

УДК: 519.6

## Исследование порядка аппроксимации инвариантных дифференциальных операторов на нерегулярной четырехугольной сетке

Н. А. Завьялова

Московский физико-технический институт (Государственный университет),  
кафедра вычислительной математики  
Россия, 141701, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: natalia.zavyalova@gmail.com

Получено 30 августа 2011 г.,  
после доработки 13 сентября 2011 г.

Проведен априорный анализ аппроксимации уравнений магнитной гидродинамики на нерегулярной четырехугольной сетке. Вычислены значения коэффициентов, определяющих норму невязки для разностных аналогов операторов градиента и дивергенции. Изучено влияние свойств ячеек сетки на невязку. Для численного подтверждения полученных оценок приведены примеры вычислений с заданием одинаковых начальных данных на разных сетках.

Ключевые слова: аппроксимация, невязка, разностное уравнение, подвижная сетка

### Investigation of approximation order of invariant differential operators on movable irregular quadrangular grid

N. A. Zavyalova

*Moscow institute of physics and technology (state university), Department of computational mathematics, Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, 141701, Russia*

**Abstract.** – The a priori analysis of approximation of magnetohydrodynamic equations on irregular quadrangular analysis was performed. The values of coefficients which determine the misalignment norm for difference analogs of operators gradient and divergence were calculated. Was studied the influence of properties of grid cells on misalignment. For the numerical confirmation of obtained estimations were cited the examples of calculations with specifying identical initial data on different grids.

Keywords: approximation, misalignment, difference equation, movable grid

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 353–364 (Russian).

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, ГК П954 и РФФИ гранты 07-01-00381-а, 10-01-00751-а.

## Введение

Использование нерегулярных подвижных сеток связано с разработкой вычислительных алгоритмов, содержащих блок интегрирования многомерных уравнений лагранжевой газовой динамики. Узлы расчетной сетки при этом могут образовывать произвольные конфигурации. Если при этом на фоне рассматриваемого газодинамического течения протекают другие физические процессы (например, перенос тепла), то возникает необходимость интегрирования на нерегулярной сетке соответствующих уравнений.

Для описания динамики быстрых  $z$ -пинчей используется система уравнений электронной магнитной гидродинамики [Кингсеп, Чукбар, Яньков, 1987; Морозов, 2006]. В [Завьялова, Лобанов, 2011] такая система решается с помощью метода расщепления по физическим процессам. На первом этапе расщепления рассматривалась идеальная магнитная гидродинамика – движение плазмы без учета диссипативных эффектов и излучения. Неявная разностная схема для этого этапа строилась на основе вариационного метода [Самарский, Колдоба, Повещенко и др., 1996]. Но использование неявной схемы позволяет снять существенные ограничения на условие устойчивости при взаимодействии ударных волн. В этом случае условие устойчивости Куранта для явных схем дает значение временного шага, стремящееся к нулю.

В работе будет рассматриваться вариационная аппроксимация [Самарский, Колдоба, Повещенко и др., 1996] магнитогидродинамического блока системы уравнений ЭМГ в цилиндрических координатах.

## Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений МГД в цилиндрических координатах

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{grad} P + \frac{[\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}]}{4\pi\rho},$$

$$\frac{\rho}{A} \frac{d}{dt} (z_{\text{eff}} \varepsilon_e + J(z_{\text{eff}})) = -P_e \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}_e + \operatorname{div}(\kappa_e \operatorname{grad} T_e) + Q - Q_{ei} - \operatorname{div} \mathbf{S},$$

$$\frac{\rho}{A} \frac{d\varepsilon_i}{dt} = -P_i \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div}(\kappa_i \cdot \operatorname{grad} T_i) + Q_{ei}.$$

В приведенных уравнениях индекс  $i$  соответствует ионам,  $e$  – электронам,  $p$  – давление,  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $T$  – температура,  $Q$  – джоулев нагрев,  $Q_{ei}$  – электрон-ионная релаксация,  $t$  – время,  $A$  – число нуклонов в ядре,  $\mathbf{S}$  – лучистый поток,  $z_{\text{eff}}$  – эффективный заряд ядра,  $J(z_{\text{eff}})$  – потери на ионизацию.

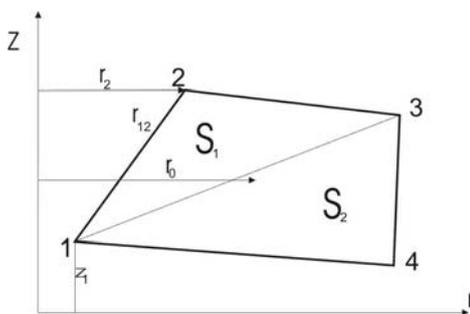


Рис. 1. Сечение ячейки,  $r_i$  – координата по радиусу  $i$ -й точки,  $z_i$  – координата  $i$ -й точки по оси  $z$ ,  $r_{ij}$  – расстояние между точками  $i$  и  $j$

Рассматривалась двумерная постановка задачи в осесимметричной  $(r, z)$  геометрии.

В расчетной области введена подвижная цилиндрическая сетка. Скалярные величины отнесены к центрам четырехугольников в сечении ячеек, векторные – к узлам, а потоки – к центрам соответствующих граней.

Каждая ячейка представляет собой геометрическое произведение четырехугольника на окружность. Четырех-

угольник делится на два треугольника. Объем ячейки вычисляется как сумма произведений площадей треугольников на радиусы их центров (рис. 1). Например,

$$\Omega = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} ((r_3 - r_1)(z_2 - z_1) - (r_2 - r_1)(z_3 - z_1)) + \frac{r_1 + r_4 + r_3}{3} ((r_4 - r_1)(z_3 - z_1) - (r_3 - r_1)(z_4 - z_1)),$$

где  $\Omega$  – объем ячейки,  $r_i$  и  $z_i$  – радиальная и  $z$  координаты узла с индексом  $i$ .

### Априорная оценка погрешности аппроксимации

Уравнения для ионной и электронной энергий первого этапа расщепления имеют вид

$$\frac{\rho}{A} \frac{d\varepsilon_i}{dt} = -p_i \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \frac{\rho}{A} \frac{d}{dt} (z_{eff} \varepsilon_e + J(z_{eff})) = -P_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e. \quad \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \right).$$

Разностные аппроксимации дивергенции записаны с использованием [Самарский, Колдоба, Повещенко и др., 1996]:

$$\frac{\rho}{A} \frac{\hat{\varepsilon}_i - \varepsilon_i}{\tau} = -\hat{p}_i \frac{1}{\hat{\Omega}_{ml}} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{\partial \hat{\Omega}_{ml}}{\partial \hat{r}_k} \hat{u}_k + \frac{\partial \hat{\Omega}_{ml}}{\partial \hat{z}_k} \hat{v}_k \right),$$

$$\frac{\rho}{A} \frac{\hat{z}_{eff} \hat{\varepsilon}_e + J(\hat{z}_{eff}) - z_{eff} \varepsilon_e - J(z_{eff})}{\tau} = -\hat{p}_e \frac{1}{\hat{\Omega}_{ml}} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{\partial \hat{\Omega}_{ml}}{\partial \hat{r}_k} \hat{u}_k + \frac{\partial \hat{\Omega}_{ml}}{\partial \hat{z}_k} \hat{v}_k \right).$$

Проекция точных значений скоростей раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки коллокации с координатами  $r_0, z_0$ . Выбор точки коллокации осуществляется таким образом, что  $r_0 = \Omega / (S_1 + S_2)$ ,  $z_0 = \frac{S_1(z_1 + z_2 + z_3) / 3 + S_2(z_1 + z_3 + z_4) / 3}{S_1 + S_2}$ . Такой выбор поясним ниже.

Рассмотрим дифференциальное приближение разностного аналога оператора дивергенции

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^4 \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial r_k} u_k + \frac{\partial \Omega}{\partial z_k} v_k \right] = u(r_0, z_0) \cdot a_0 + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot a_1 + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot a_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot a_3 + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot a_4 +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot a_5 + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \cdot a_6 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot a_7 + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \cdot a_8 + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} \cdot a_9 + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot a_{10} + O(\Delta r^2 + \Delta z^2),$$

где  $\Delta r$  и  $\Delta z$  — размеры ячейки по радиальному и осевому направлениям.

Коэффициент при радиальной компоненте скорости  $a_0 = \frac{S_1 + S_2}{\Omega}$ , где  $S_1 = ((r_2 - r_1)(z_3 - z_1) - (r_3 - r_1)(z_2 - z_1)) / 2$ ,  $S_2 = ((r_3 - r_1)(z_4 - z_1) - (r_4 - r_1)(z_3 - z_1)) / 2$  (рис. 1). Если выбрать  $r_0 = \Omega / (S_1 + S_2)$ , то  $a_0 = 1 / r_0$ .

Подставляя выбранную координату точки коллокации  $r_0$  в выражение для  $a_1 = 2 - \frac{r_0(S_1 + S_2)}{\Omega}$ , получаем  $a_1 = 1$ .

Коэффициент  $a_2$  не зависит от координат точки коллокации,  $a_2 = \Omega / \Omega = 1$ . Коэффициенты  $a_3 \equiv 0$  и  $a_4 \equiv 0$ . Значение главного члена невязки в аппроксимации дивергенции зависит от коэффициентов при вторых производных.

Введем обозначения  $A = 2r_1(z_4 - z_2) + r_2(z_1 - z_2) + r_4(z_4 - z_1)$ ,  $B = 2r_2(z_1 - z_3) + r_1(z_1 - z_2) + r_3(z_2 - z_3)$ ,  $C = 2r_3(z_2 - z_4) + r_2(z_2 - z_3) + r_4(z_3 - z_4)$ ,  $D = 2r_4(z_3 - z_1) + r_1(z_4 - z_1) + r_3(z_3 - z_4)$ , тогда

$$a_5 = \left[ A(r_1 - r_0)^2 + B(r_2 - r_0)^2 + C(r_3 - r_0)^2 + D(r_4 - r_0)^2 \right] / (12\Omega),$$

$$a_6 = \left[ A(r_1 - r_0)(z_1 - z_0) + B(r_2 - r_0)(z_2 - z_0) + C(r_3 - r_0)(z_3 - z_0) + D(r_4 - r_0)(z_4 - z_0) \right] / (6\Omega),$$

$$a_7 = \left[ A(z_1 - z_0)^2 + B(z_2 - z_0)^2 + C(z_3 - z_0)^2 + D(z_4 - z_0)^2 \right] / (12\Omega),$$

$$a_8 = ((r_2 - r_4)(r_1^3 - r_3^3) + (r_3 - r_1)(r_2^3 - r_4^3)) / (12\Omega),$$

$$a_9 = \left[ (r_1 - r_0)(z_1 - z_0)(r_1(r_2 - r_4) + r_2^2 - r_4^2) + (r_2 - r_0)(z_2 - z_0)(r_2(r_3 - r_1) + r_3^2 - r_1^2) + \dots \right. \\ \left. + (r_3 - r_0)(z_3 - z_0)(r_3(r_4 - r_2) + r_4^2 - r_2^2) + (r_4 - r_0)(z_4 - z_0)(r_4(r_1 - r_3) + r_1^2 - r_3^2) \right] / (6\Omega),$$

$$a_{10} = \left[ (z_1 - z_0)^2(r_1(r_2 - r_4) + r_2^2 - r_4^2) + (z_2 - z_0)^2(r_2(r_3 - r_1) + r_3^2 - r_1^2) + \dots \right. \\ \left. + (z_3 - z_0)^2(r_3(r_4 - r_2) + r_4^2 - r_2^2) + (z_4 - z_0)^2(r_4(r_1 - r_3) + r_1^2 - r_3^2) \right] / (12\Omega),$$

Оценим значения коэффициентов  $a_5$ – $a_{10}$  на прямоугольной сетке. Для нее  $r_1 = r_2$ ,  $r_3 = r_4$ ,  $z_2 = z_3$ ,  $z_1 = z_4$ . Тогда координаты точки коллокации  $r_0 = (r_1 + r_3)/2$ ,  $z_0 = (z_1 + z_3)/2$ . Обозначим через  $h_r$  шаг сетки по радиусу, через  $h_z$  – по оси  $z$ , тогда  $\Omega = h_r h_z (r_1 + r_3)/2$ . Нетрудно видеть, что  $a_6 = a_8 = a_{10} = 0$ , а величина невязки определяется коэффициентами  $a_9 = h_r^2/2r_0$ ,  $a_5 = 3h_r^2/2r_0$  и  $a_7 = 3h_r^2/2r_0$ . Оператор дивергенции на прямоугольной сетке вдали от оси симметрии аппроксимируется разностным аналогом со вторым порядком точности, а вблизи оси  $r_0 \sim h_r/2$  и порядок аппроксимации понижается до первого.

Приведем результаты априорного анализа погрешности аппроксимации для уравнений

$$\text{движения } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } P + \frac{[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]}{4\pi\rho}.$$

Проекция уравнений движения на сетку [Самарский, Колдоба, Повещенко и др., 1996]:

$$\text{радиальный компонент } \frac{\hat{u}_{ml} - u_{ml}}{\tau} = -\frac{1}{M_{ml}} \sum_{k=1}^4 \left( \hat{P}_k + \frac{\hat{B}_k^2}{8\pi} \right) \frac{\partial \hat{\Omega}_k}{\partial \hat{r}_{ml}}, \quad \text{осевой } \frac{\hat{v}_{ml} - v_{ml}}{\tau} =$$

$$= -\frac{1}{M_{ml}} \sum_{k=1}^4 \left( \hat{P}_k + \frac{\hat{B}_k^2}{8\pi} \right) \frac{\partial \hat{\Omega}_k}{\partial \hat{z}_{ml}}.$$

Каждому узлу сетки приписывается масса  $M_{kl} = 0,25 \cdot (m_{kl} + m_{k-1l} + m_{kl-1} + m_{k-1l-1})$ . Масса ячейки вычисляется как произведение объема ячейки на плотность,  $M_{ij} = \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{4} = \sum_{i=1}^4 \frac{\rho_i \Omega_i}{4}$ .

Оценим, как влияет масса узла в знаменателе разностного уравнения на порядок аппроксимации. Для этого разложим плотность в ряд Тейлора в окрестности центрального узла шаблона (рис. 2). Считается, что плотность каждой ячейки относится к точке коллокации, лежащей внутри ячейки.

$$\rho_i = \rho_3 + \frac{\partial \rho}{\partial r} (r_3 - r_{0i}) + \frac{\partial \rho}{\partial z} (z_3 - z_{0i}) + \frac{\partial^2 \rho}{2\partial r^2} (r_3 - r_{0i})^2 + \frac{\partial^2 \rho}{2\partial z^2} (z_3 - z_{0i})^2 + \\ + \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial z} (r_3 - r_{0i})(z_3 - z_{0i}) + O\left((r_3 - r_{0i})^2 (z_3 - z_{0i})^2\right).$$

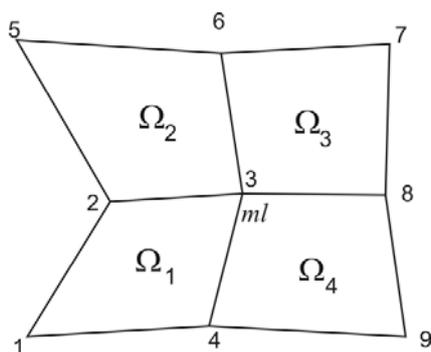


Рис. 2. Шаблон для уравнений движения

Таким образом,

$$M_{ij} = \rho_3 \sum_i \frac{\Omega_i}{4} + \frac{\partial \rho}{4 \partial r} \sum_i \Omega_i (r_3 - r_{0i}) + \frac{\partial \rho}{4 \partial z} \sum_i \Omega_i (z_3 - z_{0i}) + \dots$$

Отсюда следует, что

$$M_{ij} = \rho_3 \sum_{i=1}^4 \frac{\Omega_i}{4} \left( 1 + \frac{\frac{\partial \rho}{\partial r} \sum_i \Omega_i (r_3 - r_{0i})}{\rho_3 \sum_{i=1}^4 \Omega_i} + \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z} \sum_i \Omega_i (z_3 - z_{0i})}{\rho_3 \sum_{i=1}^4 \Omega_i} \right) + O(h_r^2 + h_z^2).$$

Разложим проекцию точного решения в ряд Тейлора в окрестности точки  $ml$ .

Разложение для давления имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 p_{\Sigma} \frac{\partial \Omega_k}{\partial r} &= b'_0 \cdot p + \frac{\partial p}{\partial r} b'_1 + \frac{\partial p}{\partial z} b'_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} b'_3 + \\ &+ \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} b'_4 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} b'_5 + O(\Delta r^2 + \Delta z^2). \end{aligned}$$

Тогда для правой части уравнения движения справедливо

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{ml}} \sum_{k=1}^4 p_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial r_{ml}} &= \frac{1}{\rho_3 \sum_{i=1}^4 \frac{\Omega_i}{4}} \left( 1 - \frac{\partial \rho}{\partial r} A_1 - \frac{\partial \rho}{\partial z} A_2 \right) \times \\ &\times \left( b'_0 p + \frac{\partial p}{\partial r} b'_1 + \frac{\partial p}{\partial z} b'_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} b'_3 + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} b'_4 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} b'_5 \right) + \\ + O(h_r^2 + h_z^2) &= \frac{1}{\rho_3} \left( b_0 p + \frac{\partial p}{\partial r} b_1 + \frac{\partial p}{\partial z} b_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} b_3 + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} b_4 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} b_5 - \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} A_1 b_1 - \right. \\ &\left. - \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} A_1 b_2 - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} A_2 b_1 - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} A_2 b_2 \right) + O(h_r^2 + h_z^2), \end{aligned}$$

где  $A_1 = \sum_{i=1}^4 \Omega_i (r_3 - r_{0i}) / \rho_3 \sum_{i=1}^4 \Omega_i$ ,  $A_2 = \sum_{i=1}^4 \Omega_i (z_3 - z_{0i}) / \rho_3 \sum_{i=1}^4 \Omega_i$ .

Обозначим  $E = 2r_3(z_2 - z_4) + r_2(z_2 - z_3) + r_4(z_3 - z_4)$ ,  $F = 2r_3(z_6 - z_2) + r_2(z_3 - z_2) + r_6(z_6 - z_3)$ ,  $G = 2r_3(z_8 - z_6) + r_6(z_3 - z_6) + r_8(z_8 - z_3)$ ,  $H = 2r_3(z_4 - z_8) + r_4(z_4 - z_3) + r_8(z_3 - z_8)$ .

Тогда коэффициенты при производных

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \left[ E(r_{10} - r_3) + F(r_{20} - r_3) + G(r_{30} - r_3) + H(r_{40} - r_3) \right] / 6 \sum_{k=1}^4 \Omega_k.$$

Здесь  $r_{i0}$  – радиус точки коллокации, принадлежащей  $i$ -й ячейке,  $z_{i0}$  – координата точки коллокации  $i$ -й ячейки по оси  $z$  (определяются так же, как координаты точки коллокации при оценке погрешности аппроксимации дивергенции).

$$b_2 = \left[ E(z_{10} - z_3) + F(z_{20} - z_3) + G(z_{30} - z_3) + H(z_{40} - z_3) \right] / 6 \sum_{k=1}^4 \Omega_k.$$

Коэффициенты в разложении при вторых производных:

$$b_3 = \left[ E(r_{10} - r_3)^2 + F(r_{20} - r_3)^2 + G(r_{30} - r_3)^2 + H(r_{40} - r_3)^2 \right] / \left( 12 \sum_{k=1}^4 \Omega_k \right),$$

$$b_4 = \left[ E(z_{10} - z_3)^2 + F(z_{20} - z_3)^2 + G(z_{30} - z_3)^2 + H(z_{40} - z_3)^2 \right] / \left( 12 \sum_{k=1}^4 \Omega_k \right),$$

$$b_5 = \left[ E(z_{10} - z_3)(r_{10} - r_3) + F(z_{20} - z_3)(r_{20} - r_3) + G(z_{30} - z_3)(r_{30} - r_3) + H(z_{40} - z_3)(r_{40} - r_3) \right] / 6 \sum_{k=1}^4 \Omega_k.$$

Для прямоугольной равномерной сетки  $b_1 = 1$ ,  $A_1 = -r_{14}^2 / \rho_3 r_3$ ,  $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = A_2 = 0$ . Радиальный компонент градиента на прямоугольной сетке приближается разностным аналогом со вторым порядком точности вдали от оси симметрии. Вблизи оси аппроксимация только первого порядка.

Проведем оценку невязки для проекции уравнения движения на ось  $z$ . Для этого разложим проекцию точного решения в ряд Тейлора в окрестности узла  $(r_3, z_3)$ :

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^4 \Omega_k} \sum_{k=1}^4 p_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} = c'_0 p + \frac{\partial p}{\partial r} c'_1 + \frac{\partial p}{\partial z} c'_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} c'_3 + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} c'_4 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} c'_5 + O(\Delta r^2 + \Delta z^2).$$

Тогда для правой части уравнения справедливо

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{ml}} \sum_{k=1}^4 p_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial r_{ml}} &= \frac{1}{\rho_3 \sum_{i=1}^4 \frac{\Omega_i}{4}} \left( 1 - \frac{\partial \rho}{\partial r} A_1 - \frac{\partial \rho}{\partial z} A_2 \right) \times \\ &\times \left( c'_0 p + \frac{\partial p}{\partial r} c'_1 + \frac{\partial p}{\partial z} c'_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} c'_3 + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} c'_4 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} c'_5 \right) + \\ + O(h_r^2 + h_z^2) &= \frac{1}{\rho_3} \left( c_0 p + \frac{\partial p}{\partial r} c_1 + \frac{\partial p}{\partial z} c_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} c_3 + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} c_4 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} c_5 - \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} A_1 c_1 - \right. \\ &\left. - \frac{\partial \rho}{\partial r} A_1 \frac{\partial p}{\partial z} c_2 - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} A_2 c_1 - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} A_2 c_2 \right) + O(h_r^2 + h_z^2) \end{aligned}$$

независимо от выбора точки коллокации  $c_0 = 0$ .

Обозначив  $K = r_3(r_4 - r_2) + r_4^2 - r_2^2$ ,  $L = r_3(r_2 - r_6) + r_2^2 - r_6^2$ ,  $M = r_3(r_6 - r_8) + r_6^2 - r_8^2$ ,  $N = r_3(r_8 - r_4) + r_8^2 - r_4^2$ , получаем

$$c_1 = (K(r_{01} - r_3) + L(r_{02} - r_3) + M(r_{03} - r_3) + N(r_{04} - r_3)) / 6 \sum_{k=1}^4 \Omega_k,$$

$$c_2 = (K(z_{01} - z_3) + L(z_{01} - z_3) + M(z_{03} - z_3) + N(z_{04} - z_3)) / 6 \sum_{k=1}^4 \Omega_k.$$

Коэффициенты при вторых производных:

$$c_3 = (K(r_{01} - r_3)^2 + L(r_{02} - r_3)^2 + M(r_{03} - r_3)^2 + N(r_{04} - r_3)^2) / \left( 12 \sum_{k=1}^4 \Omega_k \right),$$

$$c_4 = (K(r_{01} - r_3)(z_{01} - z_3) + L(r_{02} - r_3)(z_{02} - z_3) + M(r_{03} - r_3)(z_{03} - z_3) + N(r_{04} - r_3)(z_{04} - z_3)) / 6 \sum_{k=1}^4 \Omega_k,$$

$$c_5 = (K(z_{01} - z_3)^2 + L(z_{02} - z_3)^2 + M(z_{03} - z_3)^2 + N(z_{04} - z_3)^2) / \left( 12 \sum_{k=1}^4 \Omega_k \right).$$

На равномерной прямоугольной сетке  $c_1 = c_3 = c_5 = A_2 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $A_1 = -r_{14}^2 / \rho_3 r_3$ ,  $c_4 = -r_{12}^2 / 6r_3$ . Вдали от оси симметрии осевой компонент градиента приближается со вторым порядком, вблизи оси – с первым.

Выражения для коэффициентов получаются довольно громоздкими, их анализ в общем виде затруднен. Изучить влияние параметров сетки на погрешность аппроксимации дифференциальных операторов можно, воспользовавшись пробными сетками. Ниже приведены оценки на тестовых сетках и результаты использования пробных сеток для расчетов.

### Результаты оценок погрешности на сетках различной структуры

Для определения погрешности аппроксимации дифференциальных операторов надо оценить главные члены невязки, величины которых определяются коэффициентами в разложении в соответствующие ряды  $a_i$  для оператора дивергенции и  $b_i$  и  $c_i$  – для оператора градиента (табл. 1, 2, 3).

В случае неравномерной прямоугольной сетки порядок аппроксимации дивергенции вдали от оси симметрии остается вторым (см. табл. 1). Это связано с тем, что для аппроксимации используется одна ячейка, которая не несет информации о сетке в целом.

В случае паркетной сетки (рис. 3)  $a_8 \sim r_{ij}^2 / (r_0 \sin \alpha)$ , где  $\alpha$  – угол четырехугольной ячейки. При вырождении ячейки (т. е. при обращении одного из углов в ноль)  $\sin \alpha \rightarrow 0$ , и невязка стремится в бесконечность. Вблизи оси симметрии на всех пробных сетках получается первый порядок аппроксимации.

Табл. 1. Коэффициенты в разложении дивергенции

Коэффициент при производной	Прямоугольная сетка	Паркетная сетка
$a_5$	$\frac{3r_{23}^2}{2r_0}$	$\frac{5r_{12}^2 \cos^2 \alpha + 3r_{23}^2}{2r_0}$
$a_6$	0	$\frac{r_{12}^2 \sin 2\alpha}{r_0}$
$a_7$	$\frac{3r_{12}^2}{2r_0}$	$\frac{3r_{12}^2 \sin^2 \alpha}{2r_0}$
$a_8$	0	$\frac{\text{ctg} \alpha (-r_{12}^2 \cos^2 \alpha + r_{23}^2)}{r_0}$
$a_9$	$\frac{r_{23}^2}{2r_0}$	$\frac{-r_{12}^2 \cos^2 \alpha + r_{23}^2}{2r_0}$
$a_{10}$	0	0

На неравномерной прямоугольной сетке в выражениях для коэффициентов  $c_2, c_4, c_5, b_1, b_3, b_4$  появляются слагаемые, пропорциональные разности соответствующих линейных размеров соседних ячеек  $\Delta h$ , отнесенной к радиусу центральной точки шаблона  $\sim \Delta h/r_3$ . Если линейные размеры ячеек мало отличаются друг от друга, то эта добавка незначительна. Если ячейки отличаются своими размерами более чем вдвое, то порядок аппроксимации первый. В этом случае при  $r_3 \rightarrow 0$  схема теряет аппроксимацию.

Под равномерной непрямоугольной сеткой будем понимать сетку, ячейки которой образованы двумя семействами эквидистантных параллельных прямых. Одно семейство прямых параллельно оси  $r$ , другое семейство наклонено к нему на угол  $\alpha$ .

В случае равномерной непрямоугольной сетки  $c_3$  пропорционален  $1/r_3 \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол четырехугольной ячейки (рис. 3). При уменьшении угла ячейки значение  $c_3$  растет, при стремлении  $\sin \alpha \rightarrow 0$  значение коэффициента стремится к бесконечности.

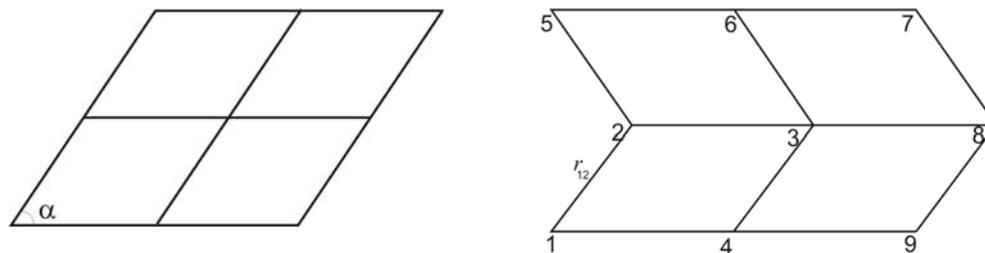


Рис. 3. Слева равномерная непрямоугольная сетка, справа нумерация узлов на паркетной сетке. Расстояние между соседними узлами обозначено  $r_{ij}$ ,  $i$  и  $j$  – индексы узлов

Радиальный компонент градиента вдали от оси симметрии аппроксимируется со вторым порядком точности. Если для соседних ячеек становится существенным  $\Delta h_r / r_3$ , где  $\Delta h_r$  – разница размеров двух соседних ячеек в радиальном направлении, а  $r_3$  – радиус узла 3 (рис. 3), порядок аппроксимации уменьшается до первого.

На паркетных сетках (рис. 3) у градиента появляются составляющие, имеющие противоположную направленность для тупых и острых углов. Рассмотрим коэффициент  $c_2 = 2r_3 / (r_{12} \cos \alpha + 2r_3) \sim 1 - r_{12} \cos \alpha / (2r_3)$ . При  $\alpha = \pi/2$   $\cos \alpha = 0$ , следовательно,  $c_2 = 1$ , для  $\alpha > \pi/2$  –  $\cos \alpha < 0$ , отсюда  $c_2 > 1$ , если  $\alpha < \pi/2$ ,  $\cos \alpha > 0$ , то  $c_2 < 1$ .

Теперь рассмотрим  $b_1 = \frac{2(r_{12} \cos \alpha + 3r_3)}{3(r_{12} \cos \alpha + 2r_3)} \sim \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r_{12} \cos \alpha}{r_3}\right)$ . При  $\alpha > \pi/2$ ,  $\cos \alpha < 0$ ,

$b_1 > 1$ , если  $\alpha < \pi/2$ ,  $\cos \alpha > 0$ , то  $b_1 < 1$ .

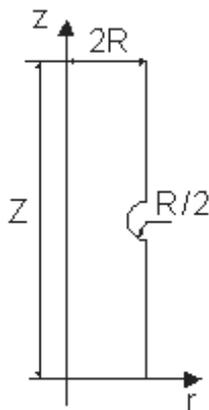


Рис. 4. Начальная форма перемычки

## Применение тестовых сеток для расчетов

В экспериментальных работах по изучению динамики углеродного  $z$ -пинча между двумя дисковыми электродами помещают перемычку из агар-агара. На электроды подается мегаамперный импульс тока, материал испаряется, ионизуется и начинает двигаться к оси симметрии под действием магнитного давления. Начальная форма перемычки показана на рис. 4.

Для вычислений потребовалось аккуратное построение начальной сетки с ее дальнейшим перестроением в ходе расчетов.

Табл. 2. Коэффициенты в разложении радиального компонента градиента

Коэффициент	Равномерная прямоугольная сетка	Прямоугольная сетка	Равномерная непрямоугольная сетка	Паркетная сетка
$b_1$	1	$1 + \frac{\eta_4^2 \eta_2 - r_{49}^2 \eta_2 + \eta_4^2 r_{25} - r_{49}^2 r_{25}}{8\Omega}$ оценка: $1 + \frac{4h_r \max h_z \max \Delta h_r}{r_3 h_r \min h_z \min} \left(1 + \frac{\Delta h_r}{4r_3}\right)$	1	$\frac{2(\eta_2 \cos \alpha + 3r_3)}{3(\eta_2 \cos \alpha + 2r_3)}$
$b_2$	0	0	0	0
$b_3$	0	$\frac{r_3(\eta_2^2 \eta_4 - r_{12}^2 r_{49} + r_{25}^2 \eta_4 - r_{25}^2 r_{49})}{8\Omega}$ оценка: $\frac{2h_z^2 \max \Delta h_r}{h_r \min h_z \min} \left(1 + \frac{\Delta h_r}{4r_3}\right)$	$-\frac{\eta_2^2 \cos^2 \alpha}{3r_3}$	$\frac{-2\eta_2 \cos \alpha (\eta_2 \cos \alpha + 3r_3)}{3(\eta_2 \cos \alpha + 2r_3)}$
$b_4$	0	$\frac{r_3(\eta_2^2 \eta_4 + \eta_2^2 r_{49} - r_{25}^2 \eta_4 - r_{25}^2 r_{49})}{8\Omega}$ оценка: $\frac{4h_r \max h_z \max \Delta h_r}{h_r \min h_z \min} \left(1 + \frac{\Delta h_r}{4r_3}\right)$	$-\frac{\eta_2^2 \cos \alpha}{6r_3}$	0
$b_5$	0	0	0	0

Табл. 3. Коэффициенты в разложении осевого компонента градиента

коэффициент	Равномерная прямоугольная сетка	Прямоугольная сетка	Равномерная непрямоугольная сетка	Паркетная сетка
$c_1$	0	0	0	0
$c_2$	1	$1 + \frac{\eta_2 \eta_4^2 - \eta_2 r_{49}^2 + r_{25} \eta_4^2 - r_{25} r_{49}^2}{24\Omega}$ оценка: $1 + \frac{h_r \max h_z \max \Delta h_r}{r_3 h_r \min h_z \min} \left(1 + \frac{\Delta h_r}{4r_3}\right)$	1	$\frac{2r_3}{(\eta_2 \cos \alpha + 2r_3)}$
$c_3$	0	0	$\frac{\text{ctg} \alpha (\eta_2^2 \cos^2 \alpha - \eta_4^2)}{3r_3}$	0
$c_4$	$-\frac{\eta_2^2}{6r_3}$	$\frac{(-\eta_2 \eta_4^3 + 3\eta_2 r_{12}^2 r_3 - 3r_{12} r_3 r_{49}^2 - \eta_2 r_{49}^3 - \eta_4^3 r_{25} + 3\eta_4^2 r_{25} r_3 - 3r_{25} r_{49}^2 r_3 - r_{25} r_{49}^3) / 24\Omega}{\text{оценка: } \frac{h_z \max h_r \max \Delta h_r}{2h_r \min h_z \min} \left(1 - \frac{h_z \min h_r^3 \min}{6h_z \max h_r \max \Delta h_r}\right) \left(1 + \frac{\Delta h_r}{4}\right)}$	$\frac{(\eta_2^2 \cos^2 \alpha - \eta_4^2)}{6r_3}$	$\frac{(\eta_2^2 \cos^2 \alpha - \eta_4^2)}{3(\eta_2 \cos \alpha + 2r_3)}$
$c_5$	0	$\frac{(-\eta_2^2 \eta_4^2 + 3\eta_2^2 \eta_4 r_3 + 3\eta_2^2 r_3 r_{49} + \eta_2^2 r_{49}^2 + \eta_4^2 r_{25}^2 - 3\eta_4 r_{25}^2 r_3 - 3r_{25}^2 r_{49} r_3 - r_{25}^2 r_{49}^2) / 24\Omega}{\text{оценка: } \frac{\Delta h_r h_r \max h_z \max}{2h_r \min h_r \min} \left(1 + \frac{\Delta h_z}{3r_3}\right) \left(1 + \frac{\Delta h_r}{4r_3}\right)}$	0	0

Тестировалось несколько вариантов построения начальной сетки. В первом варианте использовалась равномерная сетка по  $z$ , в каждом сечении по радиусу узлы были эквидистанты. Вычисления показали, что такой выбор сетки ведет к вырождению ячеек уже на начальном этапе расчета. Как было показано выше, невязка обратно пропорциональна синусу угла ячейки.

Следующая сетка строилась таким образом, чтобы каждая ячейка была максимально близка к прямоугольной. Для этого предыдущая сетка перестраивалась. Узлы на свободной границе фиксировались, а распределение узлов внутри расчетной области выбиралось так, чтобы приблизить углы ячеек к  $\pi/2$  (рис. 5). Алгоритм перестроения сетки основан на оптимизационном методе [Charakhch'yan, Ivanenko, 1997]. На первом шаге этого метода для каждого узла сетки выбиралось перемещение, с тем чтобы минимизировать функционал

$$F^h = \sum_{(i,j) \in nodes} \left( \sum_{k,l=\pm \frac{1}{2}} \frac{l\xi_{i+k,j}^2 + l\eta_{i,j+l}^2}{A_{i,j}^{i+k,j+l}} \right),$$

где  $A$  – площадь треугольника,  $l\xi$  и  $l\eta$  – длины соответствующих сторон треугольника, индексы  $k$  и  $l$  нумеруют прилежащие к узлу  $(i, j)$  треугольники, получаемые разрезанием ячейки по диагонали. Значение функционала минимизировалось локально для каждого узла сетки при фиксированном положении остальных узлов. Таким образом, были получены образцовые матрицы Якоби, локально определяющие желаемые свойства сетки. Они не могут быть использованы для построения непрерывного однозначного отображения на всей сетке из-за возможных локальных конфликтов. Поэтому на втором шаге строилось отображение, наиболее близкое к совокупности образцовых отображений в смысле наименьших квадратов отклонения значений якобианов в каждом узле новой сетки от образцовых. Для этого производилась минимизация дискретного функционала

$$F(\dots, x_i, y_i, \dots) = \sum_{c \in cells} \left( \sum_{n \in St(c)} \frac{\|J_n^c - (J_{ref})_n^c\|_{L2}^2}{|J_n^c| |(J_{ref})_n^c|} \right),$$

где  $J_n^c$  обозначает якобиан для узла  $n$  в ячейке  $c$ , а шаблон  $St(c)$  включает все узлы этой ячейки. Областью определения функционала является множество всех узлов сетки, включая граничные. При перестроении сетки форма границы не меняется.

Функционалы обладают свойством «барьера» [Knupp, Margolin, Shashkov, 2002]: при оптимизации исключается уменьшение до нуля или появление отрицательной площади каждого из треугольников, на которые разбивается сетка, при условии отсутствия таких треугольников в начальной сетке. Для второго функционала роль «барьера» играет значение максимальной нормы матрицы Якоби получаемого отображения.

В некоторых версиях вычислений, для того чтобы улучшить аппроксимацию использовалась начальная сетка со сгущением узлов в середине расчетной области. Для построения такой сетки использовалось отображение однородной сетки на координатную плоскость со сгущением по закону гиперболического тангенса (рис. 5). Такие сетки приводили к вырождению ячеек на начальном этапе расчета. Так как норма невязки компонентов градиента пропорциональна разнице радиальных и осевых размеров соседних ячеек. Иными словами, чем больше отличаются геометрические размеры соседних ячеек, тем больше погрешность аппроксимации.

Для построения начальной сетки использовалось отображение узлов в нули полиномов Чебышева первого рода. Такая сетка привела к вырождению ячеек на первых 10 нс расчета в связи с высокой погрешностью приближения дифференциальных операторов. Ячейки сильно отличались друг от друга и имели острые и тупые углы (рис. 6).

## Заключение

Форма сетки сильно влияет на порядок аппроксимации инвариантных дифференциальных операторов. В случае острых или тупых углов ячейки ошибка обратно пропорциональна

синусу этого угла, т. е. в случае вырождения ячеек стремится к бесконечности. Норма невязки возрастает при увеличении разницы в размерах соседних ячеек.

Предварительные расчеты показали, что при использовании сетки с оптимизацией по углам вырождения ячеек не происходит.

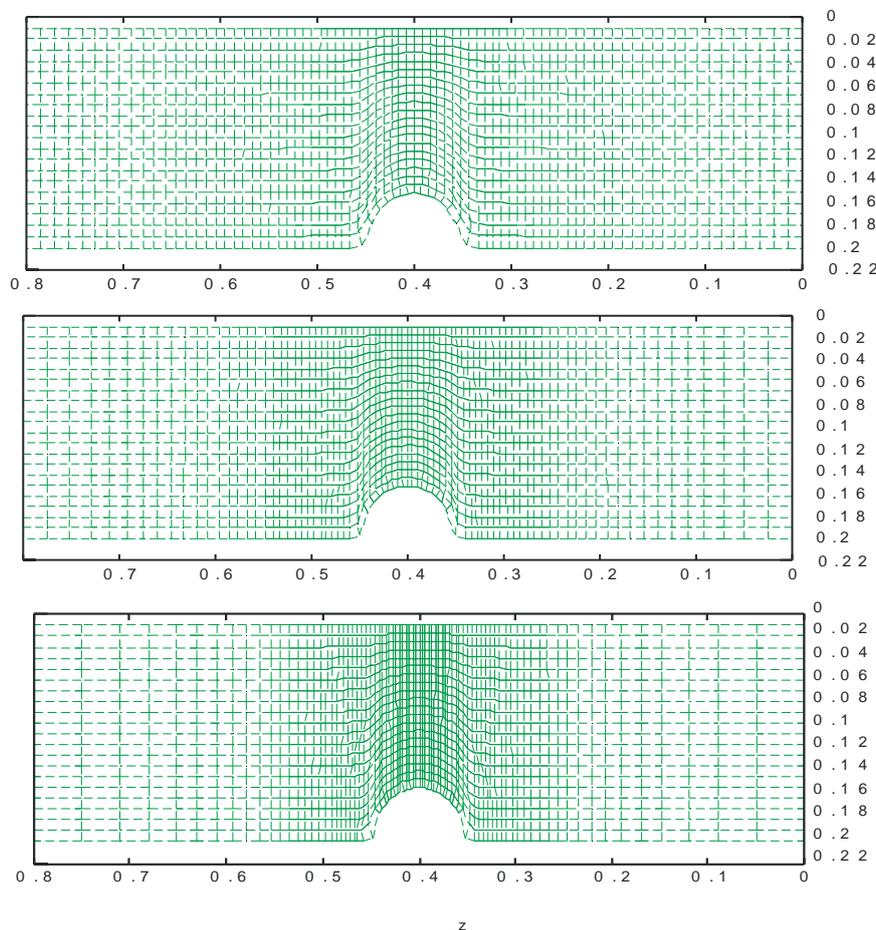


Рис. 5. Различные сетки со сгущением по осевому направлению в районе перемычки

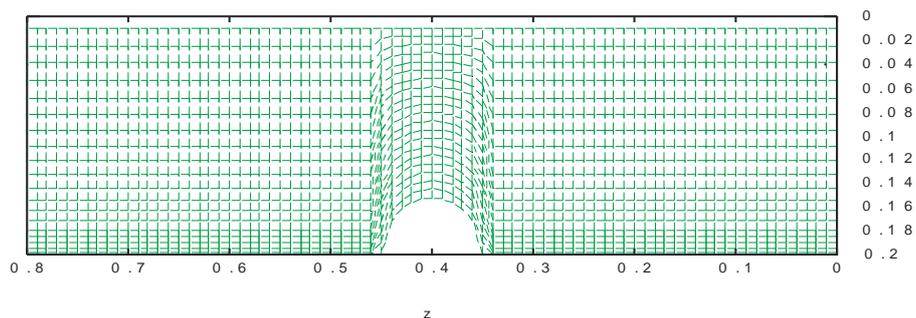


Рис. 6. Чебышевская сетка. Узлы сетки по направлению  $z$  выбирались как нули полинома Чебышева на  $[0; 1]$ , расставлялись в соответствии с нулями полиномов Чебышева первого рода

Сетки со сгущениями узлов в области выреза и на правой границе привели к чрезмерному увеличению невязки уже на начальном этапе расчета. Это может быть связано с ошибкой расчета градиента из-за разницы в размерах соседних ячеек.

Автор выражает благодарность А. И Лобанову за помощь в работе и полезные обсуждения.

**Список литературы**

- Кингсен А. С., Чукбар К. В., Яньков В. В.* Электронная магнитная гидродинамика // Вопросы теории плазмы. – М.: Атомиздат, 1987. – Вып. 16. – С. 243–291.
- Морозов А. И.* Введение в нелинейную плазмодинамику. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 576 с.
- Завьялова Н. А., Лобанов А. И.* Численные расчеты динамики лайнера, сформированного парами меди // Математическое моделирование. – М. – 2011. – Т. 23, № 4. – С. 103–119.
- Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. и др.* Разностные схемы на нерегулярных сетках. – Минск: Критерий, 1996.
- Charakhch'yan A.* A variational form of the Winslow grid generator / *A. Charakhch'yan, S. Ivanenko* // *Journal of Computational Physics*. – 1997. – № 136. – P. 385–398.
- Knupp P., Margolin L., Shashkov M.* Reference Jacobian Optimization-Based Rezone Strategies for Arbitrary Lagrangian Eulerian Methods // *Journal of Computational Physics*. – 2002. – № 176. – P. 93–128.