**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 1 С. 255–264**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.5

Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными методами

О. А. Новиков[1,a], О. Г. Ровенская[2]

[1] Славянский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, г. Славянск, ул. Г. Батюка, д. 19
[2] Донбасская государственная машиностроительная академия,
Украина, 84313, г. Краматорск, ул. Шкадинова, д. 72

E-mail: [a] o.rovenskaya@mail.ru

Получено 25 мая 2011 г.

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах периодических функций двух переменных высокой гладкости. Эти соотношения в некоторых важных случаях обеспечивают решение известной задачи Колмогорова–Никольского для прямоугольных сумм Валле Пуссена и указанных классов функций.

Ключевые слова: (ψ,β)-производная, прямоугольные суммы Валле Пуссена, задача Колмогорова–Никольского

Approximation of the periodical functions of hight smoothness by the right-angled linear methods

O. A. Novikov[1], **O. G. Rovenska**[2]

[1] *Slavyansk State Pedagogical University, G. Batyuk st. 19, Slavyansk, 84116, Ukraine*
[2] *Donbass State Engineering Academy, Shkadinova st. 72, Kramatorsk, 84313, Ukraine*

Abstract. — We obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of the right-angled de la Vallee Poussin sums taken over classes of periodical functions of two variables of high smoothness. These equalities guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skii problem for the right-angled de la Vallee Poussin sums on the specified classes of functions.

Keywords: (ψ,β) -derivative, the right-angled de la Vallee Poussin sums, Kolmogorov–Nikol'skiy problem.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 255–264 (Russian).

Введение

Следуя работе [Степанец, Пачулиа, 1991], классы (ψ,β)–дифференцируемых периодических функций двух переменных, позволяющие учитывать по отдельности свойства обыкновенных и смешанных частных производных, будем задавать следующим образом.

Пусть R^2 — евклидово пространство с элементами $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $T^2=[-\pi;\pi]^2$ — квадрат со стороной 2π,

$$N^2=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in N, i=1;2\},$$
$$N_*^2=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in N_*=N\cup\{0\}, i=1;2\},$$
$$N_i^2=\{\vec{x}\in R^2 \mid x_i\in N, x_j\in N_*, i\neq j\}.$$

Через $L(T^2)$ обозначим множество 2π -периодических по каждой переменной суммируемых на квадрате T^2 функций $f(\vec{x})=f(x_1,x_2)$.

Пусть $f\in L(T^2)$. Каждой паре точек $\vec{s}\in\{0,1\}^2\subset R^2$, $\vec{k}\in N_*^2$ поставим в соответствие величину

$$a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)=\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} f(x_1,x_2)\cos(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2})dx_1dx_2.$$

Величины $a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)$, $\vec{s}\in\{0,1\}^2$, $\vec{k}\in N_*^2$ являются коэффициентами Фурье функции $f(\vec{x})$ [Степанец, Пачулиа, 1991].

Каждому вектору $\vec{k}\in N_*^2$ поставим в соответствие гармонику

$$A_{\vec{k}}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in\{0,1\}^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2})$$

и величины

$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_1}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in\{0,1\}^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos(k_1x_1-(s_1+1)\frac{\pi}{2})\cos(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2}),$$
$$A_{\vec{k}}^{\vec{e}_2}(f;\vec{x})=\sum_{\vec{s}\in\{0,1\}^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2-(s_2+1)\frac{\pi}{2}),$$

которые являются гармониками, сопряжёнными с $A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$ соответственно по переменным x_1 и x_2.

Следуя [Степанец, Пачулиа, 1991], ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ определим следующим соотношением:

$$S[f]=\sum_{\vec{k}\in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})}\sum_{\vec{s}\in\{0,1\}^2} a_{\vec{k}}^{\vec{s}}(f)\cos(k_1x_1-\frac{s_1\pi}{2})\cos(k_2x_2-\frac{s_2\pi}{2})=\sum_{\vec{k}\in N_*^2} 2^{-q(\vec{k})}A_{\vec{k}}(f;\vec{x}),$$

где $q(\vec{k})$ — количество нулевых координат вектора $\vec{k}$.

Пусть $f\in L(T^2)$ и фиксированные пары систем чисел $\overline{\psi}_i(k)=(\psi_{i1}(k);\psi_{i2}(k))$, $\overline{\Psi}_i(k)=(\Psi_{i1}(k);\Psi_{i2}(k))$, $i=1;2$, $k\in N_*$, удовлетворяют условиям

$$\psi_{i1}^2(k)+\psi_{i2}^2(k)\neq 0,\ \Psi_{i1}^2(k)+\Psi_{i2}^2(k)\neq 0,$$

$$\psi_{i1}(0)=1,\ \Psi_{i1}(0)=1,\ \psi_{i2}(0)=0,\ \Psi_{i2}(0)=0,\ i=1;2.$$

Пусть, далее, ряд

$$\sum_{\vec{k}\in N_i^2} 2^{-q(\vec{k})} \frac{\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})-\psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{e_i}(f;\vec{x})}{\psi_{i1}^2(k_i)+\psi_{i2}^2(k_i)}$$

является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^2)$. Обозначим ее символом $f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})=\frac{\partial^{\overline{\psi}_i} f(\vec{x})}{\partial x_i}$ и назовем частной $\overline{\psi}_i$-производной функции $f(\vec{x})$ по переменной x_i, $i=1;2$. Смешанной $\overline{\Psi}$-производной по переменным x_i, $i=1;2$, по аналогии с определением обыкновенной смешанной частной производной, будем называть функцию $f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})$, рядом Фурье которой является результат последовательного применения вышеуказанной формулы, но с использованием вместо систем чисел $\overline{\psi}_i(k)=(\psi_{i1}(k);\psi_{i2}(k))$, соответственно $\overline{\Psi}_i(k)=(\Psi_{i1}(k);\Psi_{i2}(k))$, $i=1;2$,

$$f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})=\frac{\partial^{\overline{\Psi}_2}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{\overline{\Psi}_1} f(\vec{x})}{\partial x_1}\right).$$

Поскольку существование обычных частных производных по каждой переменной x_i, $i=1;2$, в общем случае не гарантирует существования смешанной производной по этим переменным, то будем считать, что выполняются условия

$$\psi_{ij}(k)=O(1)\Psi_{ij}(k),\ k\to\infty,\ i=1;2,\ j=1;2.$$

Для заданного набора функций ψ_{ij}, Ψ_{ij}, $i=1;2$, $j=1;2$, символом $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ принято обозначать множество непрерывных функций $f\in L(T^2)$, имеющих почти везде ограниченные в смысле плоской меры $\overline{\Psi}$- и $\overline{\psi}_i$-производные

$$\operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\Psi}}(\vec{x})|\le 1,\ \operatorname{ess\,sup}|f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x})|\le 1,\ i=1;2,\ \vec{x}\in T^2.$$

Изучению аппроксимативных свойств этих классов посвящены работы [Степанец, Пачулиа, 1991; Рукасов и др., 2007].

Если для наборов функций $\psi_{ij}(k)$ и $\Psi_{ij}(k)$, $i=1;2$, $j=1;2$, определяющих класс $C_\infty^{2\overline{\psi}}$, существуют функции $\psi_i(k)$, $\Psi_i(k)$ и числа β_i, $\beta_i^*\in R$, $i=1;2$, такие, что

$$\psi_{i1}(k)=\psi_i(k)\cos\frac{\beta_i\pi}{2},\ \psi_{i2}(k)=\psi_i(k)\sin\frac{\beta_i\pi}{2},$$

$$\Psi_{i1}(k)=\Psi_i(k)\cos\frac{\beta_i^*\pi}{2},\ \Psi_{i2}(k)=\Psi_i(k)\sin\frac{\beta_i^*\pi}{2},$$

то $C_\infty^{2\overline{\psi}}$ является классом (ψ,β)-дифференцируемых функций. Будем обозначать такие классы $C_{\beta,\infty}^{2\psi}$. Если, кроме того, для чисел $r>0$, $s>0$, $r_1\ge r$, $s_1\ge s$ выполнены условия $\Psi_1(k)=k^{-r}$, $\Psi_2(k)=k^{-s}$, $\psi_1(k)=k^{-r_1}$, $\psi_2(k)=k^{-s_1}$, $\beta_1=r$, $\beta_1^*=s$, $\beta_2=r_1$, $\beta_2^*=s_1$, то классы $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ совпадают с классами $W^{r,s}_{r_1,s_1}$. В работе [Степанец, 1973] изучены вопросы приближения классов $W^{r,s}_{r_1,s_1}$ прямоугольными суммами Фурье

$$S_{\vec{n}}(f;\vec{x}) = S_{n_1,n_2}(f;\vec{x}) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1} 2^{-q(\vec{k})} A_{\vec{k}}(f;\vec{x}).$$

Там же для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$, взятых по классам $W^{r,s}_{r_1,s_1}$, получено асимптотическое равенство при $n_i \to \infty,\ i = 1;2,$

$$E(W^{r,s}_{r_1,s_1};S_{\vec{n}}) = \frac{4\ln n_1}{\pi^2 n_1^{r_1}} + \frac{4\ln n_2}{\pi^2 n_2^{s_1}} + O(1)\left(\frac{\ln n_1 \ln n_2}{n_1^r n_2^s} + \frac{1}{n_1^{r_1}} + \frac{1}{n_2^{s_1}}\right).$$

В случае, когда функции, задающие класс, определяются соотношениями $\psi_i(x) = q_i^x$, $\Psi_i(x) = Q_i^x,\ i = 1;2,$ классы $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$, по аналогии с классами функций одной переменной, обозначаются $C^{2q}_{\beta,\infty}$. В работах [Рукасов, Новиков, Бодрая, 2007; Рукасов, Новиков, Ровенская, 2008] рассмотрены вопросы приближения этих классов прямоугольными суммами Фурье $S_{\vec{n}}(f;\vec{x})$ и прямоугольными суммами Валле Пуссена, определяемые равенством

$$V_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x}) = \frac{1}{p_1 p_2}\sum_{k=n_1-p_1}^{n_1-1}\sum_{k_2=n_2-p_2}^{n_2-1} S_{k_1,k_2}(f;\vec{x}), \tag{1}$$

$$\vec{n} \in N^2,\ p_i \in N,\ p_i < n_i,\ i = 1;2.$$

В работе [Рукасов, Новиков, Ровенская, 2008] для верхних граней уклонений прямоугольных сумм Валле Пуссена на классах $C^{2q}_{\beta,\infty}$ получена асимптотическая формула при $n_i \to \infty$, $i = 1;2,$

$$E(C^{2q}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}}) = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(1-q_i^2)} + O(1)\Bigg(\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{p_i(n_i-p_i)(1-q_i)^3} +$$

$$+\sum_{i=1;2}\frac{q_i^{n_i+1}}{p_i(1-q_i^2)} + \prod_{j=1;2}\frac{Q_j^{n_j-p_j+1}}{p_j(1-Q_j^2)}\Bigg).$$

Обозначим через D_q множество последовательностей $\psi(k),\ k \in N,$ для которых выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q,\ q \in (0;1).$$

Для верхних граней уклонений сумм Фурье на соответствующих классах функций одной переменной $C^{\psi}_{\beta,\infty},\ \psi(k) \in D_q$ в работе [Степанец, Сердюк, 2000] было получено при $n \to \infty$ асимптотическое равенство

$$E(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_n) = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right),$$

где

$$K(q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}},\ \varepsilon_n=\sup_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|.$$

Асимптотическое равенство для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi(k)\in D_q$ получено в работе [Рукасов, 2003]:

$$E(C^{\psi}_{\beta,\infty};V_{n,p})=\psi(n-p+1)\left(\frac{4}{\pi}\frac{1}{(1-q^2)p}+O(1)\left(\frac{q^{p-1}}{p(1-q^2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{(1-q)^3p(n-p)}+\frac{\varepsilon_{n-p}}{(1-q)^4}\right)\right).$$

В данной работе получена асимптотическая формула, которая является двумерным аналогом последнего равенства для класса функций $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$, $\psi_i(k)\in D_{q_i}$, $q_i\in(0;1)$, $\Psi_i(k)\in D_{Q_i}$, $Q_i\in(0;1)$, $i=1;2$.

Результат

Приведем некоторые определения и вспомогательные утверждения.

Пусть $\Lambda=\{\Lambda_1,\Lambda_2\}$ — фиксированный набор бесконечных треугольных числовых матриц $\Lambda_i=\{\lambda^{(n_i)}_{k_i}\}$, $\lambda^{(n_i)}_0=1$, $\lambda^{(n_i)}_{k_i}=0$ для $k_i\ge n_i$, $i=1;2$. Обозначим $\lambda^{(\vec n)}_{\vec k}=\prod_{i=1;2}\lambda^{(n_i)}_{k_i}$. Каждой функции $f\in L(T^2)$ поставим в соответствие многочлен

$$U_{\vec n}(f;\vec x;\Lambda)=U_{n_1,n_2}(f;\vec x;\Lambda)=\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}2^{-q(\vec k)}\lambda^{(\vec n)}_{\vec k}A_{\vec k}(f;\vec x).$$

Многочлены $U_{\vec n}(f;\vec x;\Lambda)$ представляют собой прямоугольные суммы Валле Пуссена $V_{\vec n,\vec p}(f;\vec x)$, определяемые (1), в случае, когда числа $\lambda^{(n_i)}_{k_i}$ задаются соотношениями

$$\lambda^{(n_i)}_{k_i}=\begin{cases}1, 0\le k_i\le n_i-p_i-1,\\ 1-\dfrac{k_i-n_i+p_i}{p_i}, n_i-p_i\le k_i\le n_i-1, p_i\in N, p_i\le n_i, i=1;2.\end{cases}$$

Величины $\delta_{\vec n}(f;\vec x)=f(\vec x)-V_{\vec n,\vec p}(f;\vec x)$ являются уклонениями таких многочленов от функции $f(\vec x)$. Основной целью работы является получение асимптотических формул для верхних граней уклонений $\delta_{\vec n}(f;\vec x)$ на классах $C^{2\psi}_{\beta,\infty}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi_i(x)\in D_{q_i}$, $\Psi_i(x)\in D_{Q_i}$, q_i, $Q_i\in(0;1)$, β_i, $\beta_i^*\in R$, $p_i\in N$, $p_i<n_i$, $i=1;2$. *Тогда при* $n_i-p_i\to\infty$ *имеет место асимптотическая формула*

$$E(C^{2\psi}_{\beta,\infty};V_{\vec n,\vec p})=\sup_{f\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}}\|f(\vec x)-V_{\vec n,\vec p}(f;x)\|_C=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i^2)}+O(1)[\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i)^3(n_i-p_i+1)}+$$

$$+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+$$

$$+\prod_{i=1;2}\frac{\Psi_i(n_i-p_i+1)}{(1-Q_i)^2p_i}(1+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)}{(1-Q_1)^2}+\frac{\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_2)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)^2(1-Q_2)^2})], \tag{2}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n_i, p_i, q_i, Q_i, β_i, β_i^*,

$$\varepsilon_m(\psi)=\sup_{k\ge m}|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q|,\ \ q=\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}. \tag{3}$$

Доказательство. Используя рассуждения работы [Рукасов, Новиков, Бодрая, 2007], можно показать, что

$$\delta_{\bar{n},\bar{p}}(f;\vec{x})=$$

$$=\sum_{i=1;2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k=n_i-p_i+1}^{\infty}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})\psi_i(k_i)\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f^{\bar{\Psi}}(\vec{x}+\sum_{j=1;2}t_j\vec{e}_j)\prod_{j=1;2}\sum_{\nu_j=n_j-p_j+1}^{\infty}(1-\lambda_{\nu_j}^{(n_j)})\Psi_{\nu_j}(\nu_j)\cos(\nu_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2})dt_j.$$

Далее понадобится следующее утверждение (см., напр., [Рукасов, 2003]).

Лемма. *Пусть* $\psi\in D_q$, $q\in(0;1)$, и

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1, 0\le k\le m,\\ \dfrac{n-k}{n-m}, m+1\le k\le n-1, 0, n\le k, k\in N.\end{cases}$$

Тогда для любой последовательности чисел γ_k, $k=1,2,...$, *при любых натуральных* n, $m<n$ *справедливо равенство*

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})\psi(k)\cos(kt-\gamma_k)=\psi(m+1)\times$$

$$\times\ [q^{-(m+1)}\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt-\gamma_k)+r_m(t,\psi)],$$

в котором

$$r_m(t,\psi)=(1-\lambda_{m+1}^{(n)})\sum_{i=2}^{\infty}(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{(1-\lambda_{m+l+1}^{(n)})\psi(m+l+1)}{(1-\lambda_{m+l}^{(n)})\psi(m+l)}-$$

$$-\frac{1-\lambda_{m+i}^{(n)}}{1-\lambda_{m+1}^{(n)}}q^{i-1})\cos((m+i)t-\gamma_{m+i}),$$

причем, начиная с некоторого m_0,

$$|r_m(t,\psi)|\le\frac{3\varepsilon_m(\psi)}{(1-q-\varepsilon_m(\psi))^2(1-q)^2},$$

где $\varepsilon_m(\psi)$ *определено* (3).

Используя утверждение леммы, имеем

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\sum_{i=1;2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)[\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{-(n_i-p_i+1)}\times$$

$$\times\sum_{k=n_i-p_i+1}^{\infty}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})+\psi_i(n_i-p_i+1)r_{n_i-p_i+1}(t_i,\psi_i)]dt_i-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}+\sum_{j=1;2}t_j\vec{e}_j)\prod_{j=1;2}[\Psi_j(n_j-p_j+1)Q_j^{-(n_j-p_j+1)}\times$$

$$\times\sum_{\nu_j=n_j-p_j+1}^{\infty}(1-\lambda_{\nu_j}^{(n_j)})Q_j^{\nu_j}\cos(\nu_jt_j+\frac{\beta_j^*\pi}{2})+\Psi_j(n_j-p_j+1)r_{n_j-p_j+1}(t_j,\Psi_j)]dt_j=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{-(n_i-p_i+1)}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)\sum_{k=n_i-p_i+1}^{\infty}(1-\lambda_{k_i}^{(n_i)})\times$$

$$\times q_i^{k_i}\cos(k_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2})dt_i+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\psi_i(n_i-p_i+1)\int_{-\pi}^{\pi}f^{\overline{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)r_{n_i-p_i+1}(t_i,\psi_i)dt_i-$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}f^{\overline{\Psi}}(\vec{x}+\sum_{j=1;2}t_j\vec{e}_j)\sum_{\xi\subset\{1,2\}}\prod_{s\in\{1,2\}\setminus\xi}\Psi_s(n_s-p_s+1)Q_s^{-(n_s-p_s+1)}\times$$

$$\times\sum_{\nu_s=n_s-p_s+1}^{\infty}(1-\lambda_{\nu_s}^{(n_s)})Q_s^{\nu_s}\cos(\nu_st_s+\frac{\beta_s^*\pi}{2})dt_s\prod_{j\in\xi}\Psi_j(n_j-p_j+1)r_{n_j-p_j}(t_j,\Psi_j)dt_j.$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что

$$\sum_{k=n-p+1}^{\infty}(1-\lambda_k^{(n)})q^k\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})=\frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}q^m\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})=$$

$$=\frac{q^{n-p+1}}{p(1-2q\cos t+q^2)}\cos((n-p+1)t+\frac{\beta\pi}{2}+2\frac{q\sin t}{1-q\cos t})-$$

$$-\frac{q^{n+1}}{p(1-2q\cos t+q^2)}\cos((n+1)t+\frac{\beta\pi}{2}+2\frac{q\sin t}{1-q\cos t}).$$

Тогда

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{x})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\bar{\psi}_i}(\vec{x}+t_i\vec{e}_i)b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)dt_i+$$

$$+O(1)[\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+$$

$$+\prod_{i=1;2}\frac{\Psi_i(n_i-p_i+1)}{(1-Q_i)^2p_i}(1+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)}{(1-Q_1)^2}+\frac{\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_2)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)^2(1-Q_2)^2})], \tag{4}$$

где

$$b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)=\sum_{k=n_i-p_i}^{n_i-1}\sum_{m_i=k_i+1}^{\infty}q_i^{m_i}\cos(m_it_i+\frac{\beta_i\pi}{2}).$$

Так как $f(\vec{x})\in C_{\beta,\infty}^{2\psi}$, то

$$E(C_{\beta,\infty}^{2\psi};V_{\vec{n},\vec{p}})\le\frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+$$

$$+O(1)[\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+$$

$$+\prod_{i=1;2}\frac{\Psi_i(n_i-p_i+1)}{(1-Q_i)^2p_i}(1+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)}{(1-Q_1)^2}+\frac{\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_2)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)^2(1-Q_2)^2})]. \tag{5}$$

Найдем функцию $f_0(\vec{x})\in C_{\beta,\infty}^{2\psi}$, для которой справедливо

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f_0;\vec{0})=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n_i-p_i}^{\beta_i}(t_i)|dt_i+$$

$$+O(1)[\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i)^3(n_i-p_i+1)}+$$

$$+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+$$

$$+\prod_{i=1;2}\frac{\Psi_i(n_i-p_i+1)}{(1-Q_i)^2p_i}(1+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)}{(1-Q_1)^2}+\frac{\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_2)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)^2(1-Q_2)^2})]. \qquad (6)$$

На основании соотношения (4) для любой $f \in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$ можем записать

$$\delta_{\vec{n},\vec{p}}(f;\vec{0}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)dt_i +$$

$$+O(1)[\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+$$

$$+\prod_{i=1;2}\frac{\Psi_i(n_i-p_i+1)}{(1-Q_i)^2 p_i}(1+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)}{(1-Q_1)^2}+\frac{\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_2)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)^2(1-Q_2)^2})]. \qquad (7)$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что функции $\operatorname{sign} b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)$, $i=1;2$, можно переопределить каждую на своем множестве, мера которого не превышает $K(n_i-p_i+1)^{-1}(1-q_i)^{-1}$, где K — некоторое фиксированное число, так, чтобы полученные функции $y_i(t_i)$, $i=1;2$, удовлетворяли условиям $|y_i(t)|\le 1$, $\int_{-\pi}^{\pi} y_i(t)dt = 0$.

Далее, построим функции $\varphi_i(t_1;t_2)=y_i(t_i)$, $\vec{t}\in T^2$, и функции $f_i(\vec{x})$, такие, что $(f_i)^{\bar{\psi}_i}=\varphi_i(\vec{x})$. Можно показать (см., напр., [Рукасов, Новиков, Бодрая, 2007]), что функция $f_0(\vec{x})=f_1(\vec{x})+f_2(\vec{x})$ удовлетворяет условию $(f_0)^{\bar{\psi}_i}(\vec{x})=\varphi_i(\vec{x})$, $i=1;2$. Поэтому $f_0(\vec{x})\in C^{2\psi}_{\beta,\infty}$, и имеет место следующее соотношение:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_0)^{\bar{\psi}_i}(\vec{0}+t_i\vec{e}_i)b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)dt_i = \int_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)|\,dt_i + O(1)\frac{q_i^{n_i-p_i+1}}{(n_i-p_i+1)(1-q_i)^3}.$$

На основании соотношения (7) можем сделать вывод о том, что для найденной функции $f_0(\vec{x})$ справедливо соотношение (6).

Сопоставляя (5) и (6), получаем

$$E(C^{2\psi}_{\beta,\infty};V_{\vec{n},\vec{p}}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{q_i^{n_i-p_i+1}p_i}\int_{-\pi}^{\pi}|b^{\beta_i}_{n_i-p_i}(t_i)|\,dt_i +$$

$$+O(1)[\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)}{p_i(1-q_i)^3(n_i-p_i+1)}+$$

$$+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)q_i^{p_i}}{p_i(1-q_i)^2}+\sum_{i=1;2}\frac{\psi_i(n_i-p_i+1)\varepsilon_{n_i-p_i}(\psi_i)}{(1-q_i)^4}+$$

$$+\prod_{i=1;2}\frac{\Psi_i(n_i-p_i+1)}{(1-Q_i)^2 p_i}(1+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)}{(1-Q_1)^2}+\frac{\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_2)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon_{n_1-p_1}(\Psi_1)\varepsilon_{n_2-p_2}(\Psi_2)}{(1-Q_1)^2(1-Q_2)^2})]. \qquad (8)$$

В работе [Рукасов, Новиков, 1998] показано, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p}^{\beta}(t)|\,dt=4\frac{q^{n-p+1}}{1-q^2}+O(1)\frac{q^{n-p}}{n-p}.$$

Объединяя два последних равенства, получаем асимптотическую формулу (2). Теорема доказана. ■

Замечание. При выполнении условий

$$q_i=Q_i,\ \lim_{n_i\to\infty}p_i=\infty,\ \lim_{\substack{n_i-p_i\to\infty\\ n_i\to\infty}}p_i\varepsilon_{n_i-p_i}<\infty,\ i=1;2,$$

соотношение (2) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

Список литературы

Степанец А. И., Пачулиа Н. Л. Кратные суммы Фурье на множествах дифференцируемых функций. // Укр. мат. журн. — Т. 43, № 4. — 1991. — С. 545–555.

Рукасов В. И, Новиков О. А., Бодрая В. И. Приближение классов функций двух переменных высокой гладкости прямоугольными линейными средними их рядов Фурье. // Теория приближения функций и смежные вопросы. — Т. 4, № 1. — 2007. — С. 270–283.

Степанец А. И. Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных суммами Фурье. // Укр. мат. журн. — Т. 25, № 5. — 1973. — С. 599–609.

Рукасов В. И., Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение периодических функций двух переменных с высокой гладкостью прямоугольными суммами Валле Пуссена. // Теория приближения функций и смежные вопросы. — Т. 5, № 1. — 2008. — С. 286–296.

Степанец А. И., Сердюк А. С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций. // Укр. мат. журн. — Т. 52, № 3. — 2000. — С. 375–395.

Рукасов В. И. Приближения суммами Валле Пуссена классов аналитических функций. // Укр. мат. журн. — Т. 55, № 6. — 2003. — С. 806–816.

Рукасов В. И., Новиков О. А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена. // Ряды Фурье: теория и приложения. — Т. 20. — 1998. — С. 228–241.