**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2011 Т. 3 № 3 С. 241–254**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9, 517.4, 519.64

Использование дополнительной информации в задаче обращения усредняющих операторов в пространстве функций

А. В. Коганов

Научно-исследовательский институт системных исследований (НИИСИ РАН),
Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр., 36, к. 1

E-mail: koganow@niisi.msk.ru

Получено 1 февраля 2011 г.

Решается двойственная задача интегральной геометрии: по заданному оператору усреднения определить класс функций, на котором возможно обращение этого оператора. Эти классы определяются неоднозначно. Дается полное описание таких классов в форме минимальной дополнительной информации, которую надо знать о функции. Исследуется возможность их конструктивного описания, и в случае конечной системы усреднения даются формулы обращения.

Ключевые слова: интегральная геометрия, пространство функций, формула обращения

Complimentary information using in the task of averaging operators inversion in function space

A. V. Koganov

*Science research institute of System analyze of Russian Academy of Sciences (SRISA RAS),
Nakhimovsky st. 36 build 1, Moscow, Russia*

Abstract. — The dual task of integral geometry – to define for a given averaging operator the function class where inversion of that operator is possible – is solved. Those classes are defined ambiguously. Full description of those classes is given in the form of minimal complimentary information necessary to know about the function. The possible to give a constructive description of the class is researched and in the case of a finite averaging system the inversion formulas are given.

Keywords: integral geometry, functional space, inversion formula

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 241–254 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований,
проекты 10-01-00041а, 11-03-00035а

Введение

Классическая задача интегральной геометрии заключается в поиске такой системы подмножеств на пространстве с мерой, которая позволяет восстановить любую функцию, абсолютно суммируемую на этих подмножествах, по ее интегралам. При этом находятся явные формулы обращения, которые восстанавливают функцию. Иногда на функции накладываются дополнительные ограничения, необходимые для применения этой формулы [Гельфанд и др., 1962; Гельфанд и др., 2000]. Новый класс формул обращения возник при переходе к пространствам с дискретной структурой типа графов и бесконечных решеток [Граев, 2008]. Связь дискретных и непрерывных моделей изложена в [Коганов, 2005]. В данной работе исследуется ситуация, когда система подмножеств интегрирования функции не позволяет однозначно восстановить функцию по ее интегралам. Двойственная задача интегральной геометрии связана с вопросом, какую дополнительную информацию надо знать о функции, кроме ее интегралов по заданной системе подмножеств, чтобы стало возможным ее восстановление. Другими словами, как надо сузить класс функций, чтобы интегральный оператор стал обратимым? Оказалось, что эти классы имеют полное описание. Причем для конечных и счетных систем подмножеств это описание конструктивно в той мере, в какой может быть рекурсивным описание отображения одного линейного пространства в другое. Для случая конечной системы подмножеств дается одна из возможных формул обращения. Интересно, что даже для конечных пространств с атомарной мерой, в случае необратимости оператора усреднения по этой мере на пространстве всех функций, теоретическое число классов функций, где обратимость возможна, превышает континуум. Разумеется, число конструктивных классов в этом случае счетное. Технически задача сводится к построению специальных базисов в пространстве функций.

Автор выражает благодарность М. И. Граеву за многократные обсуждения этой задачи и смежных вопросов комбинаторного и функционального анализа.

1. Постановка задачи

Дано пространство действительных функций $F\{X,\mathbb{R}\}$ с доменом X.

На домене задана мера w с сигма-алгеброй S. И задана система подмножеств $M \subset S$, измеримых по этой сигма-алгебре. С этой конструкцией связан оператор вида $h: F\{X,\mathbb{R}\} \to$ $\to F\{M,\mathbb{R}\}$, определенный как

$$hf(m) = \int\limits_{x\in m} f(x)dw(x). \tag{1}$$

Этот оператор назовем усредняющим. Его областью определения будем считать такие функции, на которых все интегралы вида (1) сходятся абсолютно. Систему подмножеств M назовем системой усреднения для этого оператора.

$$f \in \operatorname{dom} h \quad \Leftrightarrow \quad \forall m \in M \quad \int\limits_{x\in m} |f(x)|\, dm(x) < \infty \tag{2}$$

или

$$\operatorname{dom} h = \left\{ f \,\middle|\, \forall m \in M \quad \int\limits_{x\in m} |f(x)|\, dm(x) < \infty \right\} \subset F\{X,\mathbb{R}\}. \tag{2a}$$

Образом функции $f \in \operatorname{dom} h$ назовем функцию $hf \in F\{M,\mathbb{R}\}$.

Конструкция $\langle X, M, S, w \rangle$ в интегральной геометрии называется *двойным разбиением*. Термин указывает на соответствие двух функциональных пространств $F\{X, \mathbb{R}\}$ и $F\{M, \mathbb{R}\}$. Возможны две ситуации. Первая: по образу функции однозначно восстанавливается исходная функция. Вторая: образ функции не позволяет однозначно восстановить прообраз из области определения усредняющего оператора. В первом случае говорят, что для данного двойного разбиения имеется формула обращения, а оператор усреднения обратим. Во втором случае для обращения образа функции требуется дополнительная информация о подклассе функций, которому принадлежит прообраз. Исследование этого случая является предметом данной работы.

Определение. *Для данного двойного разбиения подкласс функций $F' \subset \operatorname{dom} h$ называется разрешимым (или резольвентным), если для образа hf, $f \in F'$, в классе F' имеется единственный прообраз. (При этом допускается наличие других прообразов вне этого класса.) Разрешимый класс называется максимальным, если добавление к нему любой функции из $F(X, \mathbb{Z}) \setminus F'$ делает его неразрешимым (т. е. образ новой функции совпадет с одним из образов функции из класса). Два резольвентных класса объединяемы, если их объединение тоже резольвентно.*

Замечание 1. Для обратимого оператора усреднения имеется единственный максимальный резольвентный класс — вся область определения оператора. Но в случае необратимости оператора должно быть нетривиальное множество максимальных разрешимых классов. Очевидно, что каждая функция из области определения оператора усреднения принадлежит хотя бы одному резольвентному классу. Например, всегда можно ввести класс, состоящий из одной этой функции. Этот класс входит в какие-то максимальные резольвентные классы (не всегда в один). Разные максимальные разрешимые классы могут иметь непустое пересечение, но они не могут по определению включаться один в другой. В частности, разные максимальные разрешимые классы не объединяемы.

2. Разрешимые классы на конечной области определения функций

Пусть X — конечное множество с $n(X)$ элементами. Тогда и M конечно с $n(M)$ элементами. Функцию из $F\{X, \mathbb{R}\}$ можно рассматривать, как вектор в $\mathbb{R}^{n(X)}$. Функцию из $F\{M, \mathbb{R}\}$ можно рассматривать, как вектор в $\mathbb{R}^{n(M)}$. Усредняющий оператор переводит вектор первого пространства в вектор второго пространства и действует на этот вектор как линейный оператор с матрицей A, совпадающей со взвешенной по атомарной мере w матрицей инцидентности точек из X и подмножеств из совокупности M. Элементы этой матрицы могут быть индексированы точками из прямого произведения $X \times M$, причем $A_{m,x} = dw(x)\ (x \in m) \mid 0\ (x \notin m)$. Формула (1) в этом случае имеет вид

$$hf(m) = \sum_{x \in X} A_{m,x} f(x) = \left(Af\right)_m. \tag{3}$$

Если матрица A не вырождена, то оператор обратим. Для вырожденной матрицы надо искать резольвентные классы. В этом случае существует подпространство $K(M)$ — ядро оператора h.

$$f \in K(M) \Leftrightarrow_{def} \quad hf = Af = 0 \in \mathbb{R}^{n(M)}.$$

Выберем в $F(X, \mathbb{R})$ базис $\varphi_1, \cdots, \varphi_l, \psi_1, \ldots \psi_k$, $l + k = n(X)$, такой, что базисные векторы $\psi_1, \ldots \psi_k$ образуют базис в $K(M) = \langle \psi_1, \ldots \psi_k \rangle$ (*базис ядра*). Часть базиса $\varphi_1, \cdots, \varphi_l$ назовем *базисом дополнения*. Обозначим $L(M)=\langle \varphi_1,\cdots,\varphi_l \rangle$ линейную оболочку базиса дополнения. Векторы $\psi_1,\ldots\psi_k$ обнуляются действием h, а из $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$ ни один не обнуляется и не обнуляются любые ненулевые их линейные комбинации.

$$F(X,\mathbb{R})=L(M)\oplus K(M)=L(M)\times K(M).$$

Определение. *Базис* $(\varphi,\psi)=\varphi_1,\cdots,\varphi_l,\psi_1,\ldots\psi_k$*, построенный выше, назовем согласованным с усредняющим оператором.*

Утверждение 1. $L(M)\cap K(M)=\{0\}$. Это следует из того, что вся совокупность $\varphi_1,\cdots,\varphi_l,\psi_1,\ldots\psi_k$ является базисом, и в ней нет нетривиальных нулевых линейных комбинаций. Если же это пересечение содержит ненулевую точку, то

$$a_1\varphi_1+\cdots+a_l\varphi_l=b_1\psi_1+\ldots+b_k\psi_k,$$

где не все коэффициенты нулевые.

Для построения согласованного базиса в случае конечной или бесконечной размерности будем считать, что имеется ординальная упорядоченность векторов базиса. Тогда выбор базиса ψ в $K(M)$ произволен. Базис дополнения φ строится последовательно.

Базисный вектор φ_1 выбирается в $F(X,\mathbb{R})\setminus\langle \psi_1,\ldots,\psi_k \rangle$.

Базисный вектор φ_i выбирается в $F(X,\mathbb{R})\setminus\langle \psi_1,\ldots,\psi_k,\varphi_1,\ldots,\varphi_{i-1} \rangle$, $2\le i\le l$.

Здесь треугольные скобки обозначают пространство линейных комбинаций указанных векторов (линейную оболочку).

$$K(M)=\langle \psi_1,\ldots,\psi_k \rangle;\ \ L(M)=\langle \varphi_1,\ldots,\varphi_l \rangle.$$

Заметим, что ядро $K(M)$ не зависит от выбора базиса, но дополнение к ядру $L(M)$ зависит от выбора базиса дополнения. Поэтому можно записать $L(M)=L(M,\varphi)$. При любом согласованном базисе для каждого вектора $q\in F(X,\mathbb{R})$ однозначно определено разложение, которое зависит от выбора базиса дополнения,

$$q=f+g,\quad f\in L(M),\ g\in K(M), \tag{4}$$

$$hq=hf. \tag{5}$$

Именно потеря информации о компоненте вектора g при применении усредняющего оператора суть причина необратимости. Это видно из следующей выкладки. Пусть

$$q(x)=\sum_{i=1}^{l} f_i\varphi_i(x)+\sum_{j=1}^{k} g_j\psi_j(x).$$

Обозначим

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l} f_i\varphi_i(x);\quad g(x)=\sum_{j=1}^{k} g_j\psi_j(x).$$

Тогда $hq=Bf$.

$$hq(m)=hf(m)=\sum_{i=1}^{l} f_i\sum_{x\in m} A_{m,x}\varphi_i(x)=\sum_{i=1}^{l} f_iB(i,m), \tag{6}$$

где

$$B(i,m) = \sum_{x \in m} A_{m,x} \varphi_i(x).$$

Все функции $q(.)$ с одинаковой компонентой $f(.)$ имеют одинаковый образ hq независимо от компоненты $g(.)$. Назовем $f(.)$ компонентой дополнения, а $g(.)$ — компонентой ядра.

Оператор B обратим как отображение $B: L(\varphi) \to hL(\varphi)$. Поэтому по образу hq можно из (6) однозначно найти его частичный прообраз f. Введем обозначение такого частичного обращения в форме псевдообратной матрицы $f = h^+ hq$. Оператор h^+ зависит от выбора базиса дополнения. Заметим, что стандартное определение псевдообращения соответствует некоторому определенному базису дополнения, который ортогонален базису ядра в скалярном произведении, заданном матрицей $h^T h$. Таким образом, наше определение псевдообратной матрицы $h^+ = h^+ |_\varphi$ обобщает стандартное. Но все такие операторы выражаются друг через друга с помощью ортогонального проектора на ядро в указанном скалярном произведении.

Введем подкласс функций $L(M;\xi)$, который определяется отображением $\xi: L(M) \to$ $\to K(M)$ по формуле

$$L(M,\xi) = \left\{ q = f + \xi(f) \middle| f \in L(M) \right\}. \tag{7}$$

Назовем его подклассом, *связанным отображением* ξ. Тогда задача обращения оператора усреднения на этом классе решается однозначно:

$$q = h^+ hq + \xi(h^+ hq). \tag{8}$$

Теорема 1. *Подкласс, связанный произвольным отображением, является максимальным резольвентным. Разным отображениям соответствуют различные связанные с ними подклассы. Других максимальных резольвентных подклассов нет.*

Доказательство. Разрешимость подкласса вытекает из формулы обращения (8). Рассмотрим еще одну функцию $q' = f' + g'$ вне подкласса $L(M;\xi)$. Тогда $g' \neq \xi(f')$. В этом случае функция $q = f' + \xi(f')$ по (5) будет иметь тот же образ, что и q'. Это значит, что расширенный подкласс уже не разрешимый. Максимальность доказана. Пусть имеется некоторый максимальный резольвентный подкласс L'. Рассмотрим множество функций из $L(M)$ вида $L'(M) = \left\{ f \middle| q = f + g, q \in L', f \in L(m), g \in k(M) \right\}$. Поскольку подкласс разрешим, то каждой функции $f \in L'(M)$ будет соответствовать ровно одна функция $g \in K(M)$. Поэтому можно построить отображение $g = \xi(f),\ f \in L'(M),\ f + g \in L'$. Но тогда $L' \subset L(M,\xi')$, где $\xi' |_{L'(M)} = \xi$. Поскольку L' максимален, то, по замечанию 1, $L' = L(M,\xi)$. Теорема доказана.

Замечание 2. В теореме 1 дано полное описание максимальных резольвентных классов для случая конечной области определения функций. Интересно, что мощность множества таких классов не только бесконечна, но и превосходит континуум, поскольку равна мощности множества всех отображений одного континуума в другой.

3. Переход к бесконечной области определения

Непосредственный переход к счетным и более носителям с атомарной мерой сталкивается с трудностью. Система (6) становится бесконечной, и однозначность ее разрешения надо специально доказывать. Однако разложение пространства функций по двум базисам сохраняет силу. Числа $n(X)$, $n(M)$, l и k становятся трансфинитными. В счетном случае можно считать их равными ∞ в обычном смысле.

Теорема 2. *Теорема 1 верна для любого носителя X с атомарной мерой, возможно, с потерей конструктивности при частичном обращении оператора усреднения.*

Доказательство. Достаточно показать единственность решения системы уравнений (6) для случая бесконечных X и M. Соответственно, размерности и число членов сумм в (6) будет бесконечным. Однако пусть имеется два различных решения $f \neq f'$ этой системы. Тогда $hf = hf'$ и $h(f - f') = 0$. Причем $f - f' \neq 0$ как функция. Но тогда $f - f' \in K(M)$ и по построению $f - f' \in L(M)$. Получаем $L(M) \cap K(M) \neq \{0\}$, что противоречит определению этих подпространств и согласованного базиса. Таким образом, решение (6) единственно (существует по построению системы). Однако поиск такого решения в общем случае неконструктивен. Теорема доказана.

Замечание 3. Мощность множества максимальных разрешимых классов равна мощности множества отображений линейного дополнения к ядру оператора усреднения в это ядро. Для счетных носителей она такая же, как в конечном случае (замечание 2).

4. Общий случай неатомарной меры

Отображение h задано формулой (1). Ядро $K(M)$ этого отображения определено условием

$$g \in K(M) \Leftrightarrow \forall m \in M \quad hg(m) = \int\limits_{x \in M} g(x)dw(x) = 0. \tag{9}$$

Выберем в $F\{X, \mathbb{R}\}$ базис $B(M)$, состоящий из двух частей:

$$B(M) = \left\{\varphi_i(x) \mid i \in I\right\} \cup_{\varnothing} \left\{\psi_j(x) \mid j \in J\right\}.$$

Объединение без пересечения (отмечено значком пустого пересечения). Частичный базис ψ является полным базисом в $K(M)$:

$$K(M) = \left\langle \psi_j \mid j \in J \right\rangle.$$

Частичный базис φ дополняет ψ до полного согласованного базиса во всем пространстве $F\{X, \mathbb{R}\}$. Мощности частичных базисов $\# I$ и $\# J$ не ограничены, но для каждой функции из класса $F\{X, \mathbb{R}\}$ имеется не более чем счетное число базисных векторов с ненулевыми коэффициентами разложения. Это следует из того, что сверхсчетные суммы ненулевых членов всегда не сходятся абсолютно. Поэтому соответствующие им функции не входят в пространство $F\{X, \mathbb{R}\}$. Обозначим

$$L(M) =_{def} \left\langle \varphi_i \mid i \in I \right\rangle.$$

Тогда

$$K(M) \cap L(M) = \{0\},$$
$$F\{X, \mathbb{R}\} = K(M) \oplus L(M).$$

Если $f \in L(M)$, то существует $m \in M$, на котором $hf(m) \neq 0$.

Определение класса функций, связанного отображением $L(M; \xi)$, где $\xi : L(M) \to K(M)$, обобщается на этот случай по формуле (7). Любая функция $g \in L(M; \xi)$ имеет единственное разложение

$$q = f + g \in L(M, \xi), \; f \in L(M), \; g \in K(M), \;\; g = \xi f. \tag{10}$$

Теорема 3. *Все максимальные резольвентные классы образуют семейство* $L(M;\xi)$.

Доказательство. Покажем, что это резольвентный класс. Достаточно показать, что у каждого образа функции из этого класса ровно один прообраз в этом классе. Рассмотрим для такой функции разложение (10). Тогда $hq(m) = hf(m),\ m \in M$. Пусть у этого образа есть еще один прообраз в том же классе: $hq' = hq,\ q' = f' + g',\ f' \in L(M),\ g' \in K(M)$. По предположению, условие $hq'(m) = hf'(m) = hq = hf$, и тогда $hf(m) - hf'(m) = h(f - f')|_m = 0$ выполнено для произвольного подмножества $m \in M$. Это значит, что $f - f' \in K(M)$. Но $f - f' \in L(M)$. Значит, $f - f' \in L(M) \cap K(M)$. Это означает, что $f - f' = 0$, откуда $f = f'$. Но тогда и $g = \xi f = \xi f' = g'$. Следовательно, $q = q'$. Резольвентность доказана. Докажем максимальность. Добавим к $L(M;\xi)$ произвольную новую функцию $z(x) = p(x) + r(x),\ p \in L(M)$, $r \in K(M)$. Получим новый класс L'. По условию $r \neq \xi p$. В классе $L(M;\xi)$ имеется функция $q = p(x) + \xi p(x)$. Поскольку $hz = hp = hq$, то у образа hp имеется два разных прообраза, и, следовательно, класс L' — не резольвентный. Докажем, что любой резольвентный класс входит в некоторый $L(M;\xi)$. Пусть L'' — некоторый резольвентный класс. Это значит, что у любого образа $z \in hL''$ имеется ровно один прообраз $q \in L''$. Для каждого такого прообраза имеется однозначное разложение (10). Тогда $z =_{def} hq = hf$. Это означает, что в классе L'' нет функции вида $z' = f + g'$, где $g' \neq g$. Поэтому каждой компоненте $f \in L(M)$ соответствует в классе L'' ровно одна компонента $g \in K(M)$. А это означает, что имеется хотя бы одно отображение $\xi : L(M) \to K(M)$, которое сопоставляет одно g для каждой f в классе L''. Тогда $L'' \subset L(M,\xi)$. Теорема доказана. ■

Замечание 4. Теорема доказывает существование отображения, которое обращает усредняющий оператор. Но в ней не содержится явных формул обращения. Предметом интегральной геометрии является построение явных формул или алгоритмов обращения. В классе отображений $\xi : L(M) \to K(M)$ в основном содержатся неконструктивные отображения, и для них явное обращение усредняющего оператора заведомо невозможно. Но и для конструктивных отображений ξ не всегда есть явное обращение образов из $hL(M)$ в прообразы из $L(M)$. Таким образом, построенная выше теория является только основанием для поиска методов использования дополнительной информации о классе функций при конструктивном обращении усредняющего оператора.

5. Конечные системы усреднения с конечными мерами

В этом разделе будут рассмотрены конечные системы усреднения M на произвольном пространстве $\left[X, S, w\right]$ с дополнительным условием, что меры всех множеств усреднения конечные. В этом случае возможно конструктивное построение базиса дополнения и также конструктивная формула обращения.

Утверждение 5.1. Рассмотрим случай $\#M = 1$, что означает — $M = \{m\},\ m \subset X$. Тогда базис дополнения состоит из любой одной функции $\varphi_m(.)$, для которой

$$h\varphi_m(m) = \int_{x\in m} \varphi_m(x)dw(x) \neq 0. \tag{5.1}$$

Доказательство. Предположим, что базис дополнения содержит еще одну функцию $\varphi'(.)$. Тогда $h\varphi'(m) \neq 0$. Но в таком случае принадлежит ядру усреднения линейная комбинация

$$f(.) = \varphi_m(.) - \frac{h\varphi_m(m)}{h\varphi'(m)}\varphi'(.), \quad \text{поскольку} \quad hf(m) = h\varphi_m(m) - h\varphi'(m)\frac{h\varphi_m(m)}{h\varphi'(m)} = 0.$$ Это

противоречит определению базиса дополнения. Утверждение доказано.

По утверждению 5.1 при одноэлементной системе усреднения дополнение к ядру одномерно, и формула обращения на дополнении такова: если $hf = b$, то

$$f(x) = \frac{b}{h\varphi_m(m)}\varphi_m(x). \tag{5.2}$$

Если известно, что функция из резольвентного класса $L(M,\xi)$, то

$$f(x) = \frac{b}{h\varphi_m(m)}\varphi_m(x) + \xi\left(\frac{b}{h\varphi_m(m)}\varphi_m(x)\right). \tag{5.3}$$

В качестве базисной функции дополнения можно взять $\varphi_m(x) = \chi_m(x)$. Тогда $h\varphi_m(m) = w(m)$.

Замечание 5.1. При выборе разных базисов дополнения $\varphi = \{\varphi_m\}$ будут получаться разные резольвентные классы $L(M,\varphi,\xi) = L(M,\xi)$ при фиксированном отображении ξ. Однако любой класс при одном базисе можно получить при другом базисе, нужным образом изменив отображение.

Доказательство. Пусть имеются две базисные функции φ и φ' и имеется отображение ξ. Рассмотрим резольвентный класс $L(M,\varphi,\xi)$ в очевидном обозначении в смысле применения формулы обращения (5.3). Тогда рассмотрим новое отображение, которое удовлетворяет равенству

$$\frac{b}{h\varphi_m(m)}\varphi_m(x) + \xi\left(\frac{b}{h\varphi_m(m)}\varphi_m(x)\right) = \frac{b}{h\varphi'_m(m)}\varphi'_m(x) + \xi'\left(\frac{b}{h\varphi'_m(m)}\varphi'_m(x)\right).$$

Для такого отображения по построению $L(M,\varphi',\xi') = L(M,\varphi,\xi)$.

Этому условию удовлетворяет любое отображение, которое на подпространстве $\langle\varphi'\rangle$ определено равенством

$$\xi'(a\varphi') = \frac{au}{u'}\varphi + \xi\left(\frac{au}{u'}\varphi\right) - a\varphi', \tag{5.4}$$

где $u = h\varphi(m)$, $u' = h\varphi'(m)$. Замечание доказано.

Таким образом, набор резольвентных классов не зависит от выбора базиса дополнения. Этот факт верен и в общем случае, не всегда конструктивно реализуемом.

Теорема 5.1. *Для произвольного двойного разбиения* $\langle X,M,S,w\rangle$ *и для произвольных двух базисов дополнения* $\varphi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ *и* $\varphi' = \{\varphi'_i \mid i \in I\}$ *совпадает совокупность всех максимальных резольвентных классов* $L(M,\varphi,\xi)$ *и* $L(M,\varphi',\xi')$.

Доказательство. Для фиксированного отображения $\xi : (F(X,\mathbb{R}) \setminus K(M)) \to K(M)$ резольвентный класс зависит от базиса дополнения. Надо показать, что для каждого класса $L(M,\varphi,\xi)$ существует совпадающий с ним класс $L(M,\varphi',\xi')$. В каждом из базисов дополнения имеется оператор псевдообращения: U и U' соответственно, который в обозначениях формулы (10) можно записать так:

$$U : hF(X,\mathbb{R}) \to L(M,\varphi),$$
$$U' : hF(X,\mathbb{R}) \to L(M,\varphi'),$$

$$f(x) = \left(Uhq\right)(x) = \sum_{i\in I}\left(Uhq\right)_i \varphi_i(x),$$

$$f'(x) = \left(U'hq\right)(x) = \sum_{i\in I}\left(U'hq\right)_i \varphi'_i(x).$$

В этой записи $\left(Uhf\right)_i$ и $\left(U'hf\right)_i$ обозначают коэффициенты разложения по базису дополнения компоненты $f\in\langle\varphi\rangle$ или $f'\in\langle\varphi'\rangle$ (соответственно базису дополнения) для заданной функции $q\in F(X,\mathbb{R})$. Оба оператора обратимы на пространстве своих образов. Рассмотрим новое отображение на образе оператора U': для $f'\in\langle\varphi'\rangle$

$$\xi'(f') = UU'^{-1}f' + \xi(UU'^{-1}f') - f'. \tag{5.5}$$

Здесь использовано свойство $U'^{-1}f'\in hF(X,\mathbb{R})$. Поэтому возможна суперпозиция UU'^{-1}. Для произвольной функции $q\in F(X,\mathbb{R})$, по определению оператора псевдообращения, $f' = U'hq$. Тогда из (5.5) получаем

$$U'hq + \xi'(U'hq) = Uhq + \xi(Uhq).$$

Следовательно, $L(M,\varphi,\xi) = L(M,\varphi',\xi')$. Теорема доказана. ■

Определение. *Сопоставим каждой точке* $x\in X$ *набор тех подмножеств усреднения, которые содержат эту точку* $p(x) = \left\{m \mid m\in M, x\in m\right\}\subset M$. *Назовем разбиением системы усреднения* $D(M)$ *разбиение пространства* X *на подмножества точек с одинаковым значением* $p(x)$.

Точки, для которых $p(x) = \varnothing$, не входят ни в одно множество усреднения. Эти точки образуют один элемент разбиения, который назовем *внешним* и обозначим d_0. Остальные элементы (*собственные*) образуют разбиение на объединении всех подмножеств системы

$$\cup M = \bigcup_{m\in M} m \subset X.$$

Тогда $d_0 = X\setminus\cup M$, возможно, $d_0 = \varnothing$. При работе с фиксированной системой усреднения будем сокращать обозначение $D(M) = D$. Далее, обозначим $\#M = n$, $\#D = k+1$, $D = \left\{d_0; d_1; \ldots; d_k\right\}$, $M = \left\{m_1; \ldots; m_n\right\}$. В общем случае $k\ge n$. При этом $k = n$, если и только если подмножества из системы M попарно не пересекаются.

Введем три матрицы, связанные с конечной системой усреднения M. Размерности всех этих матриц — $n\times k$ (длина строки k). Элемент d_0 не учитывается. Индексы: $i = 1,\ldots,n$ и $j = 1,\cdots,k$.

Матрица инцидентности системы усреднения:

$$\mu = \left(\mu_{i,j}\right),\quad \mu_{i,j} = 1(d_j\subset m_i)\,|\,0. \tag{5.6}$$

Матрица весов:

$$\eta = (\eta_{i,j}),\quad \eta_{i,j} = w(d_j)\mu_{i,j}. \tag{5.7}$$

Матрица операторов усреднения:

$$\theta = \left(\theta_{i,j}\right),\quad \theta_{i,j}(.) = \mu_{i,j}\int_{x\in d_j}(.)dw(x). \tag{5.8}$$

Операторы преобразования функции в функциональный вектор-столбец

$$\delta f = \left(\delta_1 f, \ldots, \delta_k f\right), \quad \delta_j f(x) = \chi_{d_j}(x) f(x). \tag{5.9}$$

Тогда

$$hf = \theta\delta f, \tag{5.10}$$

где $\left(hf\right)_i = hf(m_i)$, или

$$hf(m_i) = \left(\theta\delta f\right)_i. \tag{5.10a}$$

Лемма 5.1. *Набор нулевых и ненулевых миноров в этих трех матрицах совпадает.*

Доказательство. В нулевых минорах строки линейно зависимы, и обратно. По построению для всех пар индексов $w_{i,j} > 0$. Значит, и оператор $\theta_{i,j} \neq 0$. Линейная зависимость строк μ означает, что $\sum_{i\in c} a_i \mu_{i,j} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Тогда

$$\sum_{i\in c} a_i \eta_{i,j} = w(d_j) \sum_{i\in c} a_i \mu_{i,j} = 0$$

и

$$\sum_{i\in c} a_i \theta_{i,j} = \int_{x\in d_j} (.) w(d_j) \sum_{i\in c} a_i \mu_{i,j} = 0.$$

Если $f = 1 = \chi_X(.)$, то $\theta_{i,j} f = w(d_j) = \eta_{i,j}$.

Значит, нулевые миноры матриц μ, θ и η совпадают. Лемма доказана.

Из (5.10) следует, что если функция f входит в ядро оператора h, то δf входит в ядро оператора θ.

Построение базиса дополнения в разложении $F(X, \mathbb{R}) = L(M) \oplus K(M)$.

$$\varphi_i = \chi_{m_i}(.), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.11}$$

Этот набор векторов назовем исходным. По нему строим квадратную матрицу скалярных произведений u.

$$u_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j) = w(m_i \cap m_j). \tag{5.12}$$

Лемма 5.2. *Ранг матрицы скалярных произведений u (5.12) совпадает с общим рангом матриц μ, θ и η (5.6, 5.7, 5.8).*

Доказательство. По определению (5.7) верна формула $u = \theta\theta^T$. Пусть $r = \mathrm{rnk}(\theta)$. Матрица θ — прямоугольная, размерности $n \times k$. Поэтому $r \le n$. В силу билинейности скалярного произведения $\mathrm{rnk}(u) \le r$. Для упрощения обозначений предположим, что первые r строк матрицы θ линейно независимы в совокупности. Обозначим ϑ прямоугольную матрицу из первых r строк матрицы θ. И определим $U = \vartheta\vartheta^T$. Это главный минор размерности $r \times r$ в матрице u. Тогда $\mathrm{rnk}(u) = \mathrm{rnk}(U)$. Дополним матрицу ϑ до квадратной, добавив к ней $n - r$ строк, от которых потребуем ортогональности ко всем строкам матрицы ϑ и ортонормированности между собой. Иными словами, это — ортонормированный базис в подпространстве, ортогональном к линейной оболочке строк ϑ. Последнее замечание доказывает существование такого расширения матрицы. Новую матрицу размерности $n \times n$ обозначим ς. По построению $\mathrm{rnk}(\varsigma) = n$, и поэтому $\det(\varsigma) \neq 0$. Далее, заметим, что

$$\varsigma\varsigma^T = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

и

$$\det(\varsigma\varsigma^T) = \det(U) = \det(\varsigma)\det(\varsigma^T) = \det{}^2(\varsigma) \neq 0.$$

Следовательно, $\mathrm{rnk}(\varsigma\varsigma^T) = n$ и $\mathrm{rnk}(U) = r$. Лемма доказана.

В матрице u выбираем максимальный невырожденный минор U в обозначениях леммы 5.2. Номера его строк задают векторы строки матрицы θ, которые войдут в базис дополнения. (Для оговоренной в лемме нумерации строк это первые r строк.) Этот базис дополнения назовем *стандартным*. В него войдут $r = \mathrm{rnk}(u) = \mathrm{rnk}(\theta)$ векторов. Матрица скалярных произведений для этого базиса равна U и невырожденная.

Теперь можно построить явную формулу обращения для класса функций $L(M, \xi)$ со стандартным базисом дополнения. Пусть дана функция $f \in F(X, \mathbb{R})$, $f = g + q$, $g \in L(M)$, $q \in K(M)$. Тогда $g = \sum\limits_{i=1,\dots,r} a_i \varphi_i$. Верны равенства $hf(m) = hg(m)$ и $q = \xi g$.

Из линейности оператора $hf(m_j) = \sum\limits_{i=1,\dots,r} a_i h\varphi_i(m_j) = \sum\limits_{i=1,\dots,r} a_i U_{i,j}$, или $hf = Ua$.

$$a = U^{-1}(hf). \tag{5.13}$$

Формула обращения:

$$g(x) = \sum_{i=1,\dots,r} \left(U^{-1}hf\right)_i \varphi_i(x) = \left(U^{-1}hf, \varphi(x)\right); \tag{5.14a}$$

$$f(x) = g(x) + \xi(g(.))|_x. \tag{5.14b}$$

Теорема 5.2. *Для конечной системы усреднения существует стандартный базис дополнения, состоящий из характеристических функций того подмножества системы, которое образует максимальный ненулевой минор матрицы скалярных произведений (5.12); в этом базисе можно построить формулу обращения (5.13), (5.14) в произвольном разрешимом классе функций.*

Доказано выше.

Пример 5.1. Система попарно непересекающихся множеств усреднения. В этом случае аппарат значительно упрощается.

$$M = \{m_1, \dots, m_n\}, \quad m_i \cap m_j = \varnothing, i \neq j.$$

Тогда $D = M$, $k = n$, $\mu = E$,

$$u = diag\{w(m_1), \dots, w(m_n)\}, \quad u^{-1} = diag\left\{\frac{1}{w(m_1)}, \dots, \frac{1}{w(m_n)}\right\}.$$

Формула обращения:

$$g(x) = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{hf(m_i)}{w(m_i)} \chi_{m_i}(x); \quad f = g + \xi g. \tag{5.15}$$

6. Общий случай конечной или счетной системы усреднений

В этом разделе мы рассмотрим конечные и счетные системы усреднений M, $\#M \le \aleph_0$, в которых мера некоторых множеств усреднения может быть бесконечной. При конструктивных рассмотрениях будем считать, что множество M перечислимое. Полная область определения оператора усреднения состоит из функций, абсолютно суммируемых на каждом из множеств усреднения.

$$f(x) \in dom(h) \Leftrightarrow \forall m \in M \quad \int_{x \in m} \left| f(x) \right| dw(x) < \infty. \tag{6.1}$$

В частности, в область определения всегда входят все функции, которые абсолютно суммируемы на всем пространстве. Однако для некоторых операторов область определения можно расширить. Например, если объединение всех множеств усреднения не покрывает все пространство, $\cup M \subset \ne X$, то достаточно потребовать абсолютной суммируемости на объединении $\cup M$:

$$\int_{x \in \cup M} \left| f(x) \right| dw(x) < \infty. \tag{6.2}$$

Для данного рассмотрения, в котором не предполагается обратимость оператора усреднения без дополнительной информации, это — возможный случай.

Абсолютная суммируемость требуется для того, чтобы применение оператора к функции не зависело от дополнительных ограничений на способ интегрирования.

Как было установлено выше, для описания резольвентных классов функций достаточно построить дополнительный к ядру базис (базис дополнения). Использовать метод предыдущего раздела в данном случае нельзя, поскольку индикаторы множеств интегрирования с бесконечной мерой не входят в область определения (6.2) оператора усреднения и не могут являться элементами базиса.

Определение. *Базис дополнения назовем наложенным (обозначение $ap\,base$), если носитель каждой его функции лежит в некотором множестве усреднения.*

$$f \in ap\,base\ L(M) \Rightarrow \quad \exists m \in M \quad sprt(f) \subseteq m. \tag{6.3}$$

Такую функцию f будем называть наложенной на множество усреднения m.

Замечание 6.1. В наложенном базисе каждому множеству усреднения соответствует не более одной базисной функции.

Доказательство. Пусть утверждение леммы не верно, и две функции f и g из базиса дополнения имеют носитель на одном множестве усреднения m. Тогда они и все их линейные комбинации суммируются к нулю на множестве $\cup M \setminus \{m\}$. Поскольку они входят в базис дополнения к ядру оператора усреднения, любая их ненулевая линейная комбинация не тождественна нулю. Поскольку они лежат в дополнении к ядру, то их интегралы по множеству m не равны нулю. Пусть $hf(m) = a$ и $hg(m) = b$. Тогда линейная комбинация $q(x) = f(x) - (a/b)g(x)$ суммируется по множеству m к нулю: $hq(m) = 0$. Противоречие доказывает лемму.

Следствие. *Этот факт накладывает ограничение на структуру наложенного базиса. Если среди множеств усреднения имеется поднабор множеств, вложенных в одно множество из этого набора, то всем множествам такого поднабора в наложенном базисе соответствует одна наложенная функция. Ее носитель должен быть вложен в объемлющее множество. Такие максимальные объемлющие множества могут пересекаться, но не находятся в отно-*

шении включения, и им могут соответствовать разные наложенные функции. В этом случае функция, наложенная на одно такое множество, не должна быть наложена на другое.

Наложенные базисы, как и вообще базисы дополнения к ядру, определены неоднозначно. Как показано выше, каждому такому базису и каждому отображению его линейной оболочки в ядро оператора усреднения соответствует связанный с отображением резольвентный класс. Причем совокупность этих классов при разных отображениях не зависит от базиса дополнения. Линейную оболочку базиса дополнения будем кратко называть дополнением, когда оговорен базис. Для конечного и счетного случая можно предложить конструктивный способ построения наложенных базисов дополнения. Однако класс всех возможных отображений дополнения к ядру в ядро неконструктивен всегда. Из него можно выделять конструктивные подклассы.

Для построения базиса дополнения рассмотрим обобщенную ситуацию. Пусть задан линейный оператор H, который отображает одно линейное пространство счетной размерности L в другое линейное пространство L'. В пространстве L задан базис $\varphi_1,\ldots$.

Надо построить базис $\varphi'=\varphi'_1,\ldots$ в подпространстве $L''\subset L$, который отобразится в базис $H\varphi'$ полного образа $HL\subseteq L'$. Используя счетность базиса φ, можно применить метод, аналогичный методу ортогонализации Грамма–Шмидта. Для этого зададим в пространстве L' положительно определенное скалярное произведение. Рассмотрим последовательность $H\varphi$ образов базисных векторов $H\varphi_1,\ldots$. Этот набор векторов содержит базис образа, но в нем возможна избыточность. Задача сводится к отбрасыванию лишних векторов из этого набора. Используя скалярное произведение, можно провести ортогонализацию набора методом Г.–Ш. При этом та часть векторов, которые линейно зависят от совокупности векторов с меньшими номерами, обнулится. Оставшиеся векторы образуют базис $\psi=\psi_1,\ldots$ в образе HL. В качестве φ'_i возьмем прообразы ψ_i в базисе φ. Они образуют искомый базис в подпространстве L''. Само подпространство L'' теперь может быть определено как линейная оболочка найденного базиса φ'.

Теперь можно описать процедуру построения базиса дополнения. Рассмотрим для каждого подмножества усреднения $m\in M$ любую функцию f_m, удовлетворяющую двум условиям:

$$sprt(f_m)=m;$$

$$\int\limits_{x\in m}\left|f_m(x)\right|dw(x)<\infty.$$

Применим предыдущую конструкцию, используя в качестве пространства L линейную оболочку $L(\{f_m\mid m\in M\})$. В качестве оператора H используем оператор усреднения h на системе усреднения M. В качестве исходного базиса φ используем $\varphi_m(x)=f_m(x)$. Тогда полученный функциональный базис $\psi_i(x)=hf_{m_i}(x)$ образует базис в пространстве образов $hF(X,\mathbb{R})$. А функции $\varphi'_i(x)=f_{m_i}(x)$ образуют базис дополнения. Здесь множества $m_1,\ldots$ соответствуют последовательности оставшихся функций f_m исходного базиса в порядке перебора множества M.

Отметим, что следствие из замечания 6.1 в полученном базисе будет выполнено автоматически при отбрасывании линейно зависимых образов.

7. Заключение

Таким образом, для конечной или счетной системы усреднения задача построения базиса дополнения решается конструктивно. При этом не требуется находить базис ядра. Он может потребоваться для построения отображения дополнения в ядро при определении класса функций, связанного с отображением. В случае конечной системы усреднения оператору усреднения на дополнении к ядру соответствует невырожденная матрица. Поэтому ее можно непосредственно обратить. Для счетного случая общего метода обращения не существует. Теория дает только гарантию однозначности обращения. В частных случаях удается находить формулы обращения.

Список литературы

Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Т. 5, Интегральная геометрия и связанные проблемы теории представлений. — М.: Физматгиз, 1962.

Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2000. — 208 с.

Граев М. И., Коганов А. В. Алгоритмы восстановления функции через ее усреднения по подмножествам // Программные продукты и системы, приложение к международному журналу «Проблемы теории и практики управления». — 2008. — № 4. — С. 33–38. (ISSN 0236-235X).

Коганов А. В. Интегральная геометрия на системах покрытий. // Математические исследования, НИИСИ РАН. / Сб. трудов под редакцией акад. В. Б. Бетелина. — 2005. — С. 197–230.