)$$

есть замыкающее систему (1) уравнение состояния (зависимость давления от плотности, см. например, рис. 1), f_0 – возможные источники или стоки «массы» (въезжающие на примыкающую дорогу или съезжающие с неё автомобили, останавливающиеся или начинающие движение автомобили и т. п.), f_1 – учитывает импульс сил, действующих на систему (1). Термин «давление транспортного потока» $p = p(\rho)$ впервые появился в работе А. Эйв и М. Раскл [Aw, Rascle, 2000] и использовался ими для замыкания системы уравнений, аналогичной (1). Для замыкания системы уравнений (1) в виде (2) он был введен в использование впервые в работе [Kholodov, Kholodov, 2004]. Вид уравнений (1), (2) также широко используется при построении моделей баротропного газа, чье давление зависит только от плотности и не зависит от температуры.

В таких моделях основной проблемой является построение адекватного действительности уравнения состояния (2), конкретный вид которого, как и для всякой феноменологической модели, должен быть определен из экспериментальных измерений (возможно с использованием параметрических решений системы (1), (2)). Целью этой работы будет доказательство того факта, что именно вид уравнения состояния (2), полученного из экспериментально наблюдаемого вида фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$ – зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности, полностью определяет все свойства данной феноменологической модели.

Представленные на рис. 2–5 для движения на одной (левой) полосе высокоскоростной автостраты – экспериментальные зависимости потока от плотности из [Kerner, Rehborn, 1996; Kerner, Rehborn, 1997] показывают (отмечены точками и соединяющими их отрезками прямых), что предельно возможная величина потока $Q_0 = \rho_f v_0|_{\rho=0} = \rho_f (\partial Q(\rho) / \partial \rho)|_{\rho=0}$ (определяемая пропускной способностью дороги, техническими характеристиками автомобилей и правилами дорожного движения) заметно превосходит реально реализуемую максимальную его величину $Q_f = \rho_f v_f = q_{\max}^{(free)}$ (в обозначениях Б. С. Кернера). По этой причине реально реализуемое движение в фазовой плоскости $\{\rho, Q\}$ имеет своей верхней границей параболу, а не прямую (кривая 1 на рис. 2–5):

$$Q(\rho) = \rho(Q_f / \rho_f + c_f(1 - \rho / \rho_f)), \quad \rho \leq \rho_f \quad (3)$$

при плотности одной полосы дороги меньше критической $\rho < \rho_f$ (область «свободного потока»). Здесь c_f – аналог «скорости звука» при критической плотности.

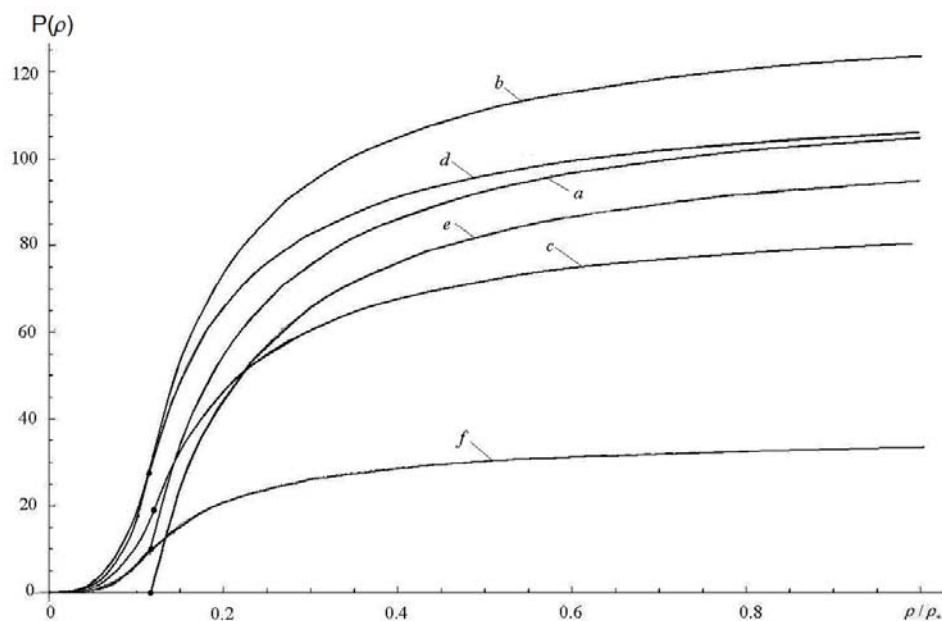


Рис. 1. Примеры вида уравнения состояния $P(\rho)$

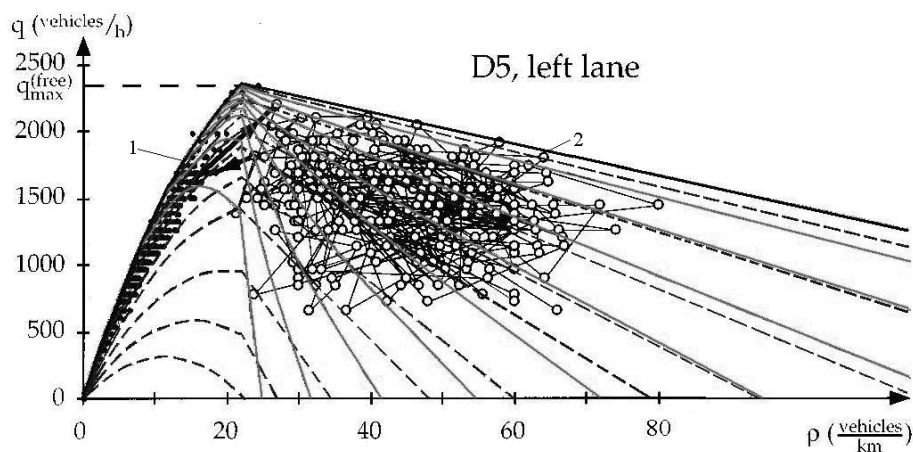


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальных данных – зависимости транспортного потока от плотности для движения по одной (левой) полосе высокоскоростной автодороги, взяты из статьи [Kerner, Rehborn, 1996]

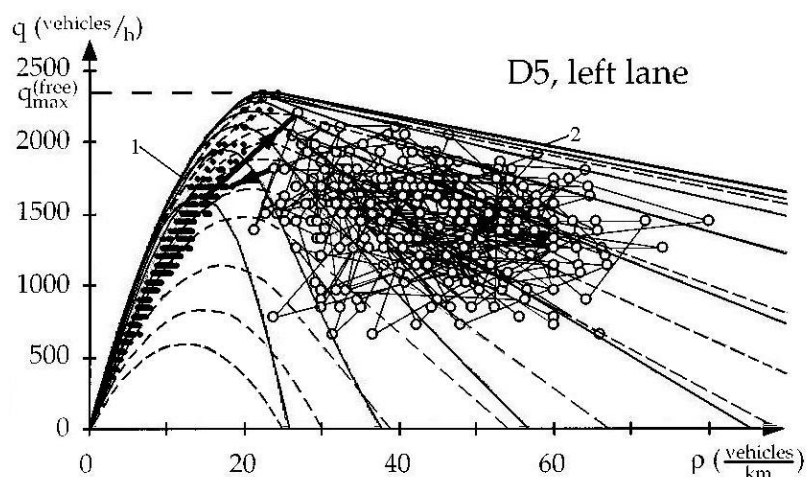


Рис. 3. Аппроксимация экспериментальных данных – зависимости транспортного потока от плотности для движения по одной (левой) полосе высокоскоростной автостреды, взяты из статьи [Kerner, Rehborn, 1996]

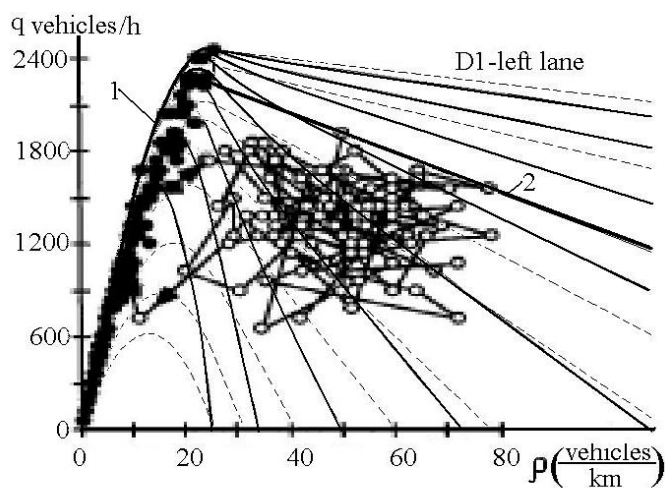


Рис. 4. Аппроксимация экспериментальных данных – зависимости транспортного потока от плотности для движения по одной (левой) полосе высокоскоростной автостреды, взяты из статьи [Kerner, Rehborn, 1997]

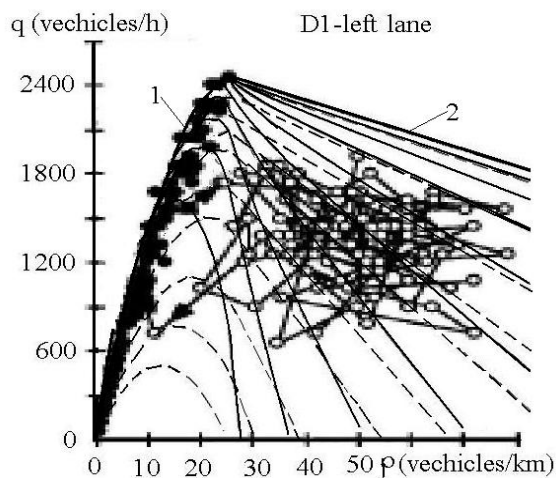


Рис. 5. Аппроксимация экспериментальных данных – зависимости транспортного потока от плотности для движения по одной (левой) полосе высокоскоростной автостреды, взяты из статьи [Kerner, Rehborn, 1997]

Однако при дальнейшем увеличении плотности до значений $\rho > \rho_f$ такой однозначной зависимости как в (3) из представленных экспериментальных данных не наблюдается вследствие взаимодействия волн разгона и торможения при интенсивном (с закритической плотностью $\rho > \rho_f$) автомобильном движении. Скорость свободного движения потока автомобилей $v_0(0) = (\partial Q(\rho) / \partial \rho)_{\rho=0}$ определяется правилами дорожного движения, техническими характеристиками автомобилей и стилем вождения участников дорожного движения и обеспечивает связь этого параметра со значениями Q_f, ρ_f, c_f :

$$v_0 = v(0) = Q_f / \rho_f + c_f. \quad (4)$$

Предполагая существование аналогичной (3) однозначной зависимости потока от плотности также и при $\rho > \rho_f$, будем полагать ее линейной в области реализуемых значений при $\rho > \rho_f$ (прямая 2 на рис. 2–5):

$$Q(\rho) = c_*(\rho_* - \rho), \quad Q(\rho_f) = c_*(\rho_* - \rho_f) = d \times Q_f, \quad \rho > \rho_f \quad (5)$$

с обращающимся в ноль при максимальной плотности $\rho = \rho_*$ потоком и с возможным его разрывом в случае $d < 1$ при критической плотности $\rho = \rho_f$, коэффициент разрыва d определяется из измеренных данных:

$$d = c_*(\rho_* - \rho_f) / Q_f \leq 1. \quad (6)$$

Здесь ρ_* – предельно допустимая плотность потока автомобилей (пропускная способность дороги), соответственно c_* – аналог «скорости звука» при этой плотности.

Зависимости $Q = Q(\rho)$ из (3), (5) или аналогичных аппроксимаций экспериментально измеренных данных, вместе с первым уравнением из (1) также как и система уравнений (1), (2), может непосредственно использоваться для моделирования дорожного движения. В этом случае движение автомобилей описывается одним нелинейным уравнением переноса для плотности (LWR):

$$\partial \rho / \partial t + \partial Q(\rho) / \partial x = \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \partial \rho / \partial x = 0. \quad (7)$$

Скорость транспортного потока $v(\rho)$ всегда может быть вычислена с использованием рассчитанных из (7) значений плотности ρ и известной фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$:

$$v(x, t) = Q(\rho(x, t)) / \rho(x, t). \quad (8)$$

Именно так устроена модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса (LWR), которая все еще популярна в прикладных расчетах.

В работе [Zhang, 2003] Чжан доказал теорему, определяющую свойства анизотропии или изотропии транспортного потока из конкретного вида фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$. Анизотропия транспортного потока определяется в ней достаточно просто при решении задачи Римана с произвольными начальными данными, собственные значения матрицы Якоби для исходной системы уравнений не должны превосходить по величине скорости потока в любой его точке. Это означает, что машины, едущие сзади, никак не могут воздействовать на едущие впереди них.

У уравнения (7) существует только одно собственное значение, с которым возмущение распространяется вдоль транспортного потока, $c(\rho) = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$, соответственно, анизотропным поток

будет там, где $c(\rho) = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \leq v(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$, и изотропным, где $c(\rho) = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} > v(\rho)$. В случае вида фундаментальной диаграммы (3), (5) получается, что $Q''(\rho) \leq 0$, $\forall \rho$ и, соответственно,

$$v(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho} = \begin{cases} (Q_f / \rho_f + c_f (1 - \rho / \rho_f)), & \rho \leq \rho_f, \\ Q(\rho) = c_* \left(\frac{\rho_*}{\rho} - 1 \right), & \rho > \rho_f, \end{cases}$$

$$c(\rho) = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = \begin{cases} (Q_f / \rho_f + c_f (1 - 2\rho / \rho_f)), & \rho \leq \rho_f, \\ Q(\rho) = -c_*, & \rho > \rho_f, \end{cases}$$

откуда видно, что $c(\rho) \leq v(\rho)$, если плотность $0 \leq \rho \leq \rho_*$, что означает выпуклость и анизотропию фундаментальной диаграммы (3), (5). В то же время, если бы мы взяли фундаментальную диаграмму, представленную на рис. 3, и получили бы для неё параметрическую зависимость $Q(\rho)$, то она бы не сохраняла анизотропию при тех значениях плотности $0 \leq \rho \leq \rho_*$, для которых угол $\alpha_0 = Q/\rho < \alpha_1 = \partial Q/\partial \rho < 90^\circ$. И это вполне согласуется с исследованиями Чзана [Zhang, 2003], поскольку он также показал, что для многополосной автодороги анизотропное свойство транспортного потока может нарушаться.

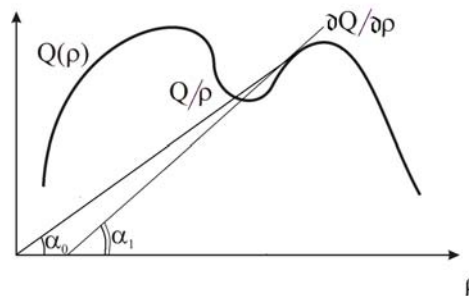


Рис. 6. Пример фундаментальной диаграммы, полученной по реальным данным с третьего транспортного кольца в 2005 г. для одной (агрегированной) полосы

В данной работе ставится задача получить для произвольного вида фундаментальной диаграммы аналог уравнения состояния (зависимость давления от плотности) для заданной автодороги $P = P(\rho)$ и использовать его для решения системы (1). Использование одного уравнения не является достаточным для корректного описания всех фаз (состояний) транспортного потока, наблюдаемых на рис. 2–5 [Kerner, 2009]). Сделать это можно, если воспользоваться хорошо известными дифференциальными преобразованиями законов сохранения (см., например, [Годунов, Роменский, 1998]). Умножим (7) на $\partial Q/\partial \rho$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

и воспользуемся следующими дифференциальными соотношениями:

$$\begin{cases} \partial Q / \partial t = \partial(\rho v) / \partial t = v(\partial \rho / \partial t) + \rho(\partial v / \partial t), \\ \partial Q / \partial x = \partial(\rho v) / \partial x = v(\partial \rho / \partial x) + \rho(\partial v / \partial x), \end{cases}$$

подставим их в (9), откуда получим

$$\partial v / \partial t + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \partial v / \partial x = 0. \quad (10)$$

Итак, вместо системы уравнений (1) получен аналог этих законов сохранения в виде системы уравнений (7), (10) в недивергентной форме с нулевой правой частью:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \partial \rho / \partial x = 0, \\ \partial v / \partial t + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \partial v / \partial x = 0. \end{cases} \quad (10a)$$

Из сопоставления уравнений (10) и второго уравнения в (1), записанного в недивергентной форме, можно получить вид уравнения состояния (2). Для этого в (10) добавим и вычтем член $v(\partial v / \partial x)$ и воспользуемся следствием второго дифференциального соотношения: $\partial v / \partial x = (\partial Q / \partial \rho - Q / \rho)(\partial \rho / \partial x) / \rho$. Тогда (10) приводится к виду

$$\partial v / \partial t + v(\partial v / \partial x) + \frac{(Q / \rho - \partial Q / \partial \rho)^2}{\rho} \partial \rho / \partial x = 0.$$

Сравним это уравнение с недивергентной формой второго уравнения системы (1) для одной полосы с нулевой правой частью:

$$\partial v / \partial t + v(\partial v / \partial x) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \partial \rho / \partial x = 0$$

и получим соотношение, связывающее производную давления $\partial P / \partial \rho$, аналог «скорости звука» c , поток Q и плотность ρ :

$$\partial P / \partial \rho = c^2 = (Q / \rho - \partial Q / \partial \rho)^2. \quad (11)$$

Интегрируя (11) можно найти функцию $P(\rho)$ по заданной функции $Q(\rho)$, если последняя описывает достаточно широкий класс дорожного движения.

Для $Q(\rho)$ из соотношений (3), (5) получаем:

$$P(\rho) = c_f^2 \rho^3 / (3\rho_f^2), \quad \text{if } \rho \leq \rho_f, \quad (12)$$

$$P(\rho) = c_f^2 \rho_f / 3 + \rho_*^2 c_*^2 (1 / \rho_f - 1 / \rho), \quad \text{if } \rho > \rho_f. \quad (13)$$

Здесь мы полагали вектор в правой части (1) $f = 0$, поскольку это упрощает выкладки и не нарушает общности построений.

Вблизи предельных значений плотности $\rho \approx \rho_*$ движение является слабосжимаемым, поэтому для обеспечения бесстолкновительного движения в области сильных заторов бралось $\rho_* \geq \rho \geq \rho_\varepsilon = \rho_*(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon \sim 0.1 - 0.01$, соответственно, уравнение состояния (13) модифицировалось следующим образом:

$$\begin{cases} P(\rho) = \left(P_\varepsilon + (\rho - \rho_\varepsilon)(B + C(\rho + \rho_\varepsilon)) \right), \\ C = \left((\partial P / \partial \rho)_* - (\partial P / \partial \rho)_\varepsilon \right) / (\rho_* - \rho_\varepsilon), \\ B = (\partial P / \partial \rho)_* - 2C\rho_*. \end{cases} \quad (14)$$

Выбором значений ρ_ε и $(\partial P / \partial \rho)_\varepsilon = c_\varepsilon^2$ можно также обеспечить приемлемый шаг интегрирования по времени в области автодороги, где плотность приближается к своему предельному значению ρ_* , а значение $(\partial P / \partial \rho)_*$ начинает неограниченно расти.

В системе уравнений (1), (2) всегда можно перейти от рассмотрения каждой из полос к усредненному представлению дороги, по аналогии с многокомпонентной односкоростной моделью баротропного газа будем полагать:

$$\rho = \sum_{s=1}^S \rho_s, \quad v = \sum_{s=1}^S C_s v_s, \quad Q = \sum_{s=1}^S Q_s, \quad P = \sum_{s=1}^S P_s. \quad (15)$$

Здесь s – номер полосы автодороги, S – общее количество полос и концентрации $C_s = \rho_s / \rho = \rho_s / \sum_{s=1}^S \rho_s$, $\sum_{s=1}^S C_s = 1$. Переход (15) удобен тем, что его можно осуществлять как в прямую, так и в обратную сторону в любом участке дороги при возникновении такой необходимости, при этом фундаментальные диаграммы $Q_s(\rho_s)$ и соответствующие им уравнения состояния $P_s(\rho_s)$ могут быть разными для каждой из полос. Индекс s можно связывать не только с номером полосы дороги, но и с маршрутом водителя, типом автомобиля, стилем вождения или опытом водителей и т. д. В этом случае для различных участников движения, имеющих существенно отличающиеся друг от друга константы в уравнениях состояния (12), (13), в дополнение к системе (1), (2), как это принято, можно ввести в рассмотрение соответствующие уравнения конвективно-диффузионного переноса для их концентраций (в том числе между разными полосами дороги).

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial C_s}{\partial x} = f_s(C_1, \dots, C_S), \quad (15a)$$

где $f_s(C_1, \dots, C_S)$ определяет процессы перестроений для полосы с номером s и т. п. В результате процесс расчета на каждом временном шаге сводится к численному интегрированию системы из $S+1$ уравнений для многоскоростной или односкоростной смеси:

$$\begin{cases} v = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S v_s, \\ \partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial x = f_0, \\ \partial(\rho v) / \partial t + \partial(\rho v^2 + P(\rho)) / \partial x = f_1, \\ \partial C_s / \partial t + v \partial C_s / \partial x = f_s(C_1, \dots, C_S), \quad s = 1, \dots, S-1. \end{cases}$$

После чего для текущего шага по времени в каждой точке дороги (t^n, x) производится перерасчет давления:

$$P(t^n, x) = \sum_{s=1}^S P_s(\rho_s(t^n, x)), \quad \rho_s(t^n, x) = C_s(t^n, x) \rho(t^n, x)$$

и все повторяется по циклу.

Имея замкнутую систему уравнений (1), (2) (хорошо известную гиперболическую систему уравнений Эйлера для сжимаемого баротропного газа), можно найти уравнения характеристик и соответствующие условия совместности этой системы уравнений гиперболического типа, соотношения на разрывах, возникающих при переходе от докритического («сверхзвукового») движения к закритическому («дозвуковому») в волнах торможения и т. д. Интегрируя (1), (2) по замкнутому контуру в плоскости $\{x, t\}$, содержащему фронт разрыва, движущегося со скоростью D , можно получить соотношения на разрывах, в частности, уравнение ударной адиабаты, связывающее параметры перед фронтом разрыва (в докритическом потоке с $\rho_1 \leq \rho_f$, кривая 1 на рис. 2) и за фронтом

разрыва (в закритическом потоке с $\rho_2 > \rho_f$, прямая 2 на рис. 2)

$$(P_1(\rho_1) - P_2(\rho_2))(1/\rho_2 - 1/\rho_1) - (v_1 - v_2)^2 = 0, \quad (16)$$

а также скорость движения фронта разрыва:

$$D = (\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2) / (\rho_1 - \rho_2) = (Q_1 - Q_2) / (\rho_1 - \rho_2). \quad (17)$$

Эти соотношения и, в частности, вполне измеряемую величину D , можно использовать для определения констант в уравнении состояния (12), (13), как это делается при построении уравнений состояния сложных физических сред.

Вводя в рассмотрение векторы $V = \{\rho, v\}$, $U(V) = \{P, \rho v\}$, $F(V) = \{\rho v, \rho v^2 + P(\rho)\}$, $f = \{f_0, f_1\}$, систему уравнений (1) можно записать в векторной дивергентной форме

$$\partial U(V) / \partial t + \partial F(V) / \partial x = f(V, x, t) \quad (18)$$

или в форме $\partial U(V) / \partial t + \left(\frac{\partial F(V)}{\partial U(V)} \right) \partial U(V) / \partial x = f(V, x, t)$ с матрицей Якоби

$$A = (\partial F / \partial U) = (\partial F / \partial V) (\partial U / \partial V)^{-1} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Собственные числа матрицы Якоби A : $\lambda_1 = v + c$, $\lambda_2 = v - c$, $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ всегда действительные и различные ($\partial P / \partial \rho = c^2 > 0$) – система (18) строго гиперболического типа, а левые собственные векторы: $\omega_1 = \{c - v, 1\}$, $\omega_2 = \{v + c, -1\}$ – линейно независимы. То есть матрица со строками из левых собственных векторов $\Omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c - v & 1 \\ v + c & -1 \end{Bmatrix}$ – неособенная, т. к. $\text{Det} \Omega = -2c/\rho \neq 0$ при ненулевых плотности ρ и «скорости звука» c . Для упрощения выкладок в дальнейшем будем полагать вектор правой части $f = 0$.

Эквивалентная (1) характеристическая форма уравнений совместности вдоль характеристик первого (знак (+) – индекс 1) и второго (знак (–) – индекс 2) семейств

$$dx = \lambda_i dt = (v \pm c) dt, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_i \cdot \frac{dV}{dt_i} = c(\rho) d\rho / dt_i \pm \rho dv / dt_i = 0, \\ \frac{d}{dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (21)$$

Каждое из уравнений (21) является, по сути, обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль i -й характеристики (20). Для уравнения состояния (12), (13) условия совместности (21) интегрируются аналитически, что позволяет получить вид инвариантов Римана r_i , постоянных вдоль соответствующих характеристик λ_i , $i = 1, 2$:

$$r_i(\rho, v) = (c_f \rho / \rho_f) \pm v = \text{const}, \quad \text{if } \rho \leq \rho_f, \quad (22)$$

$$r_i(\rho, v) = -(c_* \rho_* / \rho) \pm v = \text{const}, \quad \text{if } \rho > \rho_f. \quad (23)$$

В фазовой плоскости $\{\rho, Q\}$ кривые (22), (23) имеют вид

$$Q(\rho) = \pm \rho(r_i - c_f \rho / \rho_f) = \text{const}, \quad \text{if } \rho \leq \rho_f, \quad (24)$$

$$Q(\rho) = \pm(r_i \rho + c_* \rho_*) = \text{const}, \quad \text{if } \rho > \rho_f. \quad (25)$$

Характеристическая форма уравнений (21) или ее модификации с использованием инвариантов Римана (22), (23) (если удастся найти точное решение (21)), также как соотношения на разрывах (16), (17), необходимы при построении эффективных разностных схем для численного решения системы (1), (2) (см., например, [Холодов, Холодов, 2006]), а в граничных точках они используются для замыкания краевых условий.

Число граничных условий на въездах-выездах автодороги зависит от знаков собственных чисел матрицы Якоби A (19). Их количество на въездах может быть равным двум при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, что полностью определяет параметры такого узла, одному при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ или нулю при отрицательных $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. На въездах их число может быть равным нулю при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, единице при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ или двум при отрицательных $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

В соответствии с этим на въездах-выездах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени значение интенсивности потока автомобилей $Q(t)$ или величина плотности потока $\rho(t)$ (при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$), для расчета таких узлов в качестве второго уравнения привлекается одно из условий совместности (21) или (22), (23) вдоль идущих внутрь области интегрирования характеристик. Если необходимо задавать два граничных условия, обе эти переменные задаются одновременно. Также возможна ситуация, когда граничные узлы рассчитываются через значения во внутренних точках дороги, тогда задавать граничные условия не требуется. На въездах иногда используют неотражающие граничные условия – нулевые производные

$$(\partial Q / \partial x) = 0, \quad (\partial v / \partial x) = 0,$$

что, вообще говоря, является корректным лишь при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Помимо граничных условий, для системы (1), (2) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x).$$

Обсудим более подробно тот факт, что собственное значение матрицы Якоби системы (1) или (18) $\lambda_1 = v + c$, $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho} \geq 0$ по величине превосходит скорость транспортного потока. На самом деле это не является противоречием, скорее, наоборот – расширяет класс возможных решений. Выше уже обсуждалось, что транспортный поток далеко не всегда должен сохранять анизотропию. В работе [Aw, Rascle, 2000] Эйв и Раскл предложили использовать для моделирования транспортного потока новую нелинейную систему уравнений, исходя из следующих принципов:

- система должна быть гиперболической;
- при решении задачи Римана с произвольными неотрицательными граничными условиями значения скорости и плотности в результате расчета остаются неотрицательными и ограниченными сверху;
- при решении задачи Римана с произвольными данными собственные значения не превосходят скорости потока. Это означает, что машины, едущие сзади, не могут воздействовать на едущих впереди (анизотропия транспортного потока);
- решение задачи Римана должно качественно согласовываться с тем, что каждый водитель наблюдает каждый день. А именно, торможение вызывает волны сжатия, скорости которых могут быть как отрицательными, так и неотрицательными, в то время как ускорение

вызывает волны разрежения. При этом по-прежнему должно выполняться условие анизотропности;

- решение задачи Римана должно быть чувствительно к начальным данным в случае малой плотности. Другими словами, при $\rho = 0$ не должно быть непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Исходя из этих предположений для системы были заданы следующие уравнения:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ (\rho(v + p(\rho)))_t + (\rho v(v + p(\rho)))_x = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что данная система уравнений может быть легко получена как следствие системы уравнений (1) путем выбора соответствующего вида уравнения состояния (2). Для начала преобразуем второе уравнение системы к недивергентной форме:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ v_t + \left(v - \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right) v_x = 0. \end{cases}$$

Сопоставляя второе уравнение данной системы с (10), получаем параметрическую зависимость производной потока от плотности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} &= v - \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} = \frac{Q}{\rho} - \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \Leftrightarrow \\ v - \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} &= \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \end{aligned}$$

Используя (11) $\partial P / \partial \rho = (v - \partial Q / \partial \rho)^2$, получаем общий вид уравнения состояния (2) для системы уравнений Эйва–Раскла:

$$P(\rho) = \int_0^\rho \left(\frac{\partial P(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right) d\tilde{\rho} = \int_0^\rho \left(v - \frac{\partial Q(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho} = \int_0^\rho \left(\tilde{\rho} \frac{\partial p(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho}.$$

Получим теперь уравнения Эйва–Раскла из уравнений (1) с использованием параметрической зависимости $\frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} = \rho^2 \left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right)^2$. Первые уравнения в обеих системах полностью идентичны, поэтому рассмотрим только вторые:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + P(\rho))}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \left(\rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right)^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения (1) с использованием $\frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = v - \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho}$ получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v - \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

Подставляем полученное выражение $\rho^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ во второе уравнение (1):

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + p \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v p)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho(v + p(\rho)))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v(v + p(\rho)))}{\partial x} = 0.$$

В итоге получаем второе уравнение системы Эйва–Раскла, что и требовалось доказать. Итак, доказано, что система уравнений Эйва–Раскла получается из системы (1) с нулевой правой частью с использованием параметрической зависимости

$$\frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} = \rho^2 \left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right)^2.$$

Из вышеприведенного анализа можно сделать вывод: записав уравнения в новой форме, Эйв и Раскл таким образом заложили определенные свойства в свою систему уравнений. Сделав это, они тем самым привели уравнение состояния (2) к конкретному виду:

$$P(\rho) = \int_0^\rho \left(\tilde{\rho} \frac{\partial p(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho}, \text{ который обеспечивает анизотропию транспортного потока на решениях}$$

системы уравнений (1). При этом надо ясно понимать, что кроется за параметром $p(\rho)$, который они ввели в рассмотрение в своей статье [Aw, Rascle, 2000]. Чжан [Zhang, 2002] и другие авторы [Siebel, Mauser, 2006] использовали в своих последующих работах вместо функции $p(\rho)$ равновесную, или «желаемую», скорость: $V(\rho) = -p(\rho)$. Использование рав-

$$\text{новесной скорости } V(\rho) \text{ в уравнении состояния (2) } P(\rho) = \int_0^\rho \left(\tilde{\rho} \frac{\partial V(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho} \text{ накладывает оп-}$$

ределенные ограничения на класс возможных решений системы (1), (2). Равновесная скорость $V(\rho) = Q(\rho)/\rho$ получается из значений интенсивности потока, которые лежат на кривой, огибающей все возможные наблюдаемые значения потока $Q(\rho)$ на фундаментальной диаграмме.

Если провести аналогию с газовой динамикой, то данная кривая $Q(\rho)$ была бы кривой адиабатического безударного сжатия и имела бы непрерывную первую и вторую производную (см. например, [Седов, 1987]), пример такой фундаментальной диаграммы представлен на рис. 7. Понятно, что такого рода ограничения вводить при выборе огибающей зависимости $Q(\rho)$ не всегда возможно, и для результатов, представленных на рис. 2–5, это сделать не удалось, как это видно из уравнений (3), (5).

В общем случае вид зависимости $Q(\rho)$, получаемой из экспериментальных данных, может быть весьма различным и не всегда стоит выбирать его как кривую, огибающую все возможные наблюдаемые значения потока на фундаментальной диаграмме. Зависимость такого типа $Q(\rho)$ правильнее было бы использовать для уравнения равновесной, или «желаемой»,

скорости $V(\rho) = Q(\rho)/\rho$, которая обычно входит в правую часть закона сохранения (изменения) «импульса» в системе (1):

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + P(\rho))}{\partial x} = -\frac{1}{T}(\rho v - \rho V(\rho)),$$

здесь $T \sim 1-5$ (сек.) – время релаксации. Поскольку именно стремлением основной массы водителей двигаться с равновесной, или «желаемой», скоростью приводит к затуханию локальных возмущений в динамике транспортного потока на дороге.

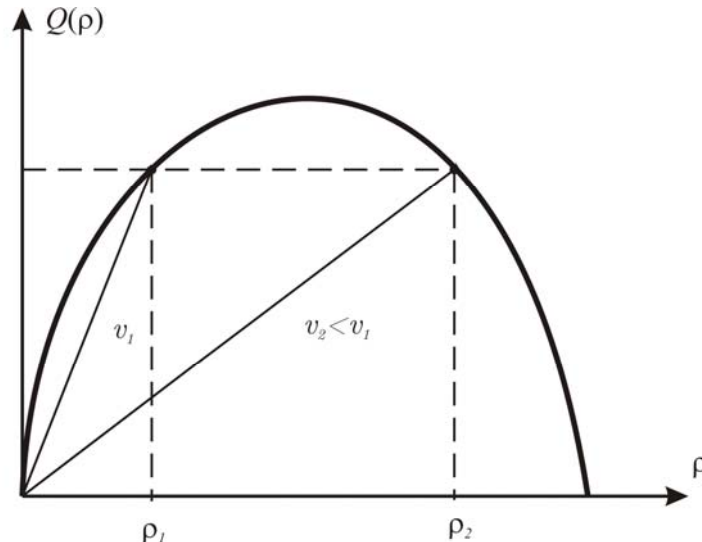


Рис. 7. Пример фундаментальной диаграммы для транспортного потока, непрерывно двигающегося с «желаемой» скоростью

Для представленных на рис. 2 экспериментальных данных из [Kerner, Rehborn, 1996] (рис. 2, 3) и [Kerner, Rehborn, 1997] (рис. 4, 5) (точки и соединяющие их отрезки прямых) константы $\rho_f, Q_f, c_f, d, \rho_*, c_*$ в уравнениях (3), (5), аппроксимирующих границы области реализуемых движений автомобилей, принимались следующими:

рис. 2:
$$\begin{cases} \rho_f = 0.0243 [\text{АТС/м}], Q_f = 0.656 [\text{АТС/с}], c_f = 15.8 [\text{м/с}], d = 1, \\ \rho_* = 0.21 [\text{АТС/м}], c_* = 3.53 [\text{м/с}], v_0 = 42.8 [\text{м/с}], \end{cases} \quad (26)$$

рис. 3:
$$\begin{cases} \rho_f = 0.0243 [\text{АТС/м}], Q_f = 0.656 [\text{АТС/с}], c_f = 27 [\text{м/с}], d = 1, \\ \rho_* = 0.21 [\text{АТС/м}], c_* = 3.53 [\text{м/с}], v_0 = 54 [\text{м/с}], \end{cases} \quad (27)$$

рис. 4:
$$\begin{cases} \rho_f = 0.0213 [\text{АТС/м}], Q_f = 0.6 [\text{АТС/с}], c_f = 22.4 [\text{м/с}], d = 0.9, \\ \rho_* = 0.21 [\text{АТС/м}], c_* = 2.9 [\text{м/с}], v_0 = 50.6 [\text{м/с}], \end{cases} \quad (28)$$

рис. 5:
$$\begin{cases} \rho_f = 0.0213 [\text{АТС/м}], Q_f = 0.6 [\text{АТС/с}], c_f = 22.4 [\text{м/с}], d = 0.9, \\ \rho_* = 0.21 [\text{АТС/м}], c_* = 3.17 [\text{м/с}], v_0 = 50.6 [\text{м/с}], \end{cases} \quad (29)$$

Соответствующие им граничные зависимости потока от плотности (3), (5) показаны сплошными линиями 1, 2 на рис. 2. Для этих же значений констант уравнения состояния (12), (13) представлены на рис. 1. Кривые a, b, c, d соответствуют константам из (26)–(28) и (29).

На рис. 2–5 сплошными линиями без номеров показаны ударные адиабаты (16) для ряда значений $\rho_1, v_1 = Q_1/\rho_1$, принадлежащих кривым (3), а штриховыми линиями показаны инварианты Римана первого семейства (24), (25), $i = 1$. Инварианты Римана второго семейства $i = 2$ симметричны первому семейству относительно оси абсцисс. Отдельно стоит обратить внима-

ние на рис. 4. Здесь мы видим, что переход из докритического режима движения (кривая 1) к закритическому (прямая 2) осуществляется через ударную волну сжатия и коэффициент разрыва становится $d < 1$, что приводит к необратимости данного процесса. Соответственно, вернуться назад в ту же точку на кривой 1 с прямой 2 через волну разрежения становится невозможным.

Для оценки влияния констант на профиль давления в уравнении состояния (12), (13) для варианта (27) существенно были изменены коэффициенты c_f и d . На рис. 8 для случая $c_f = 0.1$ [м/с] и на рис. 9 для значения параметра $d = 0.5$ представлены аналогичные описанным выше зависимости моделируемых переменных: предельные зависимости потока от плотности – кривые 1, 2; ударные адиабаты – сплошные кривые без номеров; характеристики первого семейства – штриховые линии. Соответствующие зависимости для давления показаны на рис. 1 (кривые e и f). Видно, что существенное отличие параметра d от 1 приводит к заведомо неправильному поведению ударных адиабат (увеличение скорости при переходе от докритического режима к закритическому в волне торможения и т. п.). Из сравнения кривых a и e на рис. 1 видно также, что аппроксимация в (3) докритической ветви $Q(\rho)$ даже линейной функцией, когда $c_f \approx 0$, – влияет на уравнение состояния сравнительно слабо. Сопоставление кривых a и c на рис. 1, для которых $\partial Q(\rho_f)/\partial \rho > 0$, с кривыми b и d , для которых $\partial Q(\rho_f)/\partial \rho = 0$, показывает, что равенство нулю $\partial Q(\rho_f)/\partial \rho = 0$ дает более гладкое сопряжение докритической и закритической ветвей в профиле $P(\rho)$ и обеспечивает принципиальную возможность перехода в закритический режим движения без экстренного торможения. В этом случае закритическая ветвь зависимости потока от плотности (5) (прямая № 2 на рис. 5) является слабой волной торможения (16) (при переходе через которую параметры непрерывны, а разрывными являются нормальные производные) и при этом она совпадает с одной из характеристик первого семейства.

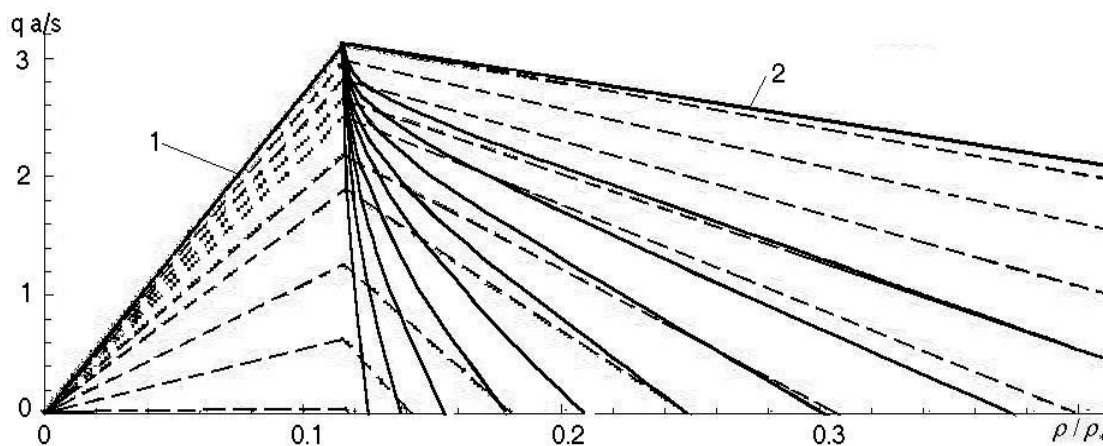


Рис. 8. Вариант (27), $c_f = 0.1$ [м/с]: предельные зависимости потока от плотности – кривые 1, 2; ударные адиабаты – сплошные кривые без номеров; характеристики первого семейства – штриховые линии

Численная реализация модели и результаты расчетов

Трудность реализации предлагаемой модели связана прежде всего с значительной неопределенностью определяющих параметров, констант «уравнения состояния» и процессов регулирования (многопараметричность задач), поэтому полномасштабная их реализация требует значительных вычислительных ресурсов и усилий по идентификации определяющих параметров («калибровка модели»). Структура искомого решения в таких системах может иметь очень

сложный характер из-за взаимодействия многочисленных волн разгона – торможения друг с другом, в том числе иметь разрывный характер. Это требует специальных исследований и предъявляет очень жесткие требования к выбору численных методов, пригодных для решения данного класса задач.

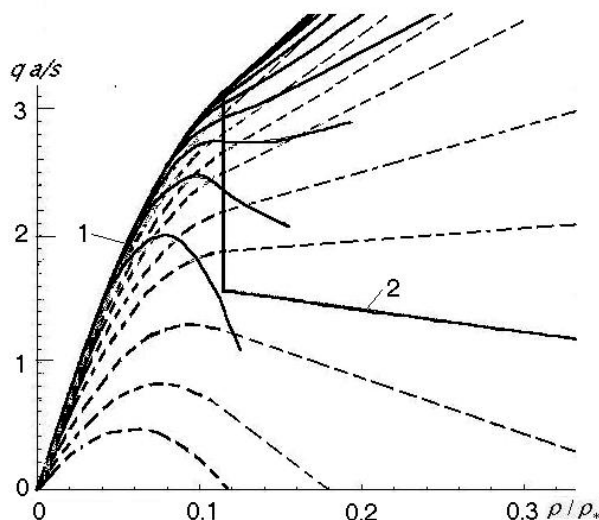


Рис. 9. Вариант (27), $d = 0.5$: предельные зависимости потока от плотности – кривые 1, 2; ударные адиабаты – сплошные кривые без номеров; характеристики первого семейства – штриховые линии

Составляющая основу данной модели система уравнений в частных производных (1), (2) имеет гиперболический тип, и для численного решения таких уравнений существует достаточно много разнообразных по своим качествам численных методов. Однако отмеченные выше особенности потребовали специальных исследований и использования новых монотонных схем высокого порядка аппроксимации [Холодов, Холодов, 2006].

Результаты расчетов

Определяющими функционирование описанной выше динамической модели уличного движения параметрами прежде всего являются характеристики автодороги и уравнения состояния (2). Для оценки влияния неопределенности в их выборе (по имеющимся в литературе экспериментальным данным) были проведены тестовые расчеты автомобильного движения с использованием описанных выше макроскопических моделей гидродинамического типа на модельной ситуации, подробно исследованной Сиебелем и Маузером [Siebel, Mauser, 2006]. С использованием этих моделей изучается распространение затора вдоль кольцевого участка дороги. На диаграммах по оси X отложено расчетное время в секундах, по оси Y расстояние вдоль исследуемого участка дороги в метрах. Здесь и далее расчет производится на кольцевом участке дороги длиной 7 км. При этом на участке между 5-ым и 6-ым километрами моделируется затор, аналогично тому, как это было сделано в работе [Siebel, Mauser, 2006], путем модификации скорости транспортного потока по следующей формуле на каждом временном шаге расчета:

$$v^{\text{mod}} = v(t, x) + (V(\rho) - v(t, x)) |\sin(\pi x)|, \quad (30)$$

где масштаб расстояния от начала до конца затора соответствует полупериоду $\sin(\cdot)$. Таким образом, при достаточно высокой начальной плотности на участке дороги может образоваться затор, распространяющийся со временем в направлении, противоположном направлению движения АТС. Начальные значения рассчитываемых величин показаны в верхней части рисунков.

Рассмотрим результаты моделирования по модели Эйва–Раскла [Aw, Rascle, 2000] с выбором зависимости $V(\rho) = -p(\rho)$ по формуле, предложенной Сиебель и Маузером в работе [Siebel, Mauser, 2006]:

$$V(\rho) = u_0 \left(1 - \exp \left(- \frac{Q_f}{u_0} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_*} \right) \right) \right). \quad (31)$$

На рис. 10 хорошо виден локальный движущийся затор – широкий движущийся кластер, в терминологии модели трех фаз Кернера [Kerner, 2009], возникающий на узком месте транспортной сети. Однако локальный движущийся затор – не единственная пространственно-временная структура, наблюдаемая в реальности. Как на немецких автобанах, так и на московских магистралях наблюдается ситуация, когда возле узкого места транспортной сети образуется область повышенной плотности АТС, но при этом границы этой области относительно стабильны, а не перемещаются против направления движения транспортного потока в отличие от динамики локального движущегося затора.

Модель Aw-Rascle

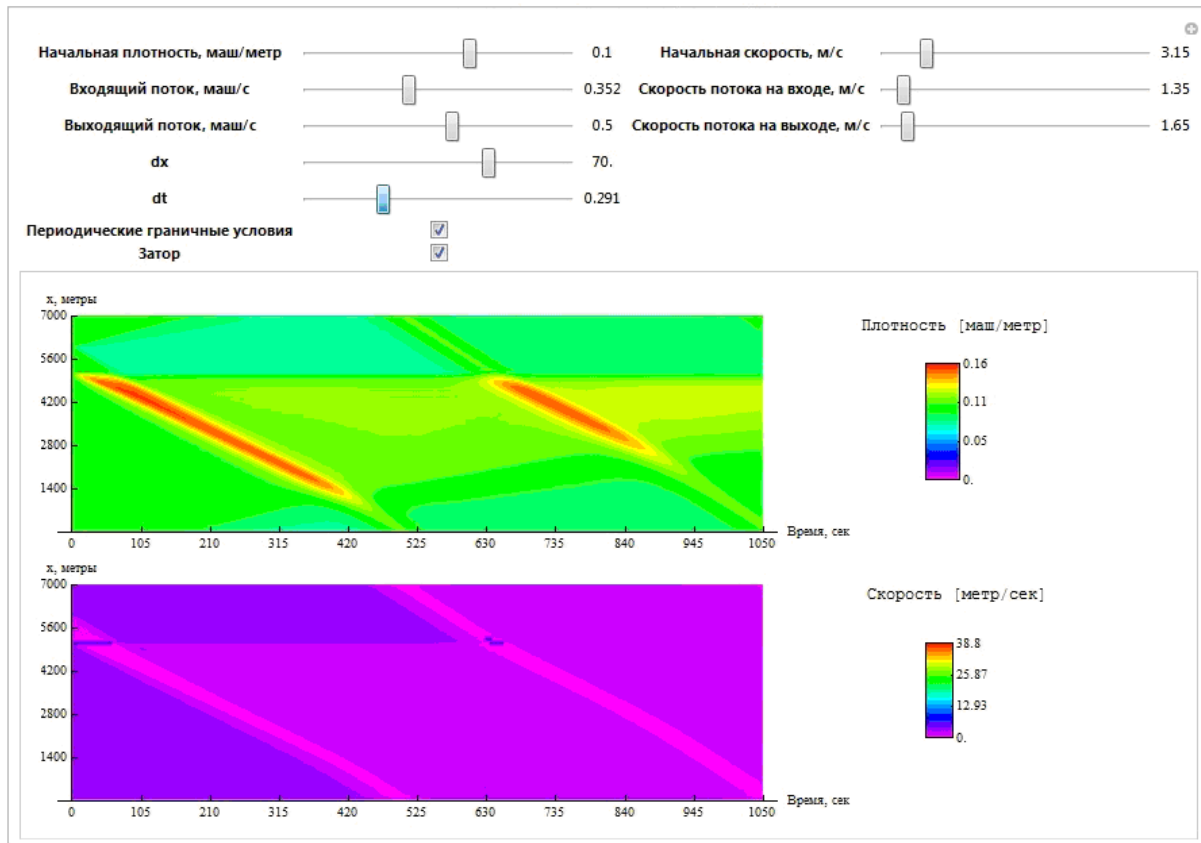


Рис. 10. Результат макроскопического моделирования согласно модели Эйва–Раскла [Aw, Rascle, 2000] (цветное изображение можно увидеть в электронной версии на сайте журнала <http://crm.ics.org.ru/journal/article/1828/>)

В качестве демонстрации этой ситуации рассмотрим первую модель Сиебеля–Маузера с выбором зависимости $V(\rho) = -p(\rho)$ по формуле, предложенной ими в работе [Siebel, Mauser, 2006]:

$$V(\rho) = u_0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{n_1} \right)^{n_2}. \quad (32)$$

Как видно на рис. 11, перед затором образуется область синхронизированного транспортного потока. Плотность в этой области выше плотности свободного потока, но заметно ниже плотности в широком движущемся кластере. Стоит отметить, что тип наблюдаемой структуры сильно зависит от начальных данных, т. е. в рамках одной и той же модели можно наблюдать различные фазы состояния потока, должным образом подбирая параметры расчетов. В частности, фаза синхронизированного потока наблюдается при более низких начальных плотностях потока (около 0.07 АТС/м, против 0.1 АТС/м для широкого движущегося кластера), изначально движущегося с относительно небольшой скоростью (около 1.4 м/с против 2.8 м/с для кластера).

Первая модель Siebel–Mauser

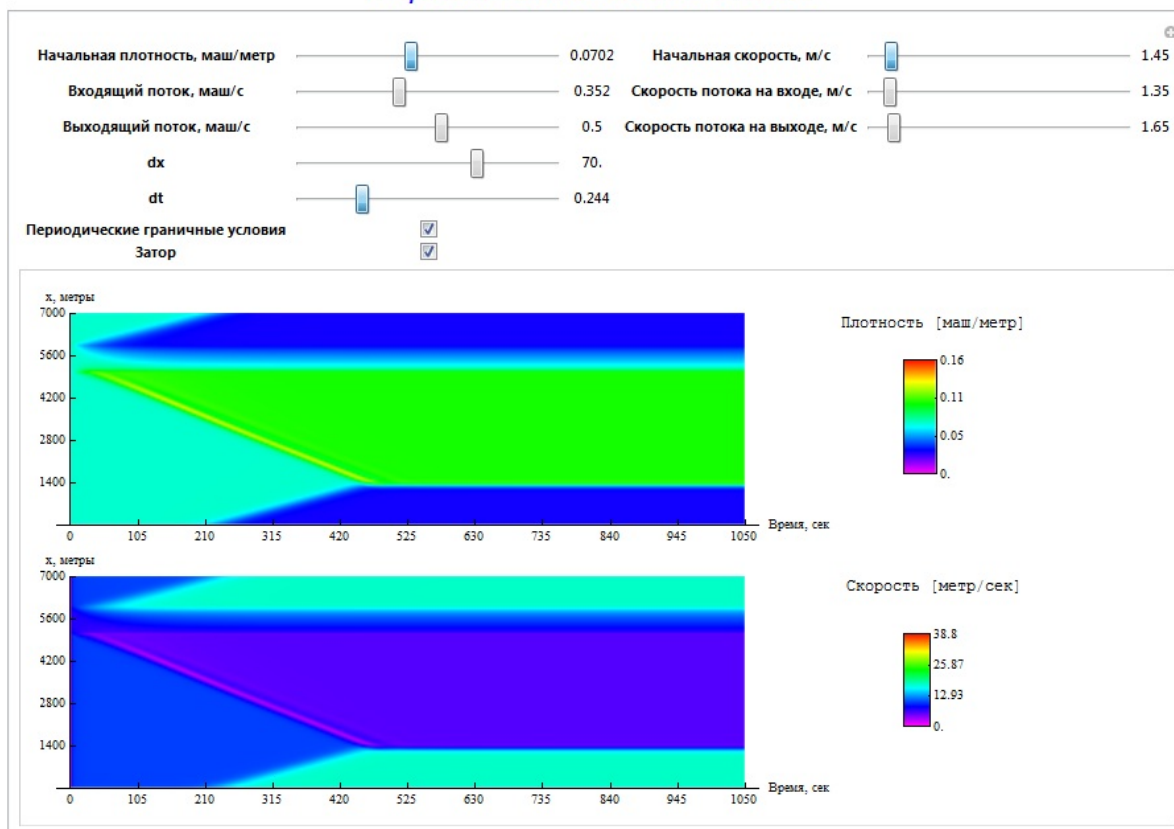


Рис. 11. Синхронизированный транспортный поток в рамках первой модели Сиебель–Маузера [Siebel, Mauser, 2006] (цветное изображение можно увидеть в электронной версии на сайте журнала <http://crm.ics.org.ru/journal/article/1828/>)

Приведем также результаты расчетов второй модели Сиебеля–Маузера [Siebel, Mauser, 2006]. Как видно на рис. 12, наблюдаемые пространственно – временные структуры принципиально ничем не отличаются от описанного ранее широкого движущегося кластера, показанного на рис. 10, за тем лишь исключением, что затор гораздо дольше сохраняет контуры с течением времени, и как следствие, кластер проходит гораздо большее расстояние против направления движения АТС по сравнению с расчетами в рамках модели Эйва–Раскла [Aw, Rascle, 2000].

Результаты численного эксперимента многокомпонентной модели представлены на рис. 19. Здесь вместо локальной модификации скорости имеет место изначально неравномерное распределение концентраций АТС различного типа. Так, между 5-ым и 6-ым километрами моделируемого участка дороги, концентрация грузовиков превышает концентрацию легковых автомобилей в 3 раза, в отличие от обратного соотношения для остального участка дороги (см. рис. 14). Локальное возрастание концентрации грузового транспорта, имеющего заметное отличие в параметрах уравнения состояния (2) приводит к возникновению ситуации схожей с наблюдаемой на рис. 12, за исключением того, что затор имеет более размазанные контуры и быстрее начинает расплзаться с течением времени.

Вторая модель Siebel–Mauser

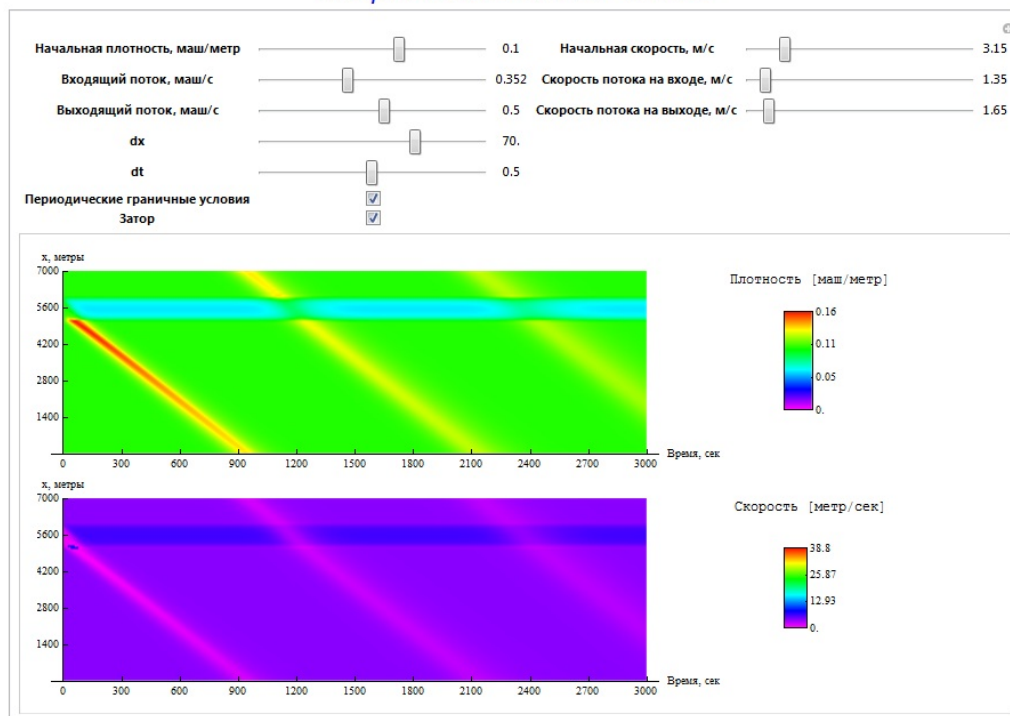


Рис. 12. Широкий движущийся кластер в рамках второй модели Сиебель–Маусера [Siebel, Mauser, 2006] (цветное изображение можно увидеть в электронной версии на сайте журнала <http://crm.ics.org.ru/journal/article/1828/>)

Многокомпонентная модель

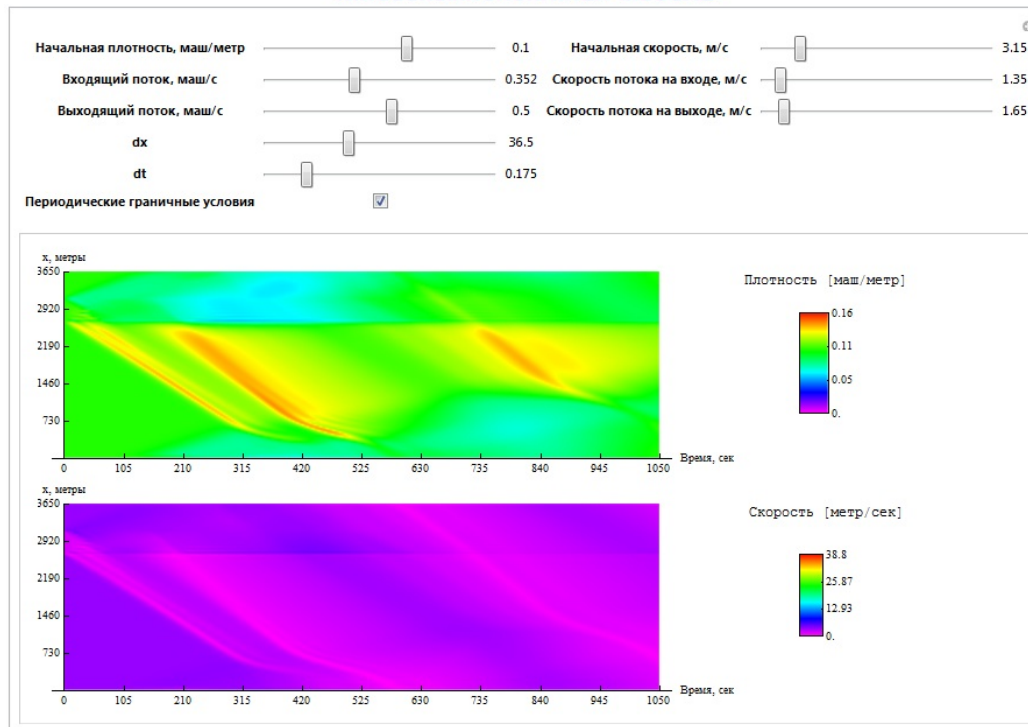


Рис. 13. Затор в многокомпонентной макроскопической модели (цветное изображение можно увидеть в электронной версии на сайте журнала <http://crm.ics.org.ru/journal/article/1828/>)

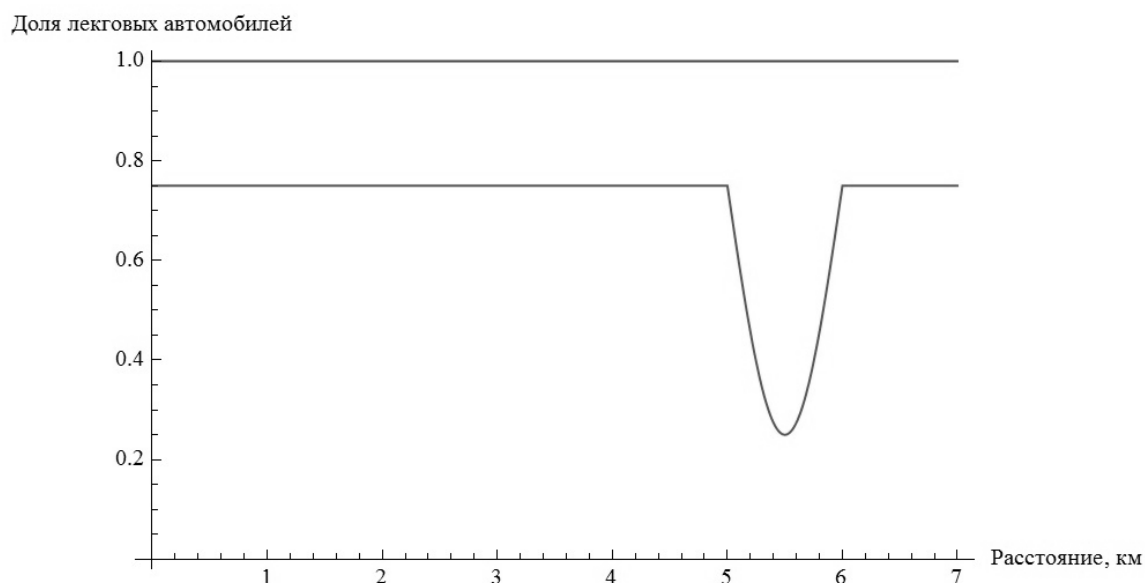


Рис. 14. Распределение концентраций легковых АТС вдоль отрезка дороги в начальный момент времени для численного эксперимента, изображенного на рис. 13

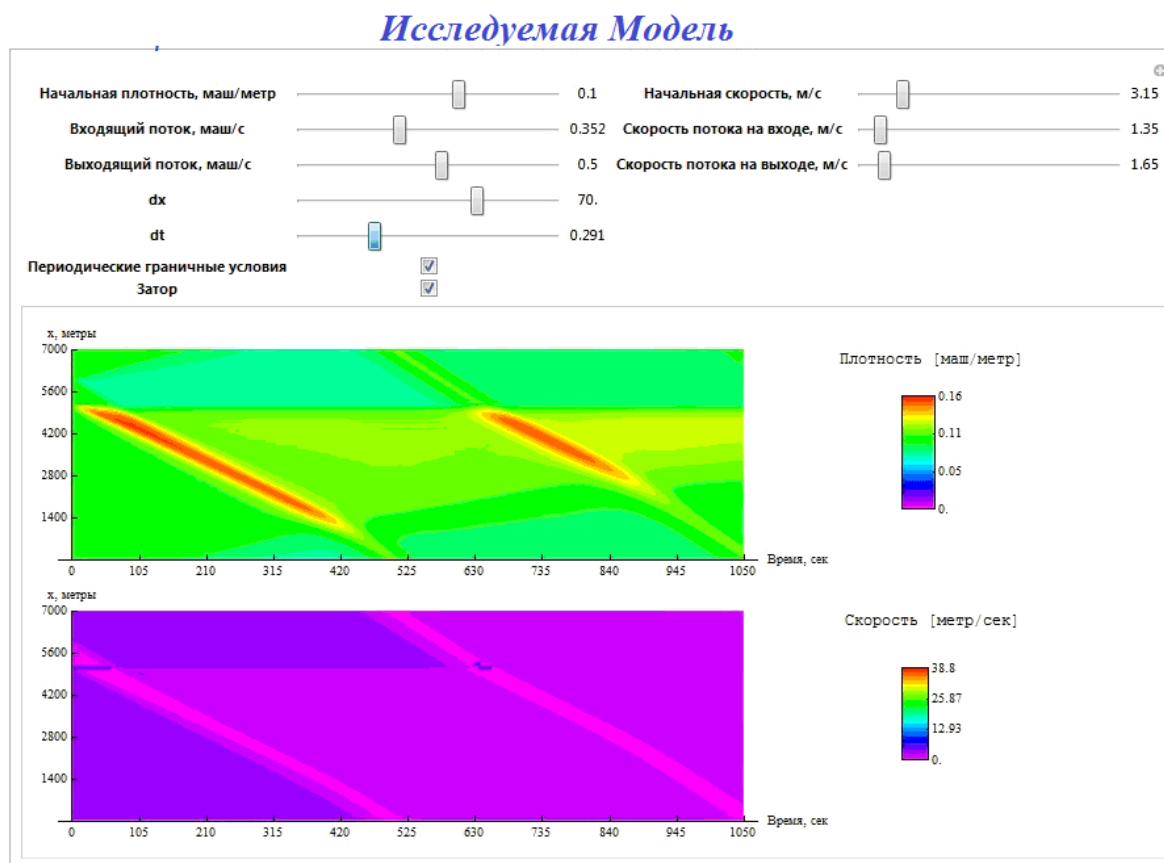


Рис. 15. Результат макроскопического моделирования согласно исследуемой модели (1) с использованием уравнения состояния (2) из второй модели Сиебеля–Маузера (31) и нулевой правой части (цветное изображение можно увидеть в электронной версии на сайте журнала <http://ctm.ics.org.ru/journal/article/1828/>)

Также были проведены расчеты с использованием исследуемой модели (1), (2) – рис. 15. Результаты, показанные на рис. 15, полностью воспроизводят результаты, представленные на

рис. 10. Это вполне логично, так как исследуемая модель (1) полностью аналогична модели Эйва-Раскла [Aw, Rascle, 2000] при выборе соответствующего уравнения состояния (2)

$$P(\rho) = \int_0^{\rho} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial V(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho} \text{ с использованием (31) } P(\rho) = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{2Q_f}{v_0} \left(\frac{1}{\rho_*} - \frac{1}{\rho} \right) \right).$$

Следующим шагом была сделана проверка работоспособности модели (1), (2) на реальных дорожных данных. В качестве примера транспортной сети мы взяли одну из наиболее загруженных магистралей США – автостраду I-80 в районе залива Сан-Франциско – рис. 16. Интересующий нас участок западного направления – это 30 км автострады, ведущие от моста Карквинес Бридж на севере восточного берега залива через города Сан-Пабло, Ричмонд, Беркли и Окленд к мосту Бэй Бридж – основной магистрали, соединяющей восточный берег залива с городом Сан-Франциско (см. рис. 16, на котором начало и конец участка обозначены кружками). На данном участке автострады имеется 29 въездов, 24 съезда и 57 датчиков – индуктивных детекторов.

Для начала была получена картографическая информация об интересующих нас дорогах через доступную геоинформационную систему (www.openstreetmap.org). Данные ГИС были использованы для составления графа моделируемой автомагистрали.

Данные измерений плотности и интенсивности транспортных потоков с автострадных датчиков, предоставляемые системой PeMS (<http://pems.eecs.berkeley.edu>), позволяют идентифицировать фундаментальные диаграммы для соответствующих участков автострады (рис. 17).

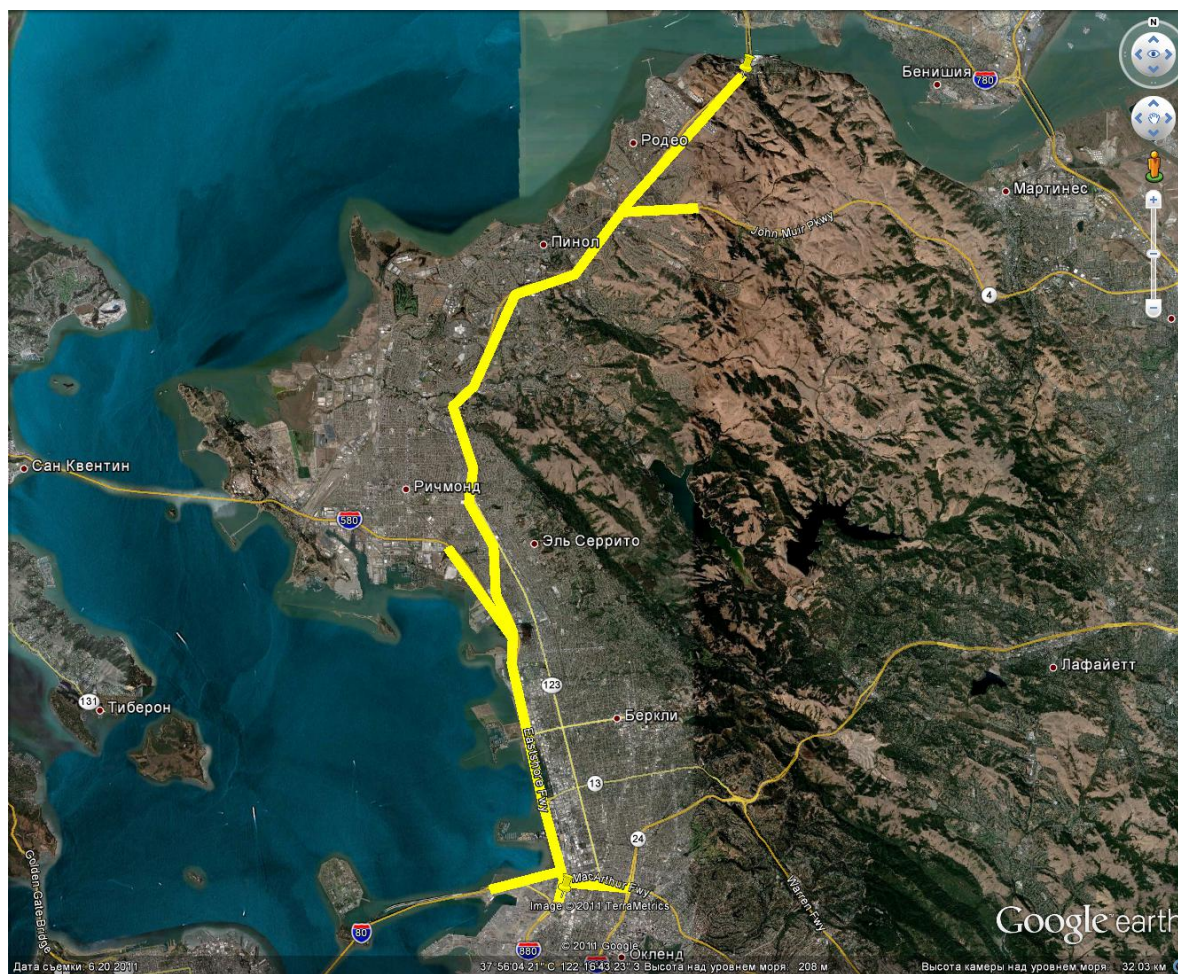


Рис. 16. Автострада I-80 в районе залива Сан-Франциско (цветное изображение можно увидеть в электронной версии на сайте журнала <http://crm.ics.org.ru/journal/article/1828/>)

Чтобы проверить правильность работы исследуемой модели, выбирался день, когда по данным системы ReMS количество неисправных датчиков было минимальным, а качество измерений, соответственно, наилучшим. Примером такого дня может служить суббота, 9 мая 2009 года, как прототип среднестатистической субботы на западном направлении автострады I-80.

В том, что исследуемая модель (1), (2) хорошо воспроизводит реальную ситуацию на дороге, имевшую место 9-го мая 2009 года, можно убедиться, глядя на сравнительные графики зависимости средней по количеству полос интенсивности транспортного потока от времени (в АТС/км) для измерений и расчетов, где значения берутся с интервалом в 5 минут, приведенные на рис. 18.

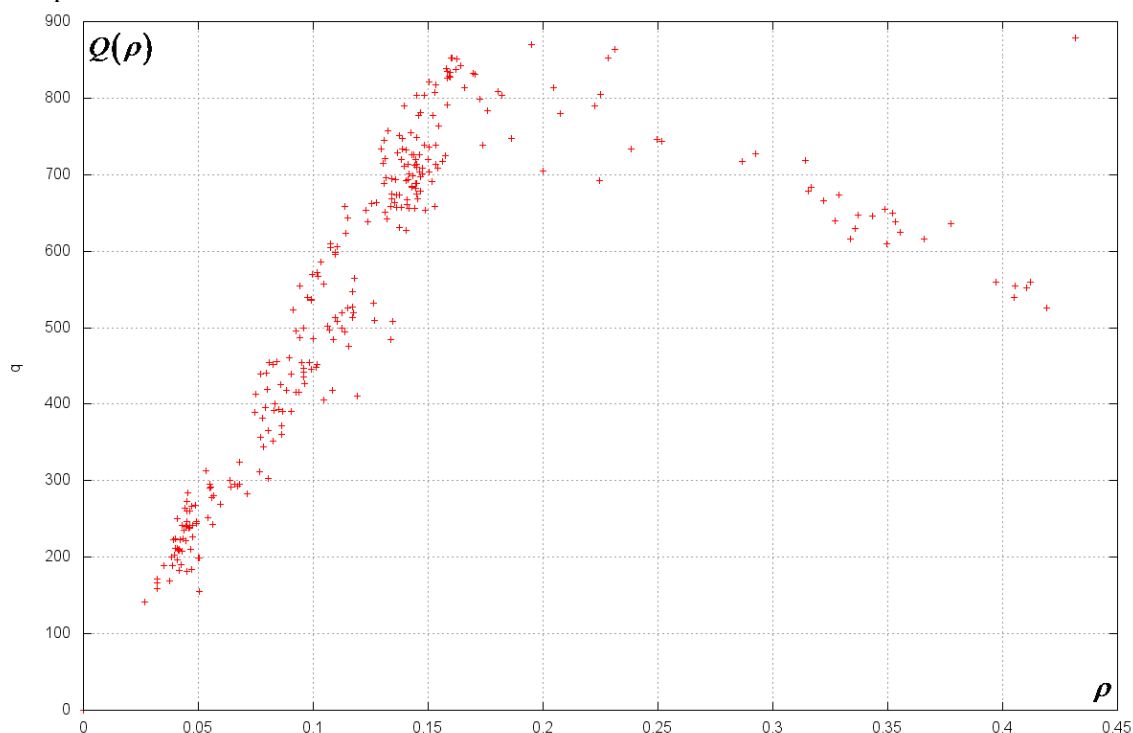


Рис. 17. Фундаментальная диаграмма для участка автострады I-80 — зависимость интенсивности транспортного потока (АТС/5 мин) от плотности, нормированной по максимальному значению

Заключение

В данной работе проведено обобщение макроскопических гидродинамических моделей, описывающих автомобильное движение с помощью алгоритма построения адекватного действительности уравнения состояния, определяемого по экспериментальным измерениям (возможно, с использованием параметрических решений модельных уравнений).

Доказано, что именно вид уравнения состояния, замыкающего систему модельных уравнений и полученного из экспериментально наблюдаемого вида фундаментальной диаграммы — зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности, полностью определяет все свойства исследуемой феноменологической модели.

Проверена работоспособность комплекса программ на реальных дорожных данных. В качестве примера транспортной сети использовалась одна из наиболее загруженных магистралей США — автострада I-80 в районе залива Сан-Франциско. Полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на дороге.

Дальнейшее развитие данной работы подразумевает решение задач оптимизации и управления транспортными потоками через адаптивное регулирование светофоров, расположенных в узлах графа исследуемой транспортной сети.

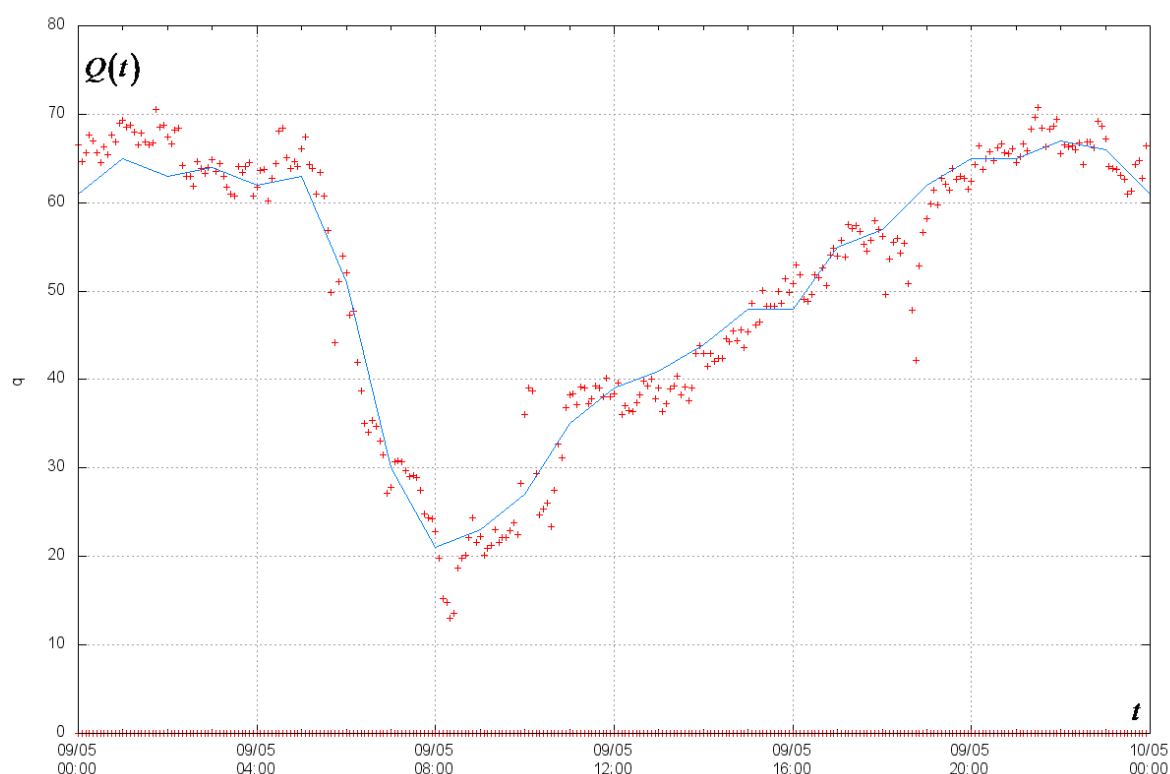


Рис. 18. Сравнительные графики зависимости для участка автострды I-80 интенсивности транспортного потока от времени (АТС/мин): для измерений (крестики) и расчетов (сплошная линия)

Список литературы

- Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1955. – V. 229. – P. 281–345.
- Richards P. I. Shock Waves on the Highway // Oper. Res. – 1956. – V. 4. – P. 42–51.
- Payne H. J. Models of freeway traffic and control, in: Simulation Council Proc. 28, Mathematical Models of Public Systems. Edited by G. A. Bekey. – 1971. – V. 1. – P. 51–61.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- Kerner B. S. and Rehborn H. Experimental features and characteristics of traffic jams. Phys. Rev. E 53. – 1996. – No 2.
- Kerner B. S. and Rehborn H. Experimental properties of complexity in traffic flow. Phys. Rev. E 53. – 1996. – No 5.
- Kerner B. S. and Rehborn H. Experimental Properties of Phase Transitions in Traffic Flow. Phys. Rev. Let. 17. No 20. – 1997. – V. 79. – P. 4030–4033.
- Kerner B. S. Experimental Features of Self-Organization in Traffic Flow. Phys. Rev. Let. 17. No 20. – 1998 – V. 81.
- Kerner B. S. Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three – phase traffic theory. Springer, 2009.
- Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 2000. – V. 60. – P. 916–938.
- Zhang H. M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // Transp. Res. B. – 2002. V. 36. – P. 275–290.

- Zhang H. M.* Anisotropic property revisited—does it hold in multi-lane traffic? // *Transportation Research Part B: Methodological*, Issue 6. — 2003. — V. 37. — P. 561–577.
- Siebel F., Mauser W.* On the Fundamental Diagram of Traffic Flow. *SIAM J. Appl. Math.* 66. — 2006. — P. 1150–1162.
- Siebel F., Mauser W.* Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // *Physical Review E*. No 6 (2006), 066108. — 2006. — V. 73.
- Kholodov A. S., Kholodov Y. A.* Computational models on graphs for the nonlinear hyperbolic system of equations // *Proceedings of ASME 2004 PVP Conference*. — 2004. — V. 476. — P. 161–167.
- Годунов С. К., Роменский Е. И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — М.: Наука, 1998. — 280 с.
- Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // *Журнал выч. математики и мат. физики*. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1560–1588.
- Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике // М.: Наука, Гл. ред. Физ.-Мат. Лит. — 1987. — 432 с.