

УДК: 532.3, 519.6, 519.635.8

## Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс

Е. В. Ветчанин<sup>а</sup>, В. А. Тененев<sup>б</sup>

Удмуртский государственный университет,  
Россия, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

E-mail: <sup>а</sup> eugene@mail.ru, <sup>б</sup> tenenev@istu.ru

Получено 19 октября 2011 г.,  
после доработки 18 ноября 2011 г.

Дана постановка задачи управления движением тела в вязкой жидкости. Движение тела индуцируется перемещением внутренних материальных точек. На основе численного решения уравнений движения тела и гидродинамических уравнений получены аппроксимирующие зависимости для вязких сил. С применением аппроксимаций решается задача оптимального управления движением тела по заданной траектории с применением гибридного генетического алгоритма. Установлена возможность направленного движения тела под действием возвратно-поступательного движения внутренней точки. Оптимальное управление направлением движения осуществляется движением другой внутренней точки по круговой траектории с переменной скоростью.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнения движения, уравнения Навье–Стокса, численные методы, нечеткие деревья решений, генетический алгоритм

## Motion control simulating in a viscous liquid of a body with variable geometry of weights

E. V. Vetchanin, V. A. Tenenev

*Udmurt State University, 9 University street, Izhevsk, 426034, Russia*

**Abstract.** — Statement of a problem of management of movement of a body in a viscous liquid is given. Movement bodies it is induced by moving of internal material points. On a basis the numerical decision of the equations of movement of a body and the hydrodynamic equations approximating dependencies for viscous forces are received. With application approximations the problem of optimum control of body movement dares on the set trajectory with application of hybrid genetic algorithm. Possibility of the directed movement of a body under action is established back and forth motion of an internal point. Optimum control movement direction it is carried out by motion of other internal point on circular trajectory with variable speed.

Keywords: optimum control, the equations of movement, Navier–Stokes equations, numerical methods, fuzzy decision trees, genetic algorithm

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 371–381 (Russian).

Работа выполнена в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

## Введение

Теоретические исследования движения в идеальной жидкости тел с неизменной внешней границей и с перемещающимися внутренними массами проведено в ряде работ [Козлов, Рамоданов, 2001; Козлов, Рамоданов, 2002]. Интерес к таким исследованиям связан с изучением возможности перемещения тел в жидкости без каких-либо внешних подвижных элементов или изменяемых границ тела. Для выбора типа устройств, обеспечивающих некоторые заданные траектории передвижения, требуется решение задачи о движении жесткого тела в жидкости, имеющей вязкие свойства.

В работах [Козлов, Рамоданов, 2001; Козлов, Рамоданов, 2002; Козлов, Онищенко, 2003] теоретически показана возможность неограниченного перемещения тел с несимметричными коэффициентами присоединенных масс в идеальной жидкости. Для тела с одинаковыми коэффициентами присоединенных масс (например, круговой цилиндр) установлено, что траектория движения является замкнутой. Вязкие свойства реальной жидкости могут изменить характеристики траектории движения тела. Моделирование движения жесткого тела с переменной геометрией внутренних масс в вязкой жидкости с численным решением гидродинамических уравнений Навье–Стокса [Рамоданов, Тененев, 2011] показало существенное влияние сил сопротивления и моментов, обусловленных вязкими эффектами, на характер движения тела [Childress и др., 2011]. При возвратно-поступательном движении материальной точки возможно продвижение тела по прямолинейной траектории. При изменении направления движения траектории приобретают более сложную конфигурацию. Для организации перемещений внутренних масс, обеспечивающей заданную траекторию движения, необходим учет особенностей, связанных с вязкостью жидкости.

## Уравнения движения

Рассмотрим плоское движение тела с изменяемой геометрией масс. Считаем, что имеется материальная оболочка неизменной формы с массой  $M$ . Внутри данной оболочки по заданным законам движения  $\rho(t), \dot{\rho}(t)$  перемещаются материальные точки с массами  $m_k, k = \overline{1, N}$ . Движение тела и системы материальных точек относится к двум декартовым системам координат: неподвижной  $Ox$  и подвижной  $O_1\xi\eta$  (рис. 1).

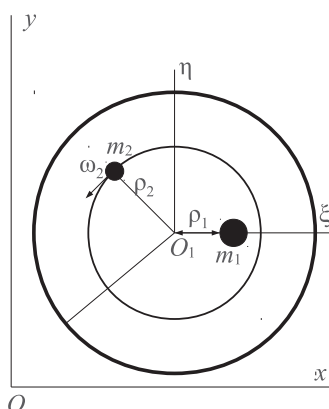


Рис. 1. Системы координат и внутренние точки

Точка  $O_1$  является центром масс оболочки — тела. Уравнения движения, описывающие движение системы материальных точек, приведены в работе [Козлов, Рамоданов, 2001]. Движение всей системы начинается из состояния покоя.

Внутренние точки с массой  $m_k, k = \overline{1, N}$ , перемещаются по некоторым заданным законам  $\rho_k(t) = (\xi_k(t), \eta_k(t))^T$ . Для плоской постановки задачи кинетическая энергия системы (тело + жидкость) имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \left[ A_1 u_b^2 + A_2 v_b^2 + B \omega^2 + \sum_{k=1}^N m_k (u_k^2 + v_k^2) \right],$$

где  $A_1 = M + \lambda_1, A_2 = M + \lambda_2, B = J + \lambda_3$ ;  $M, J$  — масса тела и момент инерции без учета материальных точек;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — коэффициенты присоединенных масс;  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $\mathbf{U}_b = (u_b, v_b)$  — вектор скорости движения тела (точки  $O_1$ );  $u_k = \dot{\xi}_k(t), v_k = \dot{\eta}_k(t)$  — проекции скорости движения материальных точек в подвижной системе координат.

Уравнения движения тела в вязкой жидкости запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} - \omega P_2 &= F_1, \\ \frac{dP_2}{dt} + \omega P_1 &= F_2, \\ \frac{dK}{dt} + u_b P_2 - v_b P_1 &= G, \\ \frac{dx}{dt} &= u_b \cos(\varphi_0) - v_b \sin(\varphi_0), \\ \frac{dy}{dt} &= u_b \sin(\varphi_0) + v_b \cos(\varphi_0), \\ \frac{d\varphi_0}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{1}$$

$$P_1(0) = P_2(0) = K(0) = x(0) = y(0) = \varphi_0(0) = 0,$$

где проекции вектора импульса  $P_1, P_2$  в подвижной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \left( A_1 + \sum_{k=1}^N m_k \right) u_b + \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\xi}_k(t) - \omega \eta_k(t)), \\ P_2 &= \left( A_2 + \sum_{k=1}^N m_k \right) v_b + \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\eta}_k(t) + \omega \xi_k(t)), \end{aligned}$$

кинетический момент

$$K = B\omega - \sum_{k=1}^N m_k (u_b \eta_k - v_b \xi_k) - \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\xi}_k(t) - \omega \eta_k) \eta_k + \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\eta}_k(t) + \omega \xi_k) \xi_k,$$

$\mathbf{F} = (F_1, F_2)$  — сила, действующая со стороны жидкости на тело,  $G$  — момент этой вязкой силы.

Для определения вязкой силы необходимо рассчитывать возмущенное движение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое уравнениями Навье–Стокса. В подвижной системе координат уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla((\mathbf{V} - \mathbf{W})\mathbf{V}) &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mathbf{V} = (u, v)$  — вектор абсолютной скорости жидкости;  $p, \rho, \nu$  — давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости.

Систему уравнений (2), так же, как в работе [Рамоданов, Тененев, 2011], будем решать численно с граничными условиями на поверхности тела:  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}$ ;  $\mathbf{n} \times \mathbf{V} = \mathbf{n} \times (\mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s)$  и на бесконечности  $\mathbf{V} = 0$ . Здесь  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_1$  — вектор переносной скорости частицы жидкости в точке  $\mathbf{r}_1$ ;  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \omega)^T$  — вектор угловой скорости. В системе уравнений (2) все векторы скоростей  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  записаны в проекциях на подвижную систему координат. Абсолютная скорость движения жидкости  $\mathbf{V}$  на бесконечности принимается не возмущенной. Силы реакции жидкости на тело и момент вязких сил определяются интегралами по поверхности:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R(t) &= \int_S \left[ -p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \right] \cdot \mathbf{n} ds, \\ \mathbf{G}_R(t) &= \int_S \mathbf{r}_s \times \left[ -p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \right] \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Численный метод совместного решения систем уравнений (1), (2) описан в работе [Рамоданов, Тененев, 2011]. Там же приведены результаты тестовых расчетов по нестационарному движению цилиндра в вязкой жидкости. Согласование с экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов по коэффициенту сопротивления, времени возникновения периодического отрыва вихрей, периодичности схода вихрей (зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса) подтверждает адекватность расчетной методики.

## Расчет параметров движения тела в вязкой жидкости

Для обеспечения движения тела в жидкости по заданной траектории необходимо решать задачу оптимального управления типа Лагранжа. В качестве критерия оптимальности примем минимальное значение среднеквадратического отклонения траектории тела  $\mathbf{r}(t)$  от заданной  $\mathbf{Y}(t)$ :

$$J = \int_0^T |\mathbf{r}(t) - \mathbf{Y}(t)| dt \rightarrow \min.$$

Траектория тела рассматривается в неподвижной системе координат. Управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и уравнениями Навье–Стокса (2). Совместное решение уравнений (1), (2) является достаточно сложной и затратной по времени и вычислительным ресурсам. Для решения задачи оптимального управления требуется многократное численное решение этих уравнений. Поэтому такой подход является практически неосуществимым. Уравнения движения (1) и гидродинамические уравнения (2) связаны через правые части уравнений (1), которые находятся из интегрирования гидродинамических параметров по поверхности тела (3). Возмущенное движение жидкости определяется характеристиками движения тела  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_b + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_1$ . Если каким-либо образом задать зависимости  $F_1(\mathbf{W})$ ,  $F_2(\mathbf{W})$ ,  $G(\mathbf{W})$ , то многократного решения гидродинамических уравнений в этом случае не потребуется.

Выберем следующую схему движения внутренних масс, предназначенную для перемещения тела в жидкости. Внешняя оболочка имеет форму круглого цилиндра (рис. 1). Масса оболочки равна  $M$ . Первая внутренняя точка массой  $m_1$  движется возвратно-поступательно по закону  $\rho_1(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t))^T$ , где

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \rho_1 \sin^2(\omega_1 \tau), & \tau < \frac{\pi}{2\omega_1}, \\ \rho_1 \cos^2\left(\tau - \frac{\pi}{2\omega_1}\right), & \tau \geq \frac{\pi}{2\omega_1}, \end{cases}$$

$$\eta_1(t) = 0,$$

$$\tau = t - \left\lfloor \frac{t}{T_0} \right\rfloor T_0, \quad T_0 = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{\omega_1} \right).$$

Операция  $\left\lfloor \dots \right\rfloor$  соответствует целой части числа. Вторая внутренняя точка массой  $m_2$  движется по кругу (рис. 1):  $\xi_2(t) = \rho_2 \cos(\varphi)$ ,  $\eta_2(t) = \rho_2 \sin(\varphi)$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2(t)$ .

Первая материальная точка предназначена для организации движения тела. В идеальной жидкости при  $\omega_2(t) = 0$  тело будет совершать колебательное движение с постоянной амплитудой при любых значениях  $\omega_1$ . При  $\omega_2(t) \neq 0$  траектория будет замкнутой. При движении тела с переменной скоростью в вязкой жидкости сила сопротивления зависит от скорости нелинейно. В результате при  $\omega_1 > 1$  колебания тела будут несимметричными и за один период времени  $T_0$  произойдет смещение тела на величину  $x_c$ . На рис. 2 показаны результаты расчетов перемещения тела по оси  $x$  в вязкой жидкости для случая  $\omega_1 = 4$ ,  $\omega_2(t) = 0$ . Коэффициент вязкости жидкости  $\nu = 10^{-6}$ , радиус кругового цилиндра  $r_s = 0.1$ . Зависимость 1 получена для идеальной жидкости, зависимость 2 соответствует решению уравнений Навье–Стокса (2).

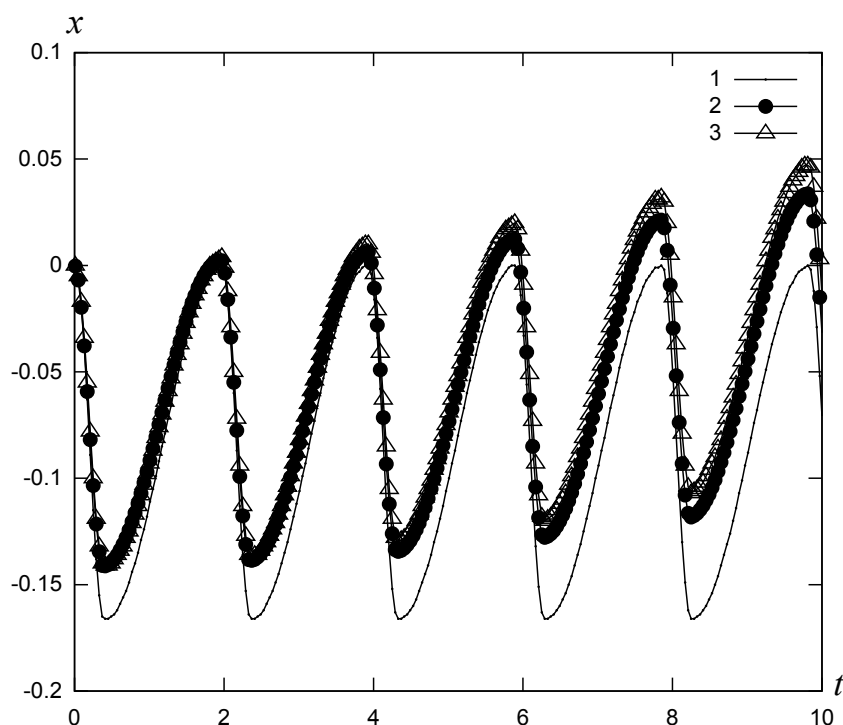


Рис. 2. Зависимость перемещения тела  $x$  от времени

Увеличение несимметричности колебаний первой точки  $\omega_1$  приводит к росту результирующего смещения тела, как это видно на рис. 3.

Величина  $x_c$  равна максимальному перемещению тела за время  $T = 10$ . Вид изменения скорости движения тела и составляющей силы сопротивления  $F_1$  за период  $T_0$  показан на рис. 4.

Зависимость 1 получена для скорости движения, а зависимость 2 приведена для  $\frac{F_1}{10}$  при  $\omega_1 = 4$ .

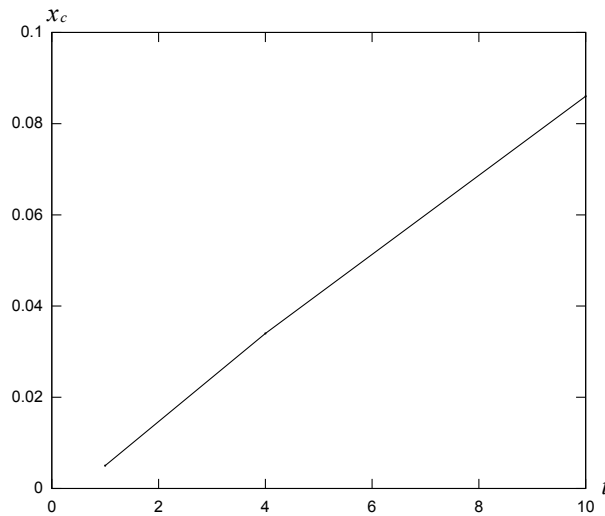
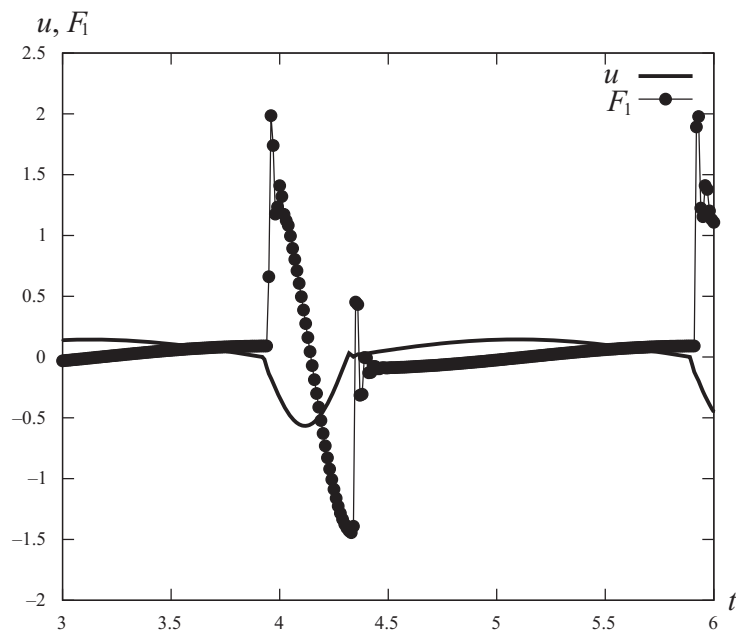
Рис. 3. Изменение результирующего смещения тела в зависимости от  $\omega_1$ 

Рис. 4. Зависимость скорости движения тела и силы сопротивления от времени

## Аппроксимация силы сопротивления

Из рис. 4 следует, что поведение силы сопротивления во времени имеет достаточно сложный вид. Будем искать зависимость силы сопротивления от переменных  $u$ ,  $\xi_1$ ,  $\dot{\xi}_1$ . Для построения аппроксимирующей зависимости применим метод нечетких деревьев решений, являющийся высокоэффективным методом технологии Data Mining [Тенев, Якимович, 2010].

Деревья решений — это способ представления правил в иерархической, последовательной структуре, где каждому объекту соответствует единственный узел, дающий решение. Под правилом понимается логическая конструкция, представленная в виде if  $A$  then  $B$  ( $A \rightarrow B$ ). Каждое

дерево решений порождает определенный набор правил. Если воспользоваться алгоритмом построения деревьев решений для генерации нечетких правил, то можно перейти к системе нечеткого вывода. Нечеткие знания формулируются в виде нечетких продукционных правил вывода, задаваемых в форме *if A then B*.

Будем рассматривать построенное дерево решений как набор нечетких правил вида

$$R_r : \text{if } \bigcap x_i \in A_{ir} \text{ then } y \text{ is } B_r, \quad r = \overline{1, K_R}. \quad (4)$$

Условие  $x_i \in A_{ir}$  соответствует условию разделения множества объектов  $x_i \leq (w_{ik})$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ ;  $j = \overline{1, n}$  и означает попадание величины  $x_i$  в нечеткий интервал  $w_{ij}^\pm$  с функциями принадлежности:

$$\mu^+(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \exp(-\beta(x_i - w_{iq}))} + \frac{1}{1 + \exp(-\beta(1 - w_{iq}))} \frac{x_i - w_{iq}}{1 - w_{iq}}, & x_i \geq w_{iq}, \\ \frac{1}{1 + \exp(-\beta(x_i - w_{iq}))} \frac{x_i}{w_{iq}}, & x_i < w_{iq}, \end{cases}$$

$$\mu^-(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \exp(\beta(x_i - w_{iq}))} + \left(1 - \frac{1}{1 + \exp(-\beta w_{iq})}\right) \frac{w_{iq} - x_i}{w_{iq}}, & x_i \geq w_{iq}, \\ \frac{1}{1 + \exp(\beta(x_i - w_{iq}))} \frac{1 - x_i}{1 - w_{iq}}, & x_i < w_{iq}. \end{cases}$$

Функция принадлежности  $\mu^+(x_i)$  соответствует условию  $x_i \geq (w_{iq})$ , а  $\mu^-(x_i)$  — условию  $x_i < (w_{iq})$ . Величина  $\beta$  характеризует размытость интервала. При  $\beta \rightarrow \infty$  нечеткий интервал переходит в обычный.

При заданном векторе  $\mathbf{X} = (x_i)^T = (u, \xi_1, \dot{\xi}_1)^T$  определяются степени истинности каждого правила (4):  $\alpha_r, r = \overline{1, K_R}$ . Степени истинности соответствуют значениям функций принадлежности левых частей (предпосылок):  $\alpha_r = \min_k (\mu_k^\pm)$ ,  $k = \overline{1, g_r}$ , где  $g_r$  — количество условий в данном правиле  $R_r$ .

В результате агрегированный выходной сигнал определяется по формуле

$$F_1(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sum_{r=1}^{K_R} \alpha_r} \sum_{r=1}^{K_R} \alpha_r \left( p_{r0} + \sum_{j=1}^n p_{rj} x_j \right).$$

Коэффициенты  $p_{rj}, r = \overline{1, K_R}; j = \overline{0, n}$  определяются по имеющейся обучающей выборке с применением процедуры псевдоинверсии.

В качестве обучающей выборки взяты значения  $(u, \xi_1, \dot{\xi}_1, F_1)^l, l = \overline{1, 1000}$ , полученные из решения задачи (1), (2) с шагом по времени  $\Delta = 0.01$ . В результате обучения определено 18 правил, использующихся для вычисления зависимости  $F_1(u, \xi_1, \dot{\xi}_1)$ . Полученные правила применимы для величин  $\omega_1 \in [2, 10]$ .

Расчеты перемещения  $x(t)$ , проведенные с использованием данной аппроксимации силы сопротивления, представлены на рис. 2 в виде зависимости 3. Как видим, аппроксимацию можно считать удовлетворительной и приемлемой для решения задачи оптимального управления.

## Оптимальное управление движением тела

Сформулируем следующую задачу оптимального управления. В плоскости  $x, y$  задана траектория  $y_0 = y_0(x)$ . Необходимо пройти по этой траектории с минимальными отклонениями.

Параметр  $\omega_1 > 1$  на данной траектории принимается постоянным. Поворот тела осуществляется за счет передвижения второй точки по окружности с переменной скоростью  $\omega_2(t)$ . Следовательно, управляющей функцией является угловая скорость движения точки с массой  $m_2$ . Минимизируемый функционал в задаче принимает вид

$$J(\omega_2) = \int_0^T \left[ y_c(t) - y_0(x_c(t)) \right]^2 dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

где  $x_c, y_c$  — координаты тела в конце каждого периода времени  $T_0$ .

Уравнения с правыми аппроксимированными частями являются фазовыми уравнениями. Представим систему уравнений (1) в виде дифференциального оператора  $D(\mathbf{Q}, \omega_2, t)$ ,  $\mathbf{Q} = (P_1, P_2, P_3, x, y, \varphi_0)^T$ . При построении численных методов решения задач оптимального управления от непрерывных систем (1) перейдем от непрерывных систем к их дискретным аппроксимациям и заменим дифференциальные уравнения дискретным аналогом

$$\mathbf{q}^{k+1} = R(\mathbf{q}^{k+1}, \mathbf{q}^k, U^{k+\frac{1}{2}}, t^k), k = \overline{0, K-1},$$

где  $R$  — оператор, определяющий метод численного интегрирования системы уравнений;  $\mathbf{q}^k$  — сеточная функция, аппроксимирующая  $\mathbf{Q}(t)$ ,  $t_k$  — разностная сетка по времени;  $U^{k+\frac{1}{2}} = \omega_2(t^{k+\frac{1}{2}})$ .

При выбранной дискретной аппроксимации управление превращается в конечномерный вектор управлений  $\mathbf{U} = (U^{k+\frac{1}{2}})$ . Интеграл среднеквадратичного отклонения расчетной траектории от заданной (5) определяется численно с использованием дискретных значений параметров. Задача оптимального управления в этом случае сводится к задаче оптимизации:

$$\Phi(\mathbf{U}, \mathbf{Q}) \rightarrow \min_{\mathbf{U}}. \quad (6)$$

Спецификой задачи (6) является невозможность дифференцирования в целевой функции и многоэкстремальность задачи. Поэтому основной проблемой является выбор соответствующего метода численного решения оптимизационной задачи. Хорошим вариантом для решения поставленной задачи оказывается генетический алгоритм [Тененев, Якимович, 2010].

Решение оптимизационной задачи (6) проведено с применением гибридного генетического алгоритма с вещественными операторами скрещивания и мутации, так как двоичное кодирование влечет за собой определенные трудности при выполнении поиска в непрерывных пространствах, которые связаны с большой размерностью пространства поиска. Применение вещественного кодирования может повысить точность найденных решений и повысить скорость нахождения глобального минимума или максимума. Скорость повышается из-за отсутствия процессов кодирования и декодирования хромосом на каждом шаге алгоритма. Единственное преобразование, которое целесообразно проводить, это приведение переменных к безразмерному виду в диапазоне  $[0; 1]$ .

Рассмотрим две точки, характеризующиеся набором управляющих параметров:

$$\mathbf{u}^1 = (u_i^1), \quad \mathbf{u}^2 = (u_i^2), \quad i = \overline{1, n}.$$

Результатом скрещивания является точка

$$\mathbf{u}_i = au_i^1 + bu_i^2,$$

где  $b = 2^{\zeta-L}$ ,  $a = 1 - b$ ,  $\zeta \in [0; L)$ ,  $L$  — разрядность числа.

Операция мутации осуществлялась выбором случайного числа в диапазоне  $[0; 1]$ .

Отбор точек для скрещивания осуществлялся турнирным методом.



Применяемый гибридный алгоритм основан на параллельной работе генетических операторов и дополнительного метода. В популяции, созданной генетическим алгоритмом, выбирается лучшая особь — лидер. Этот лидер обучается отдельно по дополнительному методу. Если его качественный показатель при этом лучше, чем у всех остальных особей в популяции, то он вводится в популяцию и участвует в воспроизводстве потомков. Если же появляется особь в популяции, полученная в результате эволюции, с лучшим показателем, то лидером становится она. В качестве дополнительного метода целесообразно также применить генетический алгоритм, но в более узкой области поиска.

## Результаты решения задачи оптимального управления движением по заданной траектории

Заданная траектория движения тела определяется функцией  $y_0(x) = \sin(2x)$  на временном отрезке  $t \in [0, 100]$ . Управление считается постоянным на отрезке времени длиной  $T_0$ . Для  $\omega_1 = 4$  размерность вектора управления  $\mathbf{U}$  равна 50. Изменение целевой функции (6) или функционала (5) в процессе итерационного решения оптимизационной задачи показано на рис. 5.

Вид заданной траектории приведен на рис. 6 (зависимость 2).

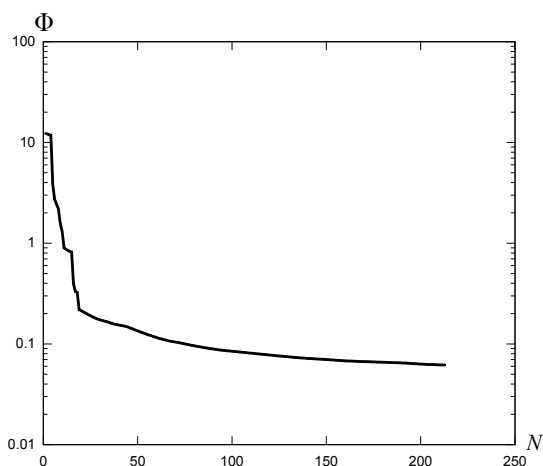


Рис. 5. Изменение целевой функции в процессе итераций

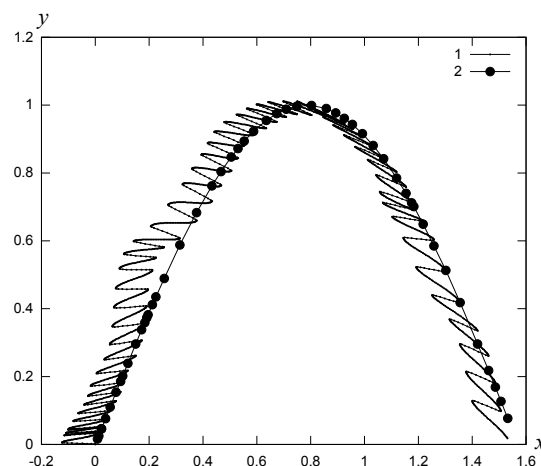


Рис. 6. Траектория движения управляемого тела

Траектория движения тела, полученная из решения задачи оптимального управления, также представлена на рис. 6 (зависимость 1). Видим, что подготовка к смене общего направления движения начинается заранее до поворота. Изменение оптимальной управляющей функции во времени приведено на рис. 7.

Зависимость 1 соответствует управлению, полученному после первой итерации, а зависимость 2 найдена через 214 итераций. Направление движения тела, то есть угол наклона системы координат  $O_1\xi\eta$ , на оптимальной траектории показано на рис. 8.

На этом рисунке лучше видно, что для обеспечения движения тела в сторону уменьшения у отрицательный наклон оси  $O_1\xi$  реализуется на первой половине траектории.

## Заключение

Аппроксимация силы сопротивления, возникающей при движении тела в вязкой жидкости, основанная на численном решении уравнений динамики тела и Навье–Стокса, позволила

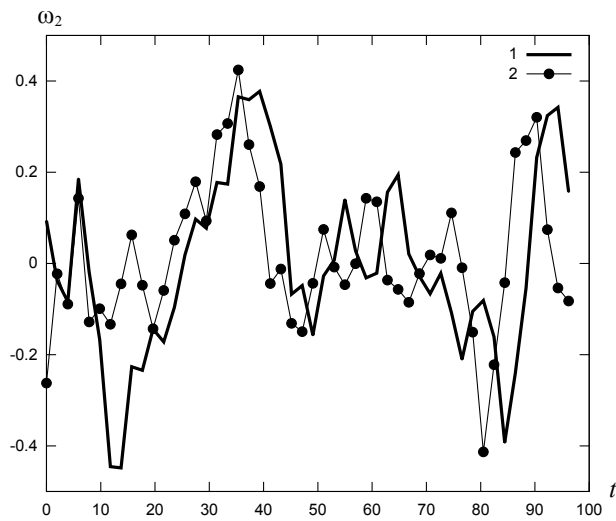


Рис. 7. Управление движением тела

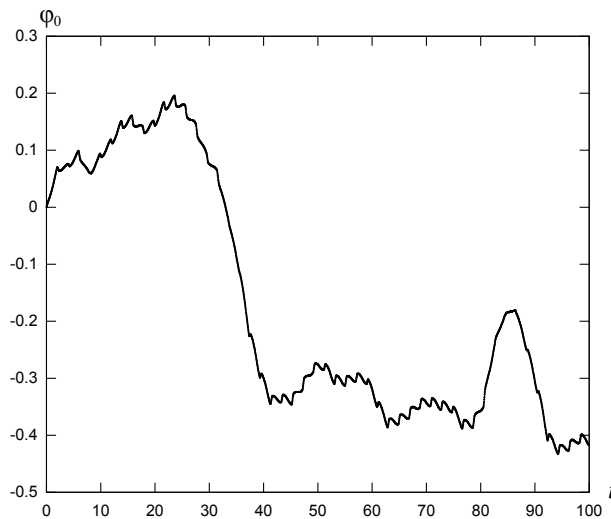


Рис. 8. Направление движения тела на оптимальной траектории

поставить и решить задачу управления движением тела по заданной траектории за счет перемещения внутренних масс. Рассмотренный в работе подход применим для организации движения в трехмерной постановке и для траекторий произвольной конфигурации.

Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н. профессору А. В. Борисову за постановку задачи и обсуждение результатов.

## Список литературы

- Childress S., Spagnolie Saverio E., Tokieda T.* A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* — 2011. — Vol. 669. — Pp. 527–556.
- Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // *ПММ.* — 2001. — Т. 65, № 4. — С. 592–601.

- Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // ДАН. — 2002. — Т. 382, № 4. — С. 478–481.
- Козлов В. В., Онищенко Д. А.* О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // ПММ. — 2003. — Т. 67, № 4. — С. 620–633.
- Рамоданов С. М., Тенев В. А.* Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // Нелинейная динамика. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 635–647.
- Тенев В. А., Якимович Б. А.* Генетические алгоритмы в моделировании систем. — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2010. — 308 с.