

УДК: 531.55+514.85

## Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением

В. В. Чистяков

Ярославская государственная сельскохозяйственная академия (ФГОУ ВПО ЯГСХА),  
Россия, 150042, Ярославль, Тутаевское ш., 58

E-mail: chistiakov\_v\_v@rambler.ru

Получено 11 июня 2011 г.,  
после доработки 20 июня 2011 г.

Предложен новый набор ключевых баллистических параметров:  $b_0 = \operatorname{tg}\theta_0$ ,  $\theta_0$  — угол вылета,  $R_a$  — вершинный радиус кривизны траектории и  $\beta_0$  — безразмерный квадрат разворотной скорости, и на его основе разработан новый прием приближенного интегрирования уравнений динамики материальной точки в среде с квадратичным сопротивлением ( $\alpha = R/mg = 0,5 \dots 1,5$ ) при  $\operatorname{tg}\theta_0 < 0,5$ . Способ базируется на преобразованиях Лежандра, и он дает формулы с автоматически подстраиваемой точностью как для текущих координат  $x(b)$ ,  $y(b)$  и времени  $t(b)$ ,  $b = \operatorname{tg}\theta$  — текущий наклон траектории, так и для основных параметров (время  $T$ , дальность  $L$ , положение вершины  $L_a$ ) траектории в диапазоне, далеко выходящем за малоугловую область прицельной стрельбы. Точность формул выверялась при помощи продукта Maple.

Ключевые слова: квадратичный закон сопротивления, преобразования Лежандра, баллистический, малоугловая область, автоподстройка точности, Maple

### On one resolvent method for integrating the low angle trajectories of a heavy point projectile motion under quadratic air resistance

V. V. Chistyakov

Yaroslavl' state agroindustrial academy, Tutaevskoe shosse, 58, Yaroslavl', 150042, Russia

**Abstract.** — New key parameters, namely  $b_0 = \operatorname{tg}\theta_0$ ,  $\theta_0$  — angle of throwing,  $R_a$  — top curvature radius and  $\beta_0$  — dimensionless speed square on the top of low angular trajectory were suggested in classic problem of integrating nonlinear equations of point mass projectile motion with quadratic air drag. Very precise formulae were obtained in a new way for coordinates  $x(b)$ ,  $y(b)$  and fly time  $t(b)$ ,  $b = \operatorname{tg}\theta$  where  $\theta$  is inclination angle. This method is based on Legendre transformation and its precision is automatically improved in wide range of the  $\theta_0$  values and drag force parameters  $\alpha$ . The precision was monitored by Maple computing product.

Keywords: quadratic air drag, projectile, Legendre transformation, low angular trajectory, automatically adjusted formula precision, Maple

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 265–277 (Russian).

Классическая одновременно и для математики, и для нелинейной динамики задача интегрирования уравнений неуправляемого движения тяжелой точечной массы в среде с квадратичным сопротивлением [Euler, 1755] представляет широкий прикладной интерес — от внешней баллистики до спорта [Chen et al., 2009], физики атмосферы (падение капель дождя) и даже анимации. Значимость ее усиливает тот факт, что вплоть до чисел Маха  $M \approx 0,7$  (см. графики в [Weinacht et al, 2005]) сопротивление движению для многих реальных тел очень точно описывается формулой Рэлея  $R = C_d \rho S V^2 = cmgV^2$ , связующей силу  $R$  со скоростью  $V$ , плотностью газа  $\rho$ , фронтальной площадью  $S$  и коэффициентом формы  $C_d$ . По этой причине исследования, как теоретические, так и экспериментальные, будут продолжаться, а новые подходы к решению, как аналитическому, так и численному, будут создаваться, математический аппарат же — совершенствоваться и становиться все более изощренным (применение метода гомотопического анализа (см. ссылку в [Чудинов, 2009]), а также метода итераций Пикара [Parker et al., 1996]).

Ниже изложены результаты, полученные опирающимся на преобразование Лежандра резольвентным методом интегрирования уравнений такого движения при малых углах вылета.

### Метод преобразований Лежандра (прикосновения)

В каждой точке баллистической траектории вектор скорости  $\vec{V}$  составляет свой уникальный угол  $\theta$  с горизонтом, равно как уникальны и параметры в уравнении касательной  $y_t = a + bx$ : *угловой коэффициент*  $b = \text{tg } \theta$  и *прерывание*  $a(\theta(b)) \equiv a(b)$  (рис. 1), изменяющиеся монотонно от своих стартовых значений —  $b_0 = \text{tg } \theta_0 > 0$  и  $a_0 = 0$ . Следовательно, альтернативно траектория описывается через касательное расслоение как

$$a = a(b), \quad b = b(t), t \in [t_0, t_1]. \quad (1.1)$$

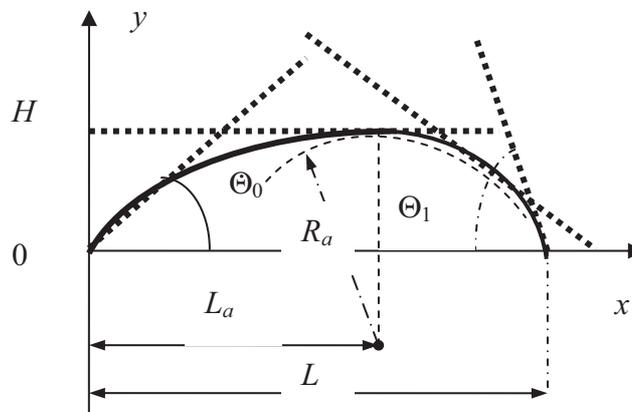


Рис. 1. Баллистическая траектория (—) и ее касательное расслоение (---)

В точке траектории с абсциссой  $x_0(t)$  подкасательная  $a$  и наклон  $b$  суть

$$a = y - bx, \quad \dot{y} = b\dot{x}, \quad (1.2)$$

следовательно,

$$x = -\frac{\dot{a}}{b} = -\frac{da}{db}, \quad y = a - \frac{da}{db} b. \quad (1.3)$$

Записав силу сопротивления как  $\vec{R} = -\alpha mg V \vec{V}$ , получим уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha mg \dot{x} V, \\ m\ddot{y} = -\alpha mg \dot{y} V - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\alpha g \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \\ \ddot{y} = -\alpha g \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - g. \end{cases} \quad (1.4)$$

Умножая верхнее уравнение на  $b$  и вычитая его затем из нижнего,

$$\ddot{y} - b\ddot{x} = -g \Leftrightarrow \frac{d(\dot{y} - b\dot{x})}{dt} + \dot{b}\dot{x} = -g \Rightarrow \dot{b}\dot{x} = -g. \quad (1.5)$$

Продифференцировав выражение для абсциссы (1.3) и подставив в (1.5), получим *универсальное уравнение связи* (кинематики поворота вектора скорости с дифференциальной геометрией касательного расслоения траектории):

$$\dot{b} \left( -\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right) = -g \Rightarrow \dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a''_{bb}}}. \quad (1.6)$$

Задача, эквивалентная стандартной динамической системе (4), получается путем несложных преобразований

$$\begin{cases} \ddot{x} = \left( -\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right)' \dot{b} = -\alpha \left( -\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right)^2 \sqrt{1+b^2} \\ \dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a''_{bb}}} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow -a'''_{bbb} \dot{b}^2 - a''_{bb} \ddot{b} = -\alpha \left( -\frac{d^2 a}{db^2} \dot{b} \right)^2 \sqrt{1+b^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a'''_{bbb}}{a''_{bb}} + \frac{a''_{bb}}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{(a''_{bb})^3}} \right) \cdot \left( -\sqrt{\frac{1}{a''_{bb}}} \right) = \alpha g a''_{bb} \sqrt{1+b^2} \Leftrightarrow \frac{a'''_{bbb}}{2(a''_{bb})^2} = \alpha g \sqrt{1+b^2}.$$

Обозначив  $f(b) = a''_{bb}$ , получим резольвентное уравнение

$$\frac{f'}{f^2} = 2\alpha g \sqrt{1+b^2}. \quad (1.7)$$

Начальные условия (Н.У.) для первой производной получаются из соотношения (3):  $\frac{da(b_0)}{db} = -\dot{x}(0) = 0$ . Из того же соотношения определится вторая производная:

$$\frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = -\frac{\dot{x}}{\dot{b}} \Leftrightarrow \frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0 \sqrt{\frac{d^2 a(b_0)}{db^2}}}{\sqrt{g(1+b_0)^2}} \Rightarrow \frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2}{g(1+b_0)^2}, \quad V_0 = V(t=0).$$

Таким образом, метод приводит к скалярной задаче Коши для  $a(b)$ :

$$\begin{cases} a'''_{bbb} = 2\alpha g (a''_{bb})^2 \sqrt{1+b^2}, \\ a(b_0) = \frac{da(b_0)}{db} = 0, \\ \frac{d^2 a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} (= \rho_\infty(0) \text{ при } \alpha = 0, \text{ см. далее}). \end{cases} \quad (1.8)$$

Интегрированием с учетом Н.У. получается формула [Routh,1898]

$$a_{bb}''(b) = \frac{V_0^2}{g} \cdot \frac{1}{1+b_0^2 + \alpha V_0^2 \left( b_0 \sqrt{b_0^2+1} + \ln(b_0 + \sqrt{b_0^2+1}) - b \sqrt{b^2+1} - \ln(b + \sqrt{b^2+1}) \right)}, \quad (1.9)$$

(график — рис. 2), а из нее — зависимости для текущих координат и времени:

$$x(b) = -a_b' = -\int_{b_0}^b a_{bb}''(\tilde{b}) d\tilde{b} = -\frac{V_0^2}{g} \cdot \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{1+b_0^2 + \alpha V_0^2 \left( b_0 \sqrt{b_0^2+1} + \operatorname{arcsch}(b_0) - \tilde{b} \sqrt{\tilde{b}^2+1} - \operatorname{arcsch}(\tilde{b}) \right)}, \quad (1.10)$$

$$y(b) = -\int_{b_0}^b \tilde{b} a_{bb}''(\tilde{b}) d\tilde{b} = -\frac{V_0^2}{g} \cdot \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b} d\tilde{b}}{1+b_0^2 + \alpha V_0^2 \left( b_0 \sqrt{b_0^2+1} + \operatorname{arcsch} b_0 - \tilde{b} \sqrt{\tilde{b}^2+1} - \operatorname{arcsch} \tilde{b} \right)}, \quad (1.10')$$

$$t(b) = \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{\tilde{b}(\tilde{b})} = -\frac{V_0}{g} \int_{b_0}^b \frac{db}{\sqrt{1+b_0^2 + \alpha V_0^2 \left( b_0 \sqrt{b_0^2+1} + \operatorname{arcsch} b_0 - \tilde{b} \sqrt{\tilde{b}^2+1} - \operatorname{arcsch} \tilde{b} \right)}}. \quad (1.10'')$$

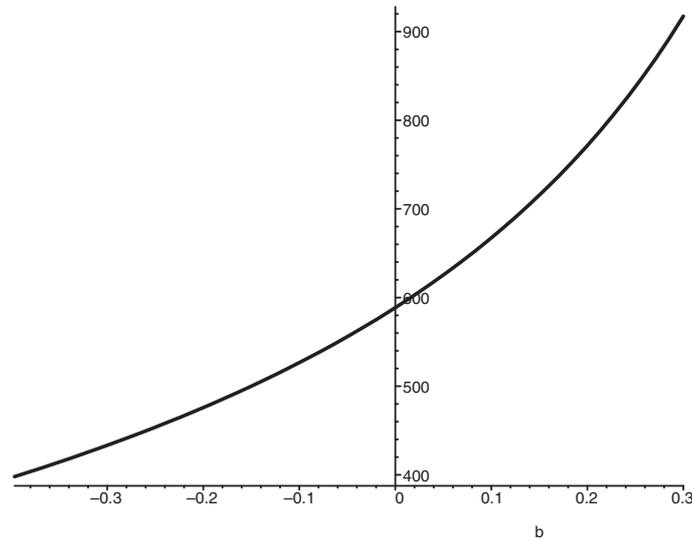


Рис. 2. Полетная зависимость  $a_{bb}''(b)$  /м,  $V_0 = 100$  м/с,  $\alpha = 0,0001$  с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>,  $\theta_0 = \operatorname{arctg} 0,3$  (16,7°)

Также — уравнение эволюты траектории:

$$\begin{cases} X_e(b) = x(b) + a_{bb}''(b) \cdot b(1+b^2), \\ Y_e(b) = y(b) - a_{bb}''(b) \cdot (1+b^2). \end{cases} \quad (1.11)$$

## Замена переменной, ключевые параметры

Введем безразмерный параметр

$$C_0 = 1+b_0^2 + \alpha V_0^2 \left( b_0 \sqrt{b_0^2+1} + \operatorname{arcsch} b_0 \right) = \frac{1}{\cos^2 \theta_0} + \alpha V_0^2 \left( \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{V_0^2}{g \rho_{\frac{1}{\alpha}}(0)}, \quad (2.1)$$

где  $\rho_{\frac{1}{\alpha}}(0) \equiv R_a = \frac{V_0^2}{gC_0}$  — *разворотный* (т. е. относящийся к точке разворота) радиус кривизны траектории, по которому можно определить коэффициент сопротивления  $\alpha = \frac{1}{v_T^2}$ ,  $v_T$  — предельная скорость при вертикальном падении с неограниченной высоты. Этот радиус также равен  $R_a = \frac{V_a^2}{g}$ ,  $V_a$  — *разворотная* скорость, следовательно, константа  $C_0 = \frac{V_0^2}{V_a^2}$  есть отношение начальной энергии к разворотной.

Соотношение (2.1) можно записать также через кривизну траектории  $s_{\frac{1}{\alpha}}(b)$ :

$$s_{\frac{1}{\alpha}}(0) = \frac{1}{R_a} = \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \theta_0} + \left( \frac{g \sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + g \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot \frac{1}{v_T^2} = \frac{1}{\rho_{\infty}(0)} + \frac{G(\theta_0)}{v_T^2}. \quad (2.2)$$

(Напомним: бездиссипативный, минимальный по галилеевской траектории радиус кривизны  $\rho_{\infty}(0)$  равен  $a_{bb}''(b_0)$  (1.8).)

Также введем в рассмотрение величину

$$\beta_0 = \alpha \cdot \frac{V_0^2}{C_0} = \frac{V_a^2}{v_T^2} = w_a^2 = \frac{\alpha V_0^2 \cos^2(\theta_0)}{1 + \alpha V_0^2 \left( \sin \theta_0 + \cos^2(\theta_0) \cdot \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)} < w_0^2 = \alpha V_0^2, \quad (2.3)$$

физический смысл которой есть отношение кинетических энергий — разворотной и предельной при падении с неограниченной высоты, или, что то же самое, квадрат безразмерной разворотной скорости  $w_a$ .

Легко видеть, что при  $\alpha \gg 1$  разворотная скорость практически не зависит от  $V_0$ , но только от угла вылета  $\theta_0$ :

$$\beta_{0\infty} = w_{a\infty}^2 = \frac{1}{\frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}. \quad (2.3')$$

Заменой  $u = \operatorname{arcsch}(b) = \ln(b + \sqrt{b^2 + 1})$  формулы (1.10)–(1.10'') приводятся к

$$x(b) = -R_a \cdot \int_{\operatorname{arcsch}(b_0)}^{\operatorname{arcsch}(b)} \frac{\operatorname{ch}(u) du}{1 - \beta_0 (\operatorname{ch}(u) \operatorname{sh}(u) + u)}, \quad (2.4)$$

$$y(b) = -R_a \cdot \int_{\operatorname{arcsch}(b_0)}^{\operatorname{arcsch}(b)} \frac{\operatorname{sh}(u) \operatorname{ch}(u) du}{1 - \beta_0 (\operatorname{ch}(u) \operatorname{sh}(u) + u)}, \quad (2.4')$$

$$t(b) = -\sqrt{\frac{R_a}{g}} \cdot \int_{\operatorname{arcsch}(b_0)}^{\operatorname{arcsch}(b)} \frac{\operatorname{ch}(u) du}{\sqrt{1 - \beta_0 (\operatorname{ch}(u) \operatorname{sh}(u) + u)}}. \quad (2.4'')$$

(Выделены ключевые параметры.)

## Приближение для углов прицельной стрельбы

Именно такие углы бросания  $\theta_0 < 15^\circ$  представляют наибольшую практическую ценность и позволяют сравнительно точное исследование движения несферических объектов.

Применим к зависимостям (1.10)–(1.10') прием интегрирования по частям:

$$x(b) = - \int_{b_0}^b a_{bb}'' d\tilde{b} = -\tilde{b} a_{bb}'' \Big|_{b_0}^b + \left( \frac{\tilde{b}^2 a_{bbb}'''}{2!} \right) \Big|_{b_0}^b - \left( \frac{\tilde{b}^3 a_{(b)}^{(IV)}}{3!} \right) \Big|_{b_0}^b + \left( \frac{\tilde{b}^4 a_{(b)}^{(V)}}{4!} \right) \Big|_{b_0}^b - \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b}^4 a_{(b)}^{(VI)}}{4!} d\tilde{b}, \quad (3.1)$$

$$y(b) = - \int_{b_0}^b \tilde{b} a_{bb}''(\tilde{b}) d\tilde{b} = - \left( \frac{\tilde{b}^2 a_{bb}''}{2!} \right) \Big|_{b_0}^b + \left( \frac{\tilde{b}^3 a_{bbb}'''}{3!} \right) \Big|_{b_0}^b - \left( \frac{\tilde{b}^4 a_{(b)}^{(IV)}}{4!} \right) \Big|_{b_0}^b + \left( \frac{\tilde{b}^5 a_{(b)}^{(V)}}{5!} \right) \Big|_{b_0}^b - \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b}^5 a_{(b)}^{(VI)}}{5!} d\tilde{b}. \quad (3.1')$$

Выпишем выражение для производной 6-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^6 a}{db^6} &= \frac{d^4 a_{bb}''}{db^4} = 384\alpha^4 g^4 (a'')^5 (1+b^2)^{3/2} + \\ &+ 96\alpha^3 g^3 (a'')^4 b + 96\alpha^3 g^3 (a'')^4 b(1+b^2)^{1/2} + 48\alpha^3 g^3 (a'')^4 b(1+b^2)^{1/2} + \\ &+ 16\alpha^2 g^2 (a'')^3 + 8\alpha^2 g^2 (a'')^3 + 8\alpha^2 g^2 (a'')^3 - \frac{2\alpha g (a'')^2 b}{(1+b^2)^{3/2}} - \\ &- \frac{8\alpha^2 g^2 (a'')^3 b^2}{1+b^2} - \frac{4\alpha g (a'')^2 b}{(1+b^2)^{3/2}} - \frac{6\alpha g (a'')^2 b^3}{(1+b^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Все слагаемые с положительными числовыми коэффициентами в (3.2) растут по аргументу  $b$ , и несложная мажоризация дает

$$\begin{aligned} \max_{b \in [b_0, b_1]} \left| \frac{d^6 a}{db^6} \right| &< \frac{V_0^2}{g(1+b_0^2)} \cdot \left[ 384(1+b_0^2)^{3/2} \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^8 + 96b_0 \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^6 + 144b_0(1+b_0^2)^{1/2} \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^6 + 32 \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^4 + \right. \\ &+ \left. \frac{8b_0^2}{1+b_0^2} \cdot \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^4 + \frac{6b_0}{(1+b_0^2)^{3/2}} \cdot \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^2 + \frac{6b_0^3}{(1+b_0^2)^{5/2}} \cdot \left( \frac{V_0}{v_T} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

В области параметров  $\frac{V_0}{v_T} < 1$ ,  $b_0 < 0,5$  правая часть не превысит величины  $\frac{10^3 V_0^2}{g(1+b_0^2)}$ . Тогда

модуль остаточного члена в (15') оценивается как

$$\begin{aligned} |\delta y| &= \left| \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b}^5 a_{(b)}^{(VI)}}{5!} d\tilde{b} \right| < \frac{10^3 V_0^2}{120g(1+b_0^2)} \cdot \int_{b_0}^b \tilde{b}^5 d\tilde{b} < \frac{10^3 V_0^2 (b^6 - b_0^6)}{720g(1+b_0^2)} = \\ &= \frac{V_0^2 b_0^2}{2g(1+b_0^2)} \cdot \frac{2.78(b^6 - b_0^6)}{b_0^2} = H(\alpha=0) \cdot \frac{2.78(b^6 - b_0^6)}{b_0^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, абсолютная ошибка имеет минимум 6-й порядок малости по тангенсу  $b$  угла наклона вектора скорости к оси  $Ox$ , а относительная — 4-й. Следовательно, для углов прицельной стрельбы с хорошей степенью точности можно пользоваться приближением, получаемым из (3.1') отбрасыванием интегрального остатка.

**а) Угол приземления**

Эта характеристика определяет все важное: дальность полета и конечную скорость снаряда  $V_1$  и пр., и сама зависит от безразмерной скорости вылета  $w_0$  и тангенса угла  $b_0$ .

Разложим (3.1') в ряд Маклорена по величине  $b$  до 6-го порядка и преобразуем с использованием формул для разности одинаковых степеней:

$$\begin{aligned}
 y(b) \approx -(b - b_0) \cdot & \left[ \left( \frac{a_{(b)}^{(VI)}}{144} \right) \cdot b^5 + \left( \frac{a_{(b)}^{(VI)} b_0}{144} + \frac{a_{(b)}^{(V)}}{30} \right) \cdot b^4 + \left( \frac{a_{(b)}^{(VI)} b_0^2}{144} + \frac{a_{(b)}^{(V)} b_0}{30} + \frac{a_{(b)}^{(IV)}}{8} \right) \cdot b^3 + \right. \\
 & + \left( \frac{a_{(b)}^{(VI)} b_0^3}{144} + \frac{a_{(b)}^{(V)} b_0^2}{30} + \frac{a_{(b)}^{(IV)} b_0}{8} + \frac{a_{bbb}^{(III)}}{3} \right) \cdot b^2 + \left( \frac{a_{(b)}^{(VI)} b_0^4}{144} + \frac{a_{(b)}^{(V)} b_0^3}{30} + \frac{a_{(b)}^{(IV)} b_0^2}{8} + \frac{a_{bbb}^{(III)} b_0}{3} + \frac{a_{bb}^{(II)}}{2} \right) \cdot b + \\
 & \left. + \left( \frac{a_{(b)}^{(VI)} b_0^5}{144} + \frac{a_{(b)}^{(V)} b_0^4}{30} + \frac{a_{(b)}^{(IV)} b_0^3}{8} + \frac{a_{bbb}^{(III)} b_0^2}{3} + \frac{a_{bb}^{(II)} b_0}{2} \right) \right]. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Достаточно точная формула для наклона приземления ( $b_1 = \text{tg } \theta_1 < 0$ ) получается методом неопределенных коэффициентов (МНК), т. е. поиском  $b_1(b_0) = C_1 b_0 + C_2 b_0^2 + C_3 b_0^3 + \dots$ ,

$$b_1(b_0) = -b_0 - \frac{4\beta_0}{3} b_0^2 - \frac{16\beta_0^2}{9} b_0^3 - \left( \frac{2\beta_0}{15} + \frac{352\beta_0^3}{135} \right) b_0^4. \tag{3.4}$$

Так как все слагаемые в (3.4) одного знака, то отношение последнего члена к первому, меньше 1:100, можно, с оговорками, принять за условие точности порядка 1 %. На плоскости  $(b_0, w_0^2)$  это область под кривой (рис. 4,а), уравнение которой определяется таким соотношением членов в (3.4). Немного иным образом — по величине  $100\% \frac{y(b_1)}{b_1 L}$ , оценивается точность для дальности полета (рис. 4,б).

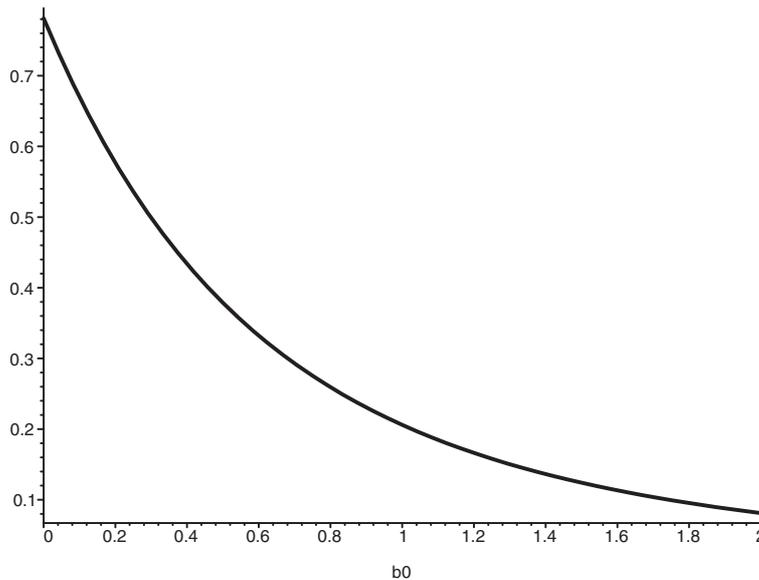


Рис. 3. Квадрат безразмерной разворотной скорости  $\beta_0(b_0)$ ,  $\alpha V_0^2 = 0.781$

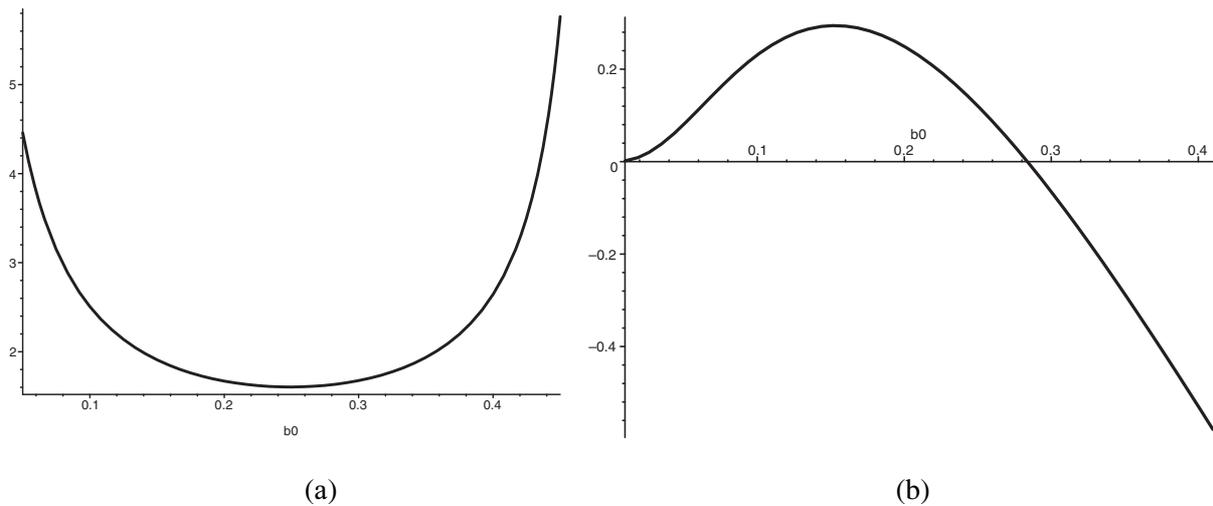


Рис. 4. Граница предполагаемой области 1%-й точности для (18) на плоскости  $(b_0, w_0^2)$  (а) и примерная погрешность в дальности за счет неточности в  $b_1$  (3.4) —  $100\% \frac{y(b_1)}{b_1 L}$  в зависимости от  $b_0 = 0.01 \dots 0.41$  при  $w_0^2 = 2.5$  (б)

Кривые демонстрируют интересный эффект автоподстройки точности вне области прицельной стрельбы за счет опережающего падения (рис. 3) параметра  $\beta_0(b_0)$  по сравнению с ростом начального наклона  $b_0$ .

### б) Длина траектории, контроль точности

Метод дает выражение в элементарных функциях для длины траектории [Tan et al., 1987]:

$$\Lambda = \int_{b_0}^{b_1} dx(b) \sqrt{1+b^2} = -\frac{V_0^2}{g} \cdot \int_{b_0}^b \frac{\sqrt{\tilde{b}^2 + 1} d\tilde{b}}{1+b_0^2 + \alpha V_0^2 (b_0 \sqrt{b_0^2 + 1} + \operatorname{arcsinh} b_0 - \tilde{b} \sqrt{\tilde{b}^2 + 1} - \operatorname{arcsinh} \tilde{b})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{1}{2g\alpha} \cdot \ln \left| 1 + \frac{\alpha V_0^2 (b_0 \sqrt{b_0^2 + 1} + \operatorname{arcsinh} b_0 - b_1 \sqrt{b_1^2 + 1} - \operatorname{arcsinh} b_1)}{1+b_0^2} \right|,$$

которое использовалось для контроля точности вычислений в Maple схожих неберущихся интегралов (1.10)–(1.10''). Так, например, при  $\theta_0 = 40^\circ$ ,  $V_0 = 50$  м/с и  $\alpha V_0^2 = 1.37$  численным интегрированием получалось значение длины  $\Lambda_{\text{инт}} = 125.1072793$  м, и столько же давала подстановка исходных параметров в нижнюю формулу —  $\Lambda = 125.1072793$ . При иных значениях параметров,  $\alpha V_0^2 = 2.028$ ,  $\theta_0 = \operatorname{arctg} 0.3$ ,  $V_0 = 130$  м/с, и при пренебрежимо малой модификации показателя степени в подынтегральной функции  $b^2 \rightarrow |b|^{2.0001}$  (во избежание возможного использования программой формулы Ньютона–Лейбница) отличие вполне объяснимо наблюдалось в третьем-четвертом знаке после запятой: 577.8100 и 577.8116.

Поэтому нет основания полагать, что отсутствие/присутствие в (1.10)–(1.10'') медленно меняющихся множителей типа  $\sqrt{\tilde{b}^2 + 1}$ ,  $\tilde{b}$  (или  $\tilde{b} \sqrt{\tilde{b}^2 + 1}$ , превращающего интеграл (1.10''))

для  $t(b)$  в берущийся) может радикально ухудшить точность вычисления интегралов в Maple: она идеальная.

Что же касается погрешности верхнего предела в интегральных формулах, то она не превышала  $|\delta b_1/b_1| < 0,05\%$ , что устанавливалось визуализацией сверхузкого финального участка кривой  $y(b)$  (1.10').

**в) Высота**

Высота траектории получается подстановкой в (3.1') значения  $b = 0$ :

$$H = \frac{b_0^2 a_{bb}''(b_0)}{2!} - \frac{b_0^3 a_{bbb}'''(b_0)}{3!} + \frac{b_0^4 a_{(b)}^{(IV)}(b_0)}{4!} - \frac{b_0^5 a_{(b)}^{(V)}(b_0)}{5!} + \frac{b_0^6 a_{(b)}^{(VI)}(b_0)}{6!} - \int_{b_0}^0 \frac{\tilde{b}^6 a_{(\tilde{b})}^{(VII)}}{6!} d\tilde{b}. \quad (3.5)$$

Аналогично разложением производных в ряд Маклорена получается

$$H(b_0, \beta_0, V_0) \approx \frac{R_a b_0^2}{2} \cdot \left\{ 1 + \frac{4}{3} \beta_0 b_0 + 2 \beta_0^2 b_0^2 + \frac{2(\beta_0 + 24\beta_0^3)}{15} b_0^3 + \frac{2(2\beta_0^2 + 32\beta_0^4)}{15} b_0^4 \right\}. \quad (3.6)$$

Погрешности полученного приближения при  $V_0 = 50$  м/с,  $\alpha = 0.0004$  с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>, т. е.  $w_0^2 = \alpha V_0^2 = 1.0$  — равенстве начального сопротивления весу, приведены в таблице 1, и они подтверждают качественно аналогичные оценки для границы области однопроцентной точности.

**г) Абсцисса вершины**

Аналогично, проинтегрировав еще раз в (15) и разложив в ряд Маклорена, получим приближенное выражение для абсциссы наивысшей точки траектории:

$$L_a = x(0) \approx b_0 a_{bb}''(0) + \frac{b_0^2 a_{bbb}'''(0)}{2} + \frac{b_0^3 a_{(b)}^{(IV)}(0)}{6} + \frac{b_0^4 a_{(b)}^{(V)}(0)}{24} + \frac{b_0^5 a_{(b)}^{(VI)}(0)}{120}. \quad (3.7)$$

Подстановка значений производных дает

$$L_a(b_0, \beta_0, V_0) \approx R_a \cdot \left\{ \frac{b_0 + \beta_0 b_0^2 + \frac{4}{3} \beta_0^2 b_0^3 + \frac{(\beta_0 + 24\beta_0^3)}{12} b_0^4 + \frac{(4\beta_0^2 + 48\beta_0^4)}{15} b_0^5}{2} \right\}. \quad (3.8)$$

Из всех характеристик движения параметр  $L_a$  — повсеместно проблемный, и уже при  $\alpha V_0^2 = 1$  погрешность (3.8) быстро выходит за 1% на малых углах бросания порядка 10°, но не отклоняется значительно от 1.3–1.5% на углах порядка 28–36°. Эту проблемность подтверждает также аналогичная оценка границы области 1%-й точности, не позволяющая  $\alpha V_0^2 > 1$  для  $b > 0.3$ .

**д) Дальность полета**

Приближение для этого важного параметра выводится через использование (3.8) и приема обращения времени:

$$L = L_a(b_0, \beta_0, V_0) + L_a(b_1, -\beta_0, V_1) \approx (b_0 - b_1) a_{bb}''(0) + \frac{(b_0^2 - b_1^2) a_{bbb}'''(0)}{2} + \frac{(b_0^3 - b_1^3) a_{(b)}^{(IV)}(0)}{6} + \frac{(b_0^4 - b_1^4) a_{(b)}^{(V)}(0)}{24} + \frac{(b_0^5 - b_1^5) a_{(b)}^{(VI)}(0)}{120}.$$

( $V_1$  — конечная скорость, она же начальная при обращении времени.)

Подстановка  $b_1(b_0)$  (3.4) дает с точностью до членов 5-го порядка

$$L(b_0, \beta_0, V_0) \approx R_a \cdot \left\{ 2b_0 + \frac{4\beta_0}{3} b_0^2 + \frac{16\beta_0^2}{9} b_0^3 + \left( \frac{2\beta_0}{15} + \frac{712\beta_0^3}{135} \right) b_0^4 + \left( -\frac{4\beta_0^2}{9} + \frac{484\beta_0^4}{45} \right) b_0^5 \right\}. \quad (3.9)$$

Для суммы  $L_a(b_0, \beta_0, V_0)$  и  $L_a(b_1, -\beta_0, V_1)$  можно ожидать компенсацию систематических ошибок ее слагаемых и, следовательно, более высокую точность, нежели для членов в отдельности. Расчеты по (3.9) показывают для характерного значения  $\alpha V_0^2 = 1$  хорошую точность дальности в широком диапазоне углов (табл. 1), которая тем не менее ведет себя не монотонно, обнаруживая корреляцию с выводами оценочной процедуры по методу «1:100».

Таблица 1. Точность вычисления параметров траектории для различных углов вылета  $\theta_0$  при  $V_0 = 50$  м/с,  $\alpha = 0.0004$  с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>

$tg\theta_0$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
$\Delta H, м$	$-2 \cdot 10^{-6}$	-0.0001	-0.0009	-0.039	-0.011
$\delta H, \%$	-0.0007	-0.0086	-0.035	-0.089	-0.17
$\Delta T, с$	$-5 \cdot 10^{-6}$	$-3 \cdot 10^{-5}$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.0005	-0.0011
$\delta t, \%$	-0.001	$-3 \cdot 10^{-3}$	-0.010	-0.024	-0.048
$\Delta L, м$	0.0014	0.027	0.08	0.172	0.263
$\delta L, \%$	0.006	0.060	0.127	0.218	0.284
$\Delta L_{пр}, м$	0.006	0.042	0.106	0.174	0.239
$\delta L_{пр}, \%$	0.025	0.094	0.168	0.221	0.259
$tg\theta_0$	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$\Delta H, м$	-0.0255	-0.049	-0.083	-0.128	-0.185
$\delta H, \%$	-0.284	-0.421	-0.576	-0.742	-0.910
$\Delta T, с$	-0.002	-0.004	-0.006	-0.009	-0.013
$\delta t, \%$	-0.084	-0.13	-0.186	-0.250	-0.320
$\Delta L, м$	0.312	0.295	0.265	0.352	0.271
$\delta L, \%$	0.332	0.289	0.242	0.272	0.200
$\Delta L_{пр}, м$	0.283	0.307	0.293	0.263	0.204
$\delta L_{пр}, \%$	0.272	0.269	0.239	0.203	0.151

Достоинно внимания то, что в третьем порядке по  $b_0$  формула принимает простой вид:

$$L_3 \approx R_a(b_0 - b_1), \quad (3.10)$$

при этом демонстрируя в широком интервале параметров  $b_0$  и  $w_0^2$  чрезвычайно высокую точность (табл. 2), но только при подстановке не приближенного (3.4), а точного значения наклона приземления  $b_1$ . Потому ее можно вписать в актив высокоточных соотношений между параметрами траектории.

Показатель асимметрии последней определится примерно как

$$\frac{L - L_a}{L_a} \approx \frac{\frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}\left(b_0 + \beta_0 b_0^2 + \frac{4\beta_0^2}{3}b_0^3\right)}{b_0 + \beta_0 b_0^2 + \frac{4\beta_0^2}{3}b_0^3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \beta_0 b_0 + \frac{4\beta_0^2}{3}b_0^3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{R_a b_0}{L_a}. \quad (3.11)$$

**е) Время полета**

Применим для (1.10'') тот же прием с интегрированием по частям:

$$t(b) = \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{\tilde{b}(\tilde{b})} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \int_{b_0}^b \sqrt{a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}} d\tilde{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ -\tilde{b} \sqrt{a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}} \Big|_{b_0}^b + \left( \frac{\tilde{b}^2}{2!} \cdot \frac{a_{\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}}{2\sqrt{a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}}} \right) \Big|_{b_0}^b - \left( \frac{\tilde{b}^3}{3!} \cdot \left( \frac{a_{\tilde{b}}^{(iv)}}{2\sqrt{a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}}} - \frac{(a_{\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)})^2}{4(a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)})^{3/2}} \right) \right) \Big|_{b_0}^b + \left( \frac{\tilde{b}^4}{4!} \cdot \left( \frac{a_{\tilde{b}}^{(v)}}{2\sqrt{a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}}} - \frac{3a_{\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)} \cdot a_{\tilde{b}}^{(iv)}}{4(a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)})^{3/2}} - \frac{3(a_{\tilde{b}\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)})^3}{8(a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)})^{5/2}} \right) \right) \Big|_{b_0}^b - \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b}^4}{4!} \frac{d^6(\sqrt{a_{\tilde{b}\tilde{b}}^{(v)}})}{d\tilde{b}^6} d\tilde{b} \right\}.$$

Последующим разложением в ряд Маклорена до  $n = 4$ -го порядка, получаем

$$t(b) \approx \frac{V_0}{g\sqrt{C_0}} \left\{ b_0 - b + \beta_0 \cdot \frac{b_0^2 - b^2}{2} + \beta_0^2 \cdot \frac{b_0^3 - b^3}{2} + (\beta_0 + 9\beta_0^3) \cdot \frac{b_0^4 - b^4}{24} \right\}, \tag{3.12}$$

$$T \approx \sqrt{\frac{R_a}{g}} \left\{ 2b_0 + \frac{4\beta_0}{3} \cdot b_0^2 + \frac{13\beta_0^2}{9} \cdot b_0^3 + \left( \frac{2\beta_0}{15} + \frac{134\beta_0^3}{45} \right) \cdot b_0^4 \right\}. \tag{3.12'}$$

При  $w_0^2 = \alpha V_0^2 < 1.5$  в прицельной области формулы (3.12)–(3.12') дают аномально малые ошибки во времени  $t(b)$  и продолжительности  $T$  полета, являя тем самым лучшую точность из всех приближенных (табл. 1, 2, рис. 5). Даже при 2.5-кратном превосходстве стартового сопротивления над весом конечная погрешность  $T$  на границе прицельной стрельбы составила всего  $-0.53\%$ . (Однако при этом для времени взлета  $t(0)$  выражение (3.12) дает значительную погрешность  $-1.28\%$ , подтверждая тем самым тезис о компенсации ошибок на участках взлета и падения.)

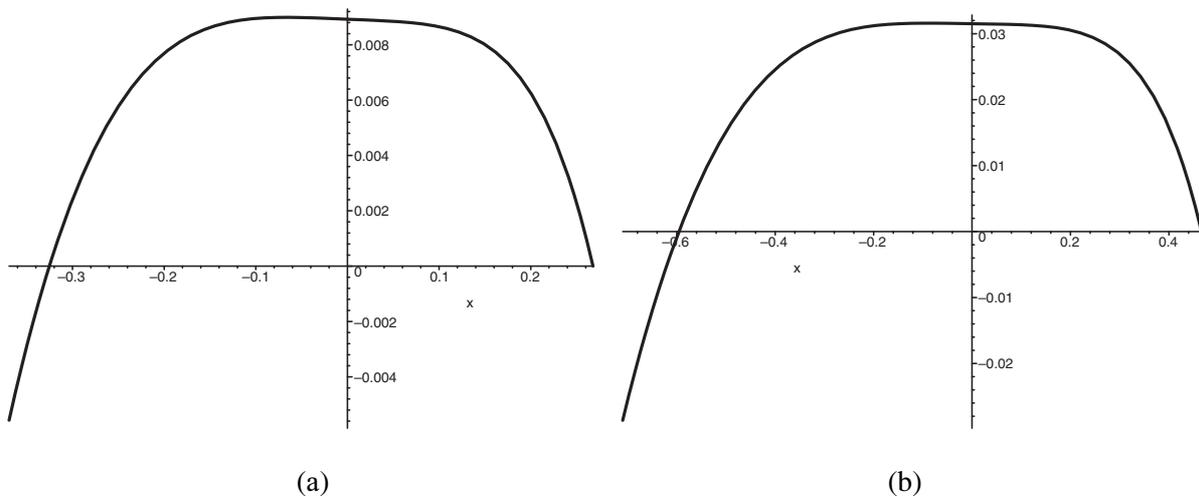


Рис. 5. Полетное расхождение между точным (1.10'') и приближенным (3.12) временами  $t(b)/c$ :  $V_0 = 50$  м/с,  $\alpha = 0.000548$   $c^2/m^2$  — а)  $\theta_0 = 15^\circ$ ,  $T = 2.389$  с; б)  $\theta_0 = 25^\circ$ ,  $T = 3.723$  с

В итоге можно считать, что интегрирование по частям и разложение до 4-го порядка оправданы, и формулы (3.12)–(3.12') также могут быть вписаны в упомянутый ранее актив.

### ж) Уравнение траектории

Его полиномиальная аппроксимация получается стандартно: а) разлагается в ряд Маклорена выражение для  $x(b)$  (15); б) обратная функция  $b(x) = b_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$  находится при помощи МНК из условия  $b(x(b)) \equiv 0 + 1 \cdot b + 0 \cdot b^2 + \dots$ ; в)  $b(x)$  интегрируется.

Так выводится простейшее ( $n = 3$ ) уравнение

$$y_3(x) = b_0x + \left( \frac{1}{2R_a} - \frac{b_0}{L_a} \right) \cdot x^2 + \left( \frac{b_0}{3L_a^2} - \frac{1}{3L_aR_a} \right) \cdot x^3, \quad (3.13)$$

( $L_a$  определяется по (3.8)), обеспечивающее а) обращение ординаты в нуль на старте, б) верный угол бросания, в) максимум ординаты при  $x = L_a$ , равный

$$H = y(L_a) = \frac{L_a^2}{6R_a} + \frac{b_0L_a}{3}, R_a = \frac{V_0^2}{g \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta_0} + \alpha V_0^2 \left( \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]}, \quad (3.14)$$

а также г) верную разворотную кривизну  $s_a = 1/R_a$  и д) галилеевскую орбиту при  $\alpha = 0$ .

Такое качественное согласие дает точную формулу для дальности полета (табл. 1):

$$L_{tr} \approx \frac{3b_0L_aR_a - 1.5L_a^2 - 3L_a \sqrt{\frac{L_a^2}{4} + \frac{b_0L_aR_a}{3} - \frac{b_0^2R_a^2}{3}}}{2(b_0R_a - L_a)}, \quad (3.15)$$

с абсциссой вершины, получаемой из (3.13)

$$L_a^{pp} = -b_0R_a + \sqrt{b_0^2R_a^2 + 6R_aH}, \quad (3.15')$$

Определив по (3.6) ключевую характеристику — высоту траектории  $H$ , можно средствами элементарной математики и с хорошей точностью найти дальность полета  $L$  по (3.15)–(3.15').

Эта хорошая точность не исчезает, даже если погрешность высоты перешагнет за 1 %. Так, при  $\alpha V_0^2 = 1$ ,  $\theta_0 = \operatorname{arctg} 0.55 \approx 28.8^\circ$  погрешности составили —  $\delta H = -1.08\%$ ,  $\delta L_{tr} = 0.10\%$ . А при  $\theta_0 = \operatorname{arctg} 0.60 \approx 30.96^\circ$  погрешность практически исчезла, составив всего  $\delta L_{tr} = 0.04\%$  при  $\delta H = -1.26\%$ . (Но при увеличении сопротивления до  $\alpha V_0^2 = 1.5$  погрешность возросла до  $\delta L_{tr} = +0.64\%$ .)

Так же при  $\alpha V_0^2 = 1$  на углах бросания  $\theta_0 > 30^\circ$  восстанавливается точность определения дальности и абсциссы по (3.8) и (3.9). При  $\theta_0 = 35^\circ$  их погрешности составили  $-0.23\%$  и  $0.46\%$  соответственно, что связано все с тем же эффектом автоподстройки точности.

Недостаточная точность (чуть не дотягивающая до 1 % при  $\alpha V_0^2 = 1$  в интервале углов  $\theta_0 = 26\text{--}30^\circ$ ) остается только у одного параметра — абсциссы вершины  $L_a$ . Но в области углов бросания, меньших  $15^\circ$ , она составляет  $+0.94\%$  по (3.8) и  $-0.45\%$  по (3.15').

В целом, в малоугловой области отклонение приближенной траектории (3.13) от истинной больше, чем у удачных интерполяционных формул, например у универсальной ([Чудинов, 2009]),

$$y(x) = \frac{Hx(L-x)}{L_a^2 + (L-2L_a)x}, \quad (3.16)$$

с параметрами, определенными по интегральным формулам (1.10)–(1.10'), а не простым ((2) там же), но с большей погрешностью, нежели по аппроксимациям (3.6), (3.8), (3.9), (3.12'), (3.15) и (3.15') (табл. 2).

Таблица 2. Результаты расчета параметров по различным формулам

Начальные условия	Параметры траектории	(1.10)–(1.10'')	(3.6), (3.9)/(3.15)/(3.10), (3.8)/(3.15'), (3.12')	[Чудинов, 2009]
$b_0 = 0.268$ (15°), $V_0 = 50$ м/с, ( $\alpha V_0^2 = 1.37$ )	$H, м$	7.039	7.006	7.252
	$L/L_1/L_3, м$	89.50	89.34/89.74/89.55	90.26
	$L_a/L_a^{np}, м$	48.33	47.96/47.92	49.42
	$T, с$	2.389	2.385	2.431
$b_0 = 0.466$ (25°), $V_0 = 50$ м/с, ( $\alpha V_0^2 = 1.37$ )	$H, м$	17.14	16.87	17.63
	$L/L_1/L_3, м$	118.63	118.77/118.53/118.97	118.99
	$L_a/L_a^{np}, м$	65.66	64.95/64.33	67.11
	$T, с$	3.721	3.701	3.793
$b_0 = 0.268$ $V_0 = 100$ м/с, ( $\alpha V_0^2 = 1.0$ )	$H, м$	29.48	29.42	30.24
	$L/L_1/L_3, м$	387.48	387.18/388.51/387.59	390.86
	$L_a/L_a^{np}, м$	206.0	205.28/205.07	210.01
	$T, с$	4.894	4.891	4.966
$b_0 = 0.466$ $V_0 = 100$ м/с, ( $\alpha V_0^2 = 1.0$ )	$H, м$	73.04	72.46	75.07
	$L/L_1/L_3, м$	526.32	527.62/527.31/527.26	529.72
	$L_a/L_a^{np}, м$	285.96	284.56/282.81	292.13
	$T, с$	7.691	7.668	7.824

Таким образом, предложенный подход дает чрезвычайно точные прикладные формулы и соотношения при малых углах бросания ( $\text{tg}\theta_0 < 0.47$ ) и/или малых разворотных скоростях ( $\beta_0 = V_a^2/v_T^2 < 0.7-1.4$ ). Также метод может быть применен в малоугловой области для иного закона сопротивления, «закона 3/2-х», двучленного и т. д.

## Список литературы

- Leonard Euler.* Recherches sur la veritable courbe que décrivent les corps jettés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque, *Memoires de l'academie des sciences de Berlin.* 9 (1755). Pp. 321–352.
- Lung-Ming Chen, Yi-Hsiang Pan and Yung-Jen Chen.* A study of shuttlecock's trajectory in badminton, *Journal of Sports Science and Medicine.* No. 8. 2009. Pp. 657–662; <http://www.jssm.org/vol8/n4/23/v8n4-23pdf.pdf>
- Paul Weinacht, Gene R. Cooper and James F. Newill.* Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions, Army Research Laboratory Report / <http://www.arl.army.mil/arlreports/2005/ARL-TR-3567.pdf>.
- G. Edgar Parker and James S. Sochacki.* Implementing the Picard Iteration, *Neural, Parallel, and Scientific Computations.* 4 (1996). Pp. 97–112.
- A. Tan, C. H. Frick, O. Castillo.* The fly ball trajectory: An older approach revisited, *Am. J. Phys.* Vol. 55. No. 1. 1987. Pp. 37–40.
- Чудинов П. С.* Численно-аналитический алгоритм построения огибающей траектории снарядов в воздухе. // Вестник Пермского университета. Сер. Математика, Механика. Вып. 7(33). 2009. С. 90–94.



