КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 4 С. 337–351

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае

С. М. Чуйко[a], О. В. Старкова[b], А. С. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19

E-mail: [a] chujko-slav@inbox.ru, [b] star-o@ukr.net

Получено 22 октября 2011 г.

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной автономной краевой задачи в частном критическом случае. Характерной особенностью поставленной задачи является невозможность непосредственного применения традиционной схемы исследования и построения решений критических краевых задач, созданной в работах И. Г. Малкина, А. М. Самойленко, Е. А. Гребеникова, Ю. А. Рябова и А. А. Бойчука. Для построения решений нелинейной нетеровой краевой задачи в частном критическом случае предложена итерационная схема, построенная по схеме метода наименьших квадратов. Эффективность техники продемонстрирована на примере анализа периодической задачи для уравнения типа Хилла.

Ключевые слова: автономная краевая задача, частный критический случай, метод наименьших квадратов, итерационная схема

Autonomous Noetherian boundary-value problem in special critical case

S. M. Chuiko, O. V. Starkova, A. S. Chuiko

Slavyansk State Pedagogical University, 19 G. Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. — The necessary and sufficient terms of solution existence of nonlinear autonomous Noetherian boundary-value problem are found in special critical case. The characteristic feature of the set problems is impossibility of direct application of traditional research schematic representation and construction of solutions of critical boundary-value problems, which was created in works of I. G. Malkin, A. M. Samoilenko, E. A. Grebenikov, Yu. A. Ryabov and A. A. Boichuk. For the solution construction of Noetherian boundary-value problem in special critical case an iterative procedure is recommended, it is constructed according to the scheme of least-squares method. Efficiency of the offered technique is shown on the example of analysis for periodic problems for Hill equation.

Keywords: autonomous boundary-value problem, special critical case, least-squares method, iterative procedure

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 337–351 (Russian).

Постановка задачи

Исследована задача о построении решений

$$z(t,\varepsilon): \; z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b(\varepsilon)], \; z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \; b(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию [Бойчук, Чуйко, 1992; Чуйко, Бойчук, 2009; Boichuk, Samoilenko, 2004]

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Решения нетеровой ($m \neq n$) задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t): \; z_0(\cdot) \in C^1[a,b^*], \; b^* = b(0)$$

порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Здесь A — постоянная $(n\times n)$-мерная матрица, $Z(z,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon)$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал непрерывно-дифференцируем по неизвестной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) при условии $P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ порождающая задача (3) имеет семейство решений [Boichuk, Samoilenko, 2004]

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m\times n)$-матрица, rank $Q = n_1$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (3); P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r-линейно-независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$;

$$G[f;\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [Boichuk, Samoilenko, 2004],

$$K[f](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (3), I_n — единичная $(n\times n)$-матрица. В критическом случае задача (1), (2) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a,b(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), (2), неизвестен и подлежит определению в процессе построения решения. Совершая в задаче (1), (2) замену переменной [Бойчук, Чуйко, 1992]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*, \tag{4}$$

приходим к задаче об отыскании решения $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b^*]$, $z(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ системы дифференциальных уравнений

$$dz/d\tau = Az + f + \varepsilon\{\beta(\varepsilon)A(z(\tau,\varepsilon) + f) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{5}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))(\alpha + \varepsilon\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)). \tag{6}$$

Здесь $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $\tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторные функционалы

$$\ell z(\cdot,\varepsilon),\ \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b^*] \to \mathbb{R}^m.$$

Решение задачи (5), (6) $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon)$ ищем в окрестности решения порождающей задачи (3). Для нахождения возмущения

$$x(\tau,\varepsilon):\ \ x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b^*],\quad x(\tau,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\quad x(\tau,0) \equiv 0$$

получаем задачу

$$dx/d\tau = Ax + \varepsilon\{\beta(\varepsilon)(A(z_0 + x) + f) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z_0 + x,\varepsilon)\}, \tag{7}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\alpha\beta(\varepsilon) + \varepsilon[1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{8}$$

Оставляя только линейно-независимые строки условия разрешимости

$$\begin{gathered} P_{Q^*}\{\alpha\beta(\varepsilon) + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - \ell K\{\beta(\varepsilon)[A(z_0 + x) + f] + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]Z(z_0 + x,\varepsilon)\}(\cdot)\} = 0 \end{gathered}$$

задачи (7), (8), получаем эквивалентное условие

$$\begin{aligned} &P_{Q_\rho^*}\{\alpha\beta(\varepsilon) + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ &\qquad - \ell K\{\beta(\varepsilon)[A(z_0 + x) + f] + [1+\varepsilon\beta(\varepsilon)]Z(z_0 + x,\varepsilon)\}(\cdot)\} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $P_{Q_\rho^*}$ — $(\rho \times m)$-мерная матрица, составленная из ρ-линейно-независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}. Обозначая

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot,c_r^*),0),\ \ f_0(s,c^*) = \beta^*[Az_0(s,c_r^*) + f] + Z(z_0(s,c_r^*),0)$$

аналогично [Бойчук, Чуйко, 1992], приходим к необходимому условию разрешимости задачи (7), (8).

Лемма. *Если краевая задача* (1), (2) *в критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(t,0) = z_0(t,c_r^*)$*, то вектор* $(c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(c_r^*,\beta^*) = P_{Q_\rho^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s,c^*)](\cdot)\} = 0. \tag{10}$$

Предположим, что уравнение (10) имеет действительный корень $(c_r^*,\beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$, для которого

$$\left.\frac{\partial F(c_r,\beta)}{\partial c_r}\right|_{\substack{c_r = c_r^*,\\ \beta = \beta^*}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{F(c_r,\beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{c_r = c_r^*,\\ \beta = \beta^*}} \neq 0. \tag{11}$$

В этом случае традиционная схема анализа автономных краевых задач [Бойчук, Чуйко, 1992] не применима, поскольку для краевой задачи (1), (2) не может иметь место ни один из критических случаев — первого, второго или более высокого порядка. С другой стороны, задача (1), (2) не представляет также особый критический случай [Чуйко, 2009], поскольку уравнение (10) не обращается в тождество.

Достаточное условие существования решения

Для нахождения решения $z(\tau,\varepsilon) = z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)$ задачи (5), (6) разлагаем функцию $Z(z,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(\tau, c_r^*) = X_r(\tau)c_r^* + G[f;\alpha](\tau)$ и точки $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon);$$

здесь

$$A_1(\tau) = \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z = z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon = 0}}, \quad A_2(z_0(\tau, c_r^*)) = \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z = z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon = 0}}.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторного функционала $J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по второму аргументу, выделяем линейные части этого функционала [Канторович, Акилов, 1977]

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \left.\frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right|_{\substack{z = z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon = 0}}, \quad \ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) = \left.\frac{\partial \tilde{J}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z = z_0(\tau,c_r^*),\\ \varepsilon = 0}}$$

и член $J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = J(z(\cdot, 0), 0)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

С учетом разложений нелинейностей и равенства (10) условие разрешимости (9) задачи (7), (8) принимает вид

$$\begin{aligned}
P_{Q_\rho^*}\{\alpha\overline{\beta}(\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] -\\
- \ell K\{\overline{\beta}(\varepsilon)[Az_0(s, c_r^*) + f] + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon) +\\
+ \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\cdot)\} = 0.
\end{aligned}$$

Обозначим $(\rho\times m)$-матрицу $\mathfrak{B}_0 = P_{Q_\rho^*}\{\alpha - \ell K[Az_0(\tau, c_r^*) + f](\cdot)\}$. Пусть $P_{\mathfrak{B}_0^*}$ — $(\rho\times\rho)$-мерная матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^{r+1} \to N(\mathfrak{B}_0^*)$. Для нахождения функции $\overline{\beta}(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0\overline{\beta}(\varepsilon) = -P_{Q_\rho^*}\{\varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) +\\
+ J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] - \ell K\{\varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon) +\\
+ (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\cdot)\},
\end{aligned}$$

разрешимому при условии $P_{\mathfrak{B}_0^*}P_{Q_\rho^*} = 0$. При этом задача (7), (8) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой

$$\begin{aligned}
x(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau,\varepsilon), \qquad (12)\\
x^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon G\{\overline{\beta}(\varepsilon)[Az_0(s, c_r^*) + f] + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon) +\\
+(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)],\\
\alpha\overline{\beta}(\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\tau),\\
\overline{\beta}(\varepsilon) = -\mathfrak{B}_0^+ P_{Q_\rho^*}\{\varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) +\\
+J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)] - \ell K\{\varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(s, c_r^*), 0) + \beta(\varepsilon)Ax(s,\varepsilon) +\\
+(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))[A_1(s)x(s,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(s, c_r^*)) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}(\cdot)\}.
\end{aligned}$$

Для построения этого решения в случае (11) применима итерационная схема, соответствующая методу простых итераций.

Теорема. *В критическом случае* ($P_{Q^*} \neq 0$) *для корня* $(c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *уравнения* $F(c^*) = 0$ *задача* (1), (2) *при условиях* (11) *и* $P_{\mathfrak{B}_0^*}P_{Q_\rho^*} = 0$ *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z(\tau, 0) = z_0(\tau, c_r^*)$.

Периодическая задача для уравнения типа Хилла

Метод простых итераций отличают простота и численная устойчивость, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений. На примере периодической задачи для уравнения типа Хилла [Каудерер, 1961; Якубович, 1972]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon Y(y, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) - y(T_1(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad \frac{dy(0, \varepsilon)}{dt} - \frac{dy(T_1(\varepsilon), \varepsilon)}{dt} = 0 \tag{13}$$

продемонстрируем практический способ построения модифицированной итерационной процедуры для нахождения приближенных решений

$$y(t, \varepsilon): \ y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, T_1(\varepsilon)], \ T_1(0) = 2\pi, \ y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

в случае (11) аналогично [Чуйко, 2009] с использованием метода наименьших квадратов [Чуйко, 2008], обеспечивающих большую точность при меньшем числе итераций. Решение задачи (13) ищем в малой окрестности решения $y_0(t), \ y_0(\cdot) \in C^2[0, 2\pi]$ порождающей задачи

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0, \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad \frac{dy_0(0)}{dt} - \frac{dy_0(2\pi)}{dt} = 0. \tag{14}$$

Здесь $Y(y, \varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно-дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Существенным отличием автономной задачи (13) от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое решение $z(t, \varepsilon)$ задачи (13) существует наряду с целой серией решений $z(t + h, \varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет [Малкин, 1956] зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи (14) стало однопараметричным, например, $y_0(t) = \hat{c}\cos t, \ \hat{c} \in \mathbb{R}^1$. Предположим, что для задачи (13) имеет место критический случай. Уравнение для порождающих амплитуд (10) при этом принимает вид

$$F(\hat{c}^*, \beta^*) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} (Y(y_0(t, \hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t, \hat{c}^*))dt = 0.$$

Предположим также, что уравнение для порождающих амплитуд имеет действительный корень $(\hat{c}^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^2$, для которого выполнены условия (11)

$$\left.\frac{\partial F(\hat{c}, \beta)}{\partial c_r}\right|_{\substack{\hat{c} = \hat{c}^*, \\ \beta = \beta^*}} \equiv 0, \quad \left.\frac{F(\hat{c}, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat{c} = \hat{c}^*, \\ \beta = \beta^*}} \neq 0.$$

Оставляя одну линейно-независимую строку уравнения для порождающих амплитуд $F(\hat{c}^*, \beta^*) = 0$, например, первую, приходим к скалярному уравнению

$$\hat{F}(\hat{c}^*, \beta^*) := \int_0^{2\pi} (Y(y_0(t, \hat{c}^*)) - 2\beta^* y_0(t, \hat{c}^*)) \cos t \, dt = 0.$$

Условие (11) при этом гарантирует неравенство

$$\mathfrak{B}_0 := \left.\frac{\partial \hat{F}(\hat{c}, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\substack{\hat{c} = \hat{c}^*, \\ \beta = \beta^*}} \neq 0.$$

Последнее неравенство обеспечивает однозначную разрешимость операторной системы (12) и, в свою очередь, существование единственного периодического решения уравнения типа Хилла (13) в малой окрестности 2π-периодического порождающего решения

$$y_0(t, \hat{c}^*) = \hat{c}^* \cos t, \ \ \hat{c}^* \in \mathbb{R}^1.$$

Представим период искомого решения $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$ через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in$ $\in C[0, \varepsilon_0]$. Величина $\beta(\varepsilon)$, $\beta(0) = \beta^*$ подлежит определению в процессе нахождения решения задачи (13). Замена независимой переменной (4) в случае периодической задачи принимает вид

$$t = \tau(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)). \tag{15}$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\frac{d^2 y(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \tag{16}$$

$$y(0, \varepsilon) - y(2\pi, \varepsilon) = 0, \quad \frac{dy(0, \varepsilon)}{d\tau} - \frac{dy(2\pi, \varepsilon)}{d\tau} = 0. \tag{17}$$

Искомое решение задачи (16), (17) ищем в виде

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon).$$

Отклонение от порождающего решения

$$x(\tau, \varepsilon): \ \ x(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi], \quad x(\tau, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

определяет периодическая краевая задача

$$\begin{gathered} \frac{d^2 x(\tau, \varepsilon)}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 x(\tau, \varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - \left\{ \frac{d^2 y_0(\tau, \hat{c}^*)}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2 \frac{dy_0(\tau, \hat{c}^*)}{d\tau} \right\}, \end{gathered} \tag{18}$$

$$x(0, \varepsilon) - x(2\pi, \varepsilon) = 0, \frac{dx(0, \varepsilon)}{d\tau} - \frac{dx(2\pi, \varepsilon)}{d\tau} = 0. \tag{19}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Y(y, \varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau, \hat{c}^*)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\begin{gathered} Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = Y(y_0(\tau, \hat{c}^*), 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*))x(\tau, \varepsilon) + \\ + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*)) + \mathcal{R}(y_0(\tau, \hat{c}^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \end{gathered}$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau, \hat{c}^*)) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y = y_0(\tau, \hat{c}^*), \\ \varepsilon = 0}}, \quad \mathcal{A}_2(y_0(\tau, \hat{c}^*)) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{y = y_0(\tau, \hat{c}^*), \\ \varepsilon = 0}}.$$

Первое приближение к решению задачи (16), (17)

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_1(\tau, \varepsilon)$$

ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{d^2x_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+x_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x_1(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))\},\tag{20}$$

$$x_1(0,\varepsilon)-x_1(2\pi,\varepsilon)=0,\quad \frac{dx_1(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dx_1(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0.\tag{21}$$

Пусть $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, $\ldots$, $\varphi_\mu(\tau)$, $\ldots$ – система линейно-независимых дважды непрерывно-дифференцируемых 2π-периодических скалярных функций. Приближение к решению краевой задачи (20), (21) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_1(\varepsilon),\quad c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu;$$

здесь $\varphi(\tau)=[\varphi_1(\tau)\ \ \varphi_2(\tau)\ \ \ldots\ \ \varphi_\mu(\tau)]$ — $(1\times\mu)$-матрица. Потребуем

$$\Theta(c_1(\varepsilon))=\|[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))-1]\xi_1(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]-\xi_1''(\tau,\varepsilon)\|^2_{L^2[0,2\pi]}\to\min$$

при фиксированной матрице $\varphi(t)$. Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)=[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))-1]\varphi(\tau)-\varphi''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))c_1(\varepsilon)=-\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu$ при условии невырожденности $(\mu\times\mu)$-матрицы Грама [Ахиезер, 1965]

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau.$$

Таким образом, при условии $\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]\neq0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon)=-\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_1(\varepsilon)\approx x_1(\tau,\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (20), (21).

Пусть $\psi_1(\varepsilon),\psi_2(\varepsilon),\ \ldots\ \psi_\lambda(\varepsilon),\ \ldots$ — система линейно-независимых непрерывных функций. Первое приближение

$$\beta_1(\varepsilon)=\beta^*+\overline{\beta}_1(\varepsilon),\quad \overline{\beta}_1(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon),\quad \zeta_1(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)q_1,\quad q_1\in\mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, минимизируя невязку в решении краевой задачи

$$y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon) + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)) = \\ = \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \quad (22)$$

$$\xi_1(0,\varepsilon) - \xi_1(2\pi,\varepsilon) = 0, \quad \xi_1'(0,\varepsilon) - \xi_1'(2\pi,\varepsilon) = 0. \quad (23)$$

Потребуем

$$\Theta(q_1) = \| \, \|\varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - (y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon)) - \\ - (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon))\|_{L[0,\varepsilon_0]}\|^2_{L^2[a,b^*]} \to \min$$

при фиксированных матрице $\psi(\varepsilon)$ и первом приближении $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ к частному решению краевой задачи (22), (23). Обозначим $(1\times\lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_1(\tau,\varepsilon) = 2\varepsilon\{\varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - (y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon))\}\Psi(\varepsilon).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(q_1)$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))q_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon)) + \\ + (1 + 2\varepsilon\beta^*)[y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) - \varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $q_1 \in \mathbb{R}^\lambda$ при условии невырожденности $(\lambda\times\lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_1(\tau,\varepsilon)\, d\tau\, d\varepsilon.$$

Таким образом, при условии

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))] \neq 0$$

находим вектор

$$q_1 = [\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon)) + \\ + (1 + 2\varepsilon\beta^*)[y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) - \varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) первое приближение

$$\overline{\beta}_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon), \quad \zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_1(\varepsilon), \quad q_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\overline{\beta}(\varepsilon)$. Второе приближение к решению краевой задачи (16), (17) ищем, как отклонение от первого

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_2(\tau,\varepsilon), \quad x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu.$$

Предположим, что найденное первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности первого приближения $y_1(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)= \\ = Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))+\mathcal{R}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))=\left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y\,=\,y_1(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\,=\,0}},\qquad \mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))=\left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{y\,=\,y_1(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\,=\,0}}.$$

Второе приближение к решению краевой задачи (16), (17) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{d^2y_2(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_2(\tau,\varepsilon)=\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2\{Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+ \\ +\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))\},\quad (24)$$

$$y_2(0,\varepsilon)-y_2(2\pi,\varepsilon)=0,\quad \frac{dy_2(0,\varepsilon)}{d\tau}-\frac{dy_2(2\pi,\varepsilon)}{d\tau}=0.\quad (25)$$

Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)=(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_1(\tau,\varepsilon))-1]\varphi(\tau)-\varphi''(\tau).$$

Необходимое условие минимизации невязки в решении задачи второго приближения приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))c_2(\varepsilon)=-\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\Big\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+ \\ +\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))]-(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_1(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Big\}d\tau,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\mu$ при условии невырожденности $(\mu\times\mu)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau.$$

Таким образом, при условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))]\neq 0$$

находим вектор

$$c_2(\varepsilon)=[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\Big\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+ \\ +\varepsilon\mathcal{A}_2(y_1(\tau,\varepsilon))]-(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_1(\tau,\varepsilon)-\frac{d^2y_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Big\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$y_2(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x_2(\tau,\varepsilon),\quad x_2(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\quad \xi_2(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_2(\varepsilon)$$

к решению краевой задачи (24), (25). Второе приближение

$$\beta_2(\varepsilon) = \beta^* + \overline{\beta}_2(\varepsilon), \quad \overline{\beta}_2(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon), \quad \zeta_2(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_2, \quad q_2 \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, минимизируя невязку в решении краевой задачи

$$y_2''(\tau,\varepsilon) + [1 + 2\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon))]y_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon[1 + 2\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon))]Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon), \tag{26}$$

$$y_2(0,\varepsilon) - y_2(2\pi,\varepsilon) = 0, \ \ y_2'(0,\varepsilon) - y_2'(2\pi,\varepsilon) = 0. \tag{27}$$

Обозначим $(1 \times \lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_2(\tau,\varepsilon) = 2\varepsilon\{\varepsilon Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - y_2(\tau,\varepsilon)\}\Psi(\varepsilon).$$

Необходимое условие минимизации невязки в решении задачи (26), (27) приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot))q_2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\{y_2''(\tau,\varepsilon) + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))y_2(\tau,\varepsilon) - \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $q_2 \in \mathbb{R}^\lambda$ при условии невырожденности $(\lambda \times \lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot)) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_2(\tau,\varepsilon)\, d\tau\, d\varepsilon.$$

Таким образом, при условии

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot))] \neq 0$$

находим вектор

$$q_2 = [\Gamma(\mathfrak{F}_2(\cdot,\cdot))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\{y_2''(\tau,\varepsilon) + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))y_2(\tau,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) второе приближение

$$\beta_2(\varepsilon) = \beta^* + \overline{\beta}_2(\varepsilon), \quad \overline{\beta}_2(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon), \quad \zeta_2(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_2, \quad q_2 \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\overline{\beta}(\varepsilon)$. Продолжая рассуждения, предположим, что найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_k(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots \ + \xi_k(\tau,\varepsilon), \ \ \xi_k(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_k(\varepsilon), \ \ c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu, \quad k = 1, 2, \ \ldots$$

к решению краевой задачи (16), (17) и приближение

$$\beta_k(\varepsilon) = \beta^* + \overline{\beta}_k(\varepsilon), \quad \overline{\beta}_k(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ \ldots \ \zeta_k(\varepsilon), \ \ \zeta_k(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_k(\varepsilon), \quad q_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к решению задачи (16), (17) ищем в виде

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots \ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \ \ \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \qquad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu.$$

Аналогично следующее наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к функции $\beta(\varepsilon)$ представим как

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \overline{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \qquad \overline{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$
$$\zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon) q_{k+1}(\varepsilon), \qquad q_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\lambda}.$$

Предположим, что найденное приближение $y_k(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности приближения $y_k(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon)) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\hat{c}^*)) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y = y_k(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon = 0}}, \qquad \mathcal{A}_2(y_k(\tau,\hat{c}^*)) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{y = y_k(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon = 0}}.$$

Обозначим $(1\times\mu)$-матрицу

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) - 1]\varphi(\tau) - \varphi''(\tau).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = [\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \\ + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))] - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Big\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots\ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu}$$

к решению задачи (16), (17). Обозначим $(1\times\lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 2\varepsilon\{\varepsilon Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) - y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\}\Psi(\varepsilon).$$

При условии невырожденности

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))] \neq 0$$

$(\lambda\times\lambda)$-матрицы Грама

$$\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot)) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau\,d\varepsilon$$

находим вектор

$$q_{k+1} = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{y''_{k+1}(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ (1 + 2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))y_{k+1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \overline{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \qquad \overline{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon) + \ldots + \zeta_{k+1}(\varepsilon),$$
$$\zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_{k+1}(\varepsilon), \qquad q_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda$$

к функции $\overline{\beta}(\varepsilon)$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *В критическом случае* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *для корня* $(c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$ *уравнения* $F(c^*) = 0$ *при условии* (11) *задача* (13) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_r^*)$. *При условии*

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad \det[\Gamma(\mathfrak{F}_k(\cdot,\cdot))] \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

это решение можно определить при помощи итерационного процесса

$$y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon), \quad x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon), \tag{28}$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]d\tau,$$
$$\beta_1(\varepsilon) = \overline{\beta}_1(\varepsilon), \qquad \overline{\beta}_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon), \qquad \zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_1,$$
$$q_1 = [\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y''_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi''_1(\tau,\varepsilon)) + (1 + 2\varepsilon\beta^*)[y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\}\, d\tau\, d\varepsilon,\ \ldots,$$
$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),$$
$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots\ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \qquad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),$$
$$c_{k+1}(\varepsilon) = [\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{\varepsilon(1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))] -$$
$$- (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2 y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\}d\tau,$$
$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \overline{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \qquad \overline{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon) + \ \ldots\ + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \qquad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_{k+1}(\varepsilon),$$
$$q_{k+1} = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{y''_{k+1}(\tau,\varepsilon) + (1 + 2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))y_{k+1}(\tau,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon(1 + 2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\, d\tau\, d\varepsilon,\ \ldots\ .$$

С учетом замены переменной (15) *итерационная процедура* (28) *определяет приближенное решение периодической задачи для уравнения Хилла* (13).

$$y_k\left(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)}, \varepsilon\right) = y_0\left(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)}, \hat{c}^*\right) + x_k\left(\frac{t}{1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)}, \varepsilon\right), \ \ldots, \ k = 1, 2, \ \ldots .$$

Пример. Исследуем задачу о построении периодического решения

$$y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения Дюффинга

$$y'' + y = \varepsilon \cdot y^3.$$

Уравнение для порождающих амплитуд (24) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения Дюффинга принимает вид

$$F_\rho(\hat{c},\beta) := \frac{\pi\hat{c}}{4}\left(3\hat{c}^2 - 8\beta\right) = 0.$$

Корень $\hat{c} = 0$ соответствует тривиальному порождающему решению $y_0(\tau,\hat{c}^*) \equiv 0$, в малой окрестности которого расположено лишь положение равновесия уравнения Дюффинга. Серия корней

$$\beta^* = \frac{3(\hat{c}^*)^2}{8}, \quad \hat{c}^* \neq 0, \quad \hat{c}^* \in \mathbb{R}^1$$

обеспечивает вырожденность ($\det B_0 = 0$) матрицы B_0, ключевой в традиционной схеме исследования периодических краевых задач [Бойчук, Чуйко, 1992; Чуйко, Бойчук, 2009]. Матрица B_0 при этом имеет ненулевые элементы

$$B_0 = \frac{\pi\hat{c}^*}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\hat{c}^* & -4 \end{bmatrix} \neq 0;$$

таким образом, задача о нахождении периодического решения уравнения Дюффинга для $\hat{c}^* \neq 0$ представляет частный критический случай. Примем для определенности $\hat{c}^* = 1$. В этом случае величина $\mathfrak{B}_\beta = -2\pi \neq 0$, следовательно согласно теореме 1 задача о построении периодического решения уравнения Дюффинга в малой окрестности порождающего решения $y_0(\tau,\hat{c}^*) = \cos\tau$ имеет единственное решение. Нами найдено $T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta_5(\varepsilon))$ — периодическое пятое приближение к решению уравнения Дюффинга [Чуйко, Чуйко, 2010]:

$$\begin{aligned} y_5(\tau,\varepsilon) = \cos\tau - \frac{17}{64}\varepsilon\cos\tau + \frac{873}{4\,096}\cdot\varepsilon^2\cos\tau - \frac{14\,943}{131\,072}\cdot\varepsilon^3\cos\tau + \frac{621\,713}{8\,388\,608}\cdot\varepsilon^4\cos\tau - \\ - \frac{50\,158\,059}{1\,073\,741\,824}\cdot\varepsilon^5\cos\tau - \frac{698\,704}{1\,654\,909\,117}\cdot\varepsilon^6\cos\tau - \frac{9\,049\,388}{867\,820\,023}\cdot\varepsilon^7\cos\tau + \\ + \frac{10\,741\,671}{879\,008\,941}\cdot\varepsilon^8\cos\tau + \frac{566\,415}{19\,721\,363\,668}\cdot\varepsilon^9\cos\tau + \frac{2\,173\,159}{15\,018\,447\,577}\cdot\varepsilon^{10}\cos\tau + \\ + \frac{95\,507}{40\,880\,064\,770}\cdot\varepsilon^{11}\cos\tau + \frac{461\,438}{2\,225\,777\,143}\cdot\varepsilon^{12}\cos\tau - \frac{1}{32}\cdot\varepsilon\cos 3\tau + \frac{9}{2\,048}\cdot\varepsilon^2\cos 3\tau - \\ - \frac{99}{8\,192}\cdot\varepsilon^3\cos 3\tau + \frac{15\,023}{8\,388\,608}\cdot\varepsilon^4\cos 3\tau - \frac{245\,811}{67\,108\,864}\cdot\varepsilon^5\cos 3\tau + \frac{1\,397\,408}{1\,654\,909\,117}\cdot\varepsilon^6\cos 3\tau + \\ + \frac{3\,540\,711}{2\,123\,657\,887}\cdot\varepsilon^7\cos 3\tau + \frac{1\,960\,563}{1\,624\,849\,940}\cdot\varepsilon^8\cos 3\tau - \frac{828\,669}{14\,426\,233\,469}\cdot\varepsilon^9\cos 3\tau - \\ - \frac{1\,359\,361}{27\,840\,195\,402}\cdot\varepsilon^{10}\cos 3\tau - \frac{161\,448}{34\,552\,465\,777}\cdot\varepsilon^{11}\cos 3\tau - \frac{831\,991}{12\,330\,271\,799}\cdot\varepsilon^{12}\cos 3\tau + \end{aligned}$$

$$+\frac{\varepsilon^2\cos 5\tau}{1\,024}+\frac{\varepsilon^3\cos 5\tau}{65\,536}+\frac{2\,381}{4\,194\,304}\cdot\varepsilon^4\cos 5\tau+\frac{4\,711}{67\,108\,864}\cdot\varepsilon^5\cos 5\tau+\frac{1\,712\,623}{7\,893\,293\,717}\cdot\varepsilon^6\cos 5\tau+$$
$$+\frac{640\,368}{15\,765\,403\,451}\cdot\varepsilon^7\cos 5\tau-\frac{132\,045}{1\,800\,694\,511}\cdot\varepsilon^8\cos 5\tau-\frac{897\,246}{13\,680\,597\,481}\cdot\varepsilon^9\cos 5\tau-$$
$$-\frac{526\,460}{15\,431\,886\,227}\cdot\varepsilon^{10}\cos 5\tau-\frac{528\,727}{27\,270\,566\,075}\cdot\varepsilon^{11}\cos 5\tau-\frac{1\,734\,336}{142\,003\,575\,115}\cdot\varepsilon^{12}\cos 5\tau-$$
$$-\frac{\varepsilon^3\cos 7\tau}{32\,768}-\frac{11}{2\,097\,152}\cdot\varepsilon^4\cos 7\tau-\frac{1\,639}{67\,108\,864}\cdot\varepsilon^5\cos 7\tau-\frac{69\,559}{8\,589\,934\,592}\cdot\varepsilon^6\cos 7\tau-$$
$$-\frac{239\,097}{19\,345\,370\,824}\cdot\varepsilon^7\cos 7\tau-\frac{403\,307}{73\,080\,294\,227}\cdot\varepsilon^8\cos 7\tau+\frac{55\,879}{49\,276\,366\,858}\cdot\varepsilon^9\cos 7\tau+$$
$$+\frac{121\,117}{56\,739\,559\,495}\cdot\varepsilon^{10}\cos 7\tau+\frac{65\,865}{26\,390\,366\,173}\cdot\varepsilon^{11}\cos 7\tau+\frac{101\,795}{51\,470\,915\,149}\cdot\varepsilon^{12}\cos 7\tau+$$
$$+\frac{\varepsilon^4\cos 9\tau}{1\,048\,576}+\frac{21}{67\,108\,864}\cdot\varepsilon^5\cos 9\tau+\frac{4\,275}{4\,294\,967\,296}\cdot\varepsilon^6\cos 9\tau+\frac{69\,057}{137\,438\,953\,472}\cdot\varepsilon^7\cos 9\tau+$$
$$+\frac{31\,571}{48\,614\,162\,736}\cdot\varepsilon^8\cos 9\tau+\frac{67\,835}{169\,692\,035\,569}\cdot\varepsilon^9\cos 9\tau+\frac{10\,777}{118\,002\,093\,877}\cdot\varepsilon^{10}\cos 9\tau-$$
$$-\frac{8\,523}{806\,687\,232\,430}\cdot\varepsilon^{11}\cos 9\tau-\frac{41\,072}{389\,422\,001\,521}\cdot\varepsilon^{12}\cos 9\tau-\frac{\varepsilon^5\cos 11\tau}{33\,554\,432}-$$
$$-\frac{31}{2\,147\,483\,648}\cdot\varepsilon^6\cos 11\tau-\frac{1\,343}{34\,359\,738}\cdot\varepsilon^7\cos 11\tau-\frac{10\,230}{399\,026\,343\,149}\cdot\varepsilon^8\cos 11\tau-$$
$$-\frac{3\,231}{101\,700\,114\,874}\cdot\varepsilon^9\cos 11\tau-\frac{18\,143}{772\,249\,828\,613}\cdot\varepsilon^{10}\cos 11\tau-\frac{7\,994}{730\,541\,904\,185}\cdot\varepsilon^{11}\cos 11\tau-$$
$$-\frac{4\,850}{1\,025\,164\,429\,497}\cdot\varepsilon^{12}\cos 11\tau+\frac{\varepsilon^6\cos 13\tau}{1\,073\,741\,824}+\frac{41}{68\,719\,476\,736}\cdot\varepsilon^7\cos 13\tau+$$
$$+\frac{2\,891}{1\,935\,568\,954\,727}\cdot\varepsilon^8\cos 13\tau+\frac{4\,706}{3\,980\,901\,955\,859}\cdot\varepsilon^9\cos 13\tau+$$
$$+\frac{2\,226}{1\,515\,947\,240\,489}\cdot\varepsilon^{10}\cos 13\tau+\frac{1\,947}{1\,579\,817\,200\,855}\cdot\varepsilon^{11}\cos 13\tau+$$
$$+\frac{909}{117\,892\,647\,304}\cdot\varepsilon^{12}\cos 13\tau-\frac{\varepsilon^7\cos 15\tau}{34\,359\,738\,368}-\frac{51}{2\,199\,023\,255\,552}\cdot\varepsilon^8\cos 15\tau-$$
$$-\frac{739}{13\,223\,742\,405\,886}\cdot\varepsilon^9\cos 15\tau-\frac{443}{8\,660\,210\,519\,111}\cdot\varepsilon^{10}\cos 15\tau-$$
$$-\frac{286}{44\,407\,852\,761\,913}\cdot\varepsilon^{11}\cos 15\tau-\frac{152}{2\,533\,003\,655\,895}\cdot\varepsilon^{12}\cos 15\tau.$$

Здесь

$$\beta_5(\tau,\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\,829}{32\,768}\cdot\varepsilon^2+\frac{11\,433}{1\,048\,576}\cdot\varepsilon^3+\frac{2\,235\,327}{134\,217\,728}\cdot\varepsilon^4+\frac{4\,503\,417}{1\,073\,741\,824}\cdot\varepsilon^5-$$
$$-\frac{5\,323\,260}{275\,900\,981}\cdot\varepsilon^6-\frac{15\,548\,395}{1\,495\,176\,536}\cdot\varepsilon^7-\frac{378}{8\,060\,419\,882\,001}\cdot\varepsilon^8+\frac{2\,863\,479}{1\,676\,636\,167}\cdot\varepsilon^9+$$
$$+\frac{2}{3\,001\,557\,602\,515\,237}\cdot\varepsilon^{10}+\frac{1\,448\,398}{4\,151\,585\,815}\cdot\varepsilon^{11}+\frac{4\,145\,643}{4\,212\,674\,074}\cdot\varepsilon^{12}+\frac{1\,685\,113}{1\,525\,999\,605}\cdot\varepsilon^{13}+$$
$$+\frac{2\,485\,409}{3\,653\,459\,129}\cdot\varepsilon^{14}+\frac{557\,083}{24\,247\,191\,414}\cdot\varepsilon^{15}.$$

Для оценки точности найденного приближения определим невязку

$$\Delta_5(\varepsilon):=\left\|y_i''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_5(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_5(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_5^3(\tau,\varepsilon)\right\|_{C[0;2\pi]};$$

в частности, $\Delta_5(0,1)\approx 2,79\,478\cdot 10^{-16}$, $\Delta_5(0,01)\approx 1,87\,242\cdot 10^{-16}$.

Список литературы

Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука., 1965. — 408 с.

Бойчук А. А., Чуйко С. М. Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 1668–1674.

Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1961. — 778 с.

Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

Чуйко С. М., Чуйко А. С. Периодическая задача для уравнения типа Хилла // Вестник Славянского государственного педагогического университета. Математика. — 2010, № 4. — С. 141–181.

Чуйко С. М. О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелинейные колебания. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 554–573.

Чуйко С. М. Область сходимости итерационной процедуры автономной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2006. — Т. 9, № 3. — С. 416–432.

Чуйко С. М. Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 548–562.

Чуйко С. М. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелинейные колебания. — 2009. — Т. 12, № 3. — С. 405–416.

Якубович В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

Boichuk A. A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.