**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 Т. 2 № 4 С. 349–357**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.6, 517.9

Полулокальные сглаживающие S-сплайны

Д. А. Силаев

Московский государственный университет им. М. В.Ломоносова, механико-математический факультет,
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы , МГУ, Главное здание

E-mail: dasilaev@mail.ru

Получено 12 мая 2010 г.,
после доработки 14 июня 2010 г.

Настоящая работа посвящена периодическим и непериодическим полулокальным сглаживающим сплайнам или S-сплайнам класса $\boldsymbol{C}^p$, состоящим из полиномов степени n.

Первые $p + 1$ коэффициентов каждого полинома задаются значениями предыдущего полинома и его p первых производных в точке склейки, остальные $n - p$ коэффициентов при старших производных полинома определяются методом наименьших квадратов. Эти условия дополняются или начальными условиями (непериодический случай), или условием периодичности сплайн-функции на отрезке определения. В работе выписана система линейных уравнений, определяющих коэффициенты полиномов, составляющих сплайн. Матрица системы имеет блочный вид. Доказаны теоремы существования и единственности. Показано, что сходимость сплайнов к исходной функции зависит от величин собственных значений матрицы устойчивости. Приведены примеры устойчивых S-сплайнов.

Ключевые слова: аппроксимация, сглаживающий полулокальный сплайн, численный анализ, численные методы

Semilocal smoothihg S-splines

D. A. Silaev

Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

Abstract. — Semilocal smoothing splines or S-splines from class C^p are considered. These splines consist of polynomials of a degree n, first $p + 1$ coefficients of each polynomial are determined by values of the previous polynomial and p its derivatives at the point of splice, coefficients at higher terms of the polynomial are determined by the least squares method. These conditions are supplemented by the periodicity condition for the spline function on the whole segment of definition or by initial conditions. Uniqueness and existence theorems are proved. Stability and convergence conditions for these splines are established.

Keywords: approximation, spline, smoothing, semilocality, polynomial, numerical methods

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 349–357 (Russian).

Определение S-сплайна класса C^p

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$, $x_k = a + kh$, $h = (b - a)/K$ — шаг сетки. Разобьём отрезок $[a, b]$ на группы, для этого введём на $[a, b]$ ещё одну равномерную сетку $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l = a + lH$, $H = mh$, $m \in N$. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l-й полином на отрезке $[0, H]$. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $(y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \boldsymbol{R}^{K+1}$. Обозначим через

$$P_S^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \sum_{i=p+1}^{n} a_i x^i \right\}$$

множество полиномов степени n с фиксированными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Рассмотрим функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2.$$

В классе P_S^n ищется такой полином g_l, который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \longrightarrow \min(a_{p+1}, \ldots, a_n)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), a_1^l = g'_{l-1}(H), \ldots, a_p^l = \frac{1}{p!} g_{l-1}^{(p)}(H) \text{ при } l = 0, 1, \ldots, L-1. \quad (1)$$

В случае периодического S-сплайна здесь при $l = 0$ выполнено $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$. Так как

$$a_0^l = g_l(0), \ldots, a_m^l = \frac{1}{m!} g_l^{(m)}(0) \text{ при } m = 0, 1, \ldots, p,$$

то условия (1) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В непериодическом случае коэффициенты $a_0^0, a_1^0, \ldots, a_p^0$ задаются начальными условиями $y_0, y'_0, \ldots, \frac{y_0^{(p)}}{p!}$.

В случае если функция задана таблицей, то $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(p)}$, можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например,

$$y_0^{(r)} = \left. \frac{d^{(r)} N_n(x)}{dx^r} \right|_{x=0} + O(h^{n+1-r}) \text{ при } r = 1, \ldots, p, \quad (2)$$

где $N_n(x)$– интерполяционный полином степени n, построенный по значениям $y_0, y_1, \ldots, y_n$. В форме Ньютона этот полином имеет вид:

$$N_n(x) = y_0 + \sum_{s=1}^{n} P_s(y_0, y_1, \ldots, y_s) x(x - h) \ldots (x - (s-1)h),$$

где

$$P_s(y_0, y_1, \ldots, y_s) = \sum_{j=0}^{s} C_s^j y_{s-j} / (s! h^s) \text{– } s\text{-я разделенная разность.}$$

Например, при $n = 6$ мы получаем следующие формулы:

$$y'_0 = -\frac{1}{60h} [147y_0 - 360y_1 + 450y_2 - 400y_3 + 225y_4 - 72y_5 + 10y_6] + O(h^6), \quad (3)$$

$$y_0'' = \frac{1}{180h^2}\left[812y_0 - 3132y_1 + 5265y_2 - 5080y_3 + 2970y_4 - 972y_5 + 137y_6\right] + O(h^5), \quad (4)$$

$$y_0''' = \frac{1}{8h^3}\left[-49y_0 + 232y_1 - 461y_2 + 496y_3 - 307y_4 + 104y_5 - 15y_6\right] + O(h^4). \quad (5)$$

При $n = 8$ мы получаем формулы вида:

$$y_0' = -\frac{1}{840h}\left[2283y_0 - 6720y_1 + 11760y_2 - 15680y_3 + 14700y_4 - \right.$$

$$\left. -9408y_5 + 3920y_6 - 960y_7 + 105y_8\right] + O(h^8), \quad (6)$$

$$y_0'' = \frac{1}{5040h^2}\left[29531y_0 - 138528y_1 + 312984y_2 - 448672y_3 + \right.$$

$$\left. +435330y_4 - 284256y_5 + 120008y_6 - 29664y_7 + 3267y_8\right] + O(h^7). \quad (7)$$

Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, они есть результаты каких-либо измерений. Будем предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а именно, будем предполагать, что если функция $f \in \boldsymbol{C}^{(n+1)}[a, b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a + kh, k = 0, 1, \ldots, K$ своими значениями y_k, то $|y_k - f(x_k)| \le Ch^{(n+1)}$. Здесь L— число групп, на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции или число полиномов, составляющих сплайн. Кроме того, здесь $M + 1$— количество точек осреднения, $m + 1$— количество точек, входящих в область определения l-го полинома g_l, ξ_l — точка привязки полинома g_l, $M - m + 1$— число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S-сплайн, $M \ge m + 1$.

Определение 1. S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на каждом отрезке $\xi_l \le x < \xi_{l+1}$.

Будем минимизировать функционал Φ^l по коэффициентам $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_n$. Для этого продифференцируем $\Phi^l(g)$ по этим коэффициентам и полученные производные приравняем к нулю. Получим

$$\begin{cases} a_{p+1}^l h^{p+1} S_{2p+2} + \ldots + a_n^l h^n S_{n+p+1} = c_1^l, \\ \vdots \\ a_{p+1}^l h^{p+1} S_{n+p+1} + \ldots + a_n^l h^n S_{2n} = c_{n-p}^l. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь

$$S_j = \sum_{k=0}^{M} k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^{M} \Big[(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - \ldots - a_p^l (hk)^p) k^{p+j}\Big]. \quad (9)$$

Система линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномов S-сплайна, состоит из уравнений двух видов: а) уравнений склейки для каждой пары последовательных полиномов (1); б) уравнений для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при младших степенях. Сделаем замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0, 1, \ldots, n$. При этом уравнения а) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m\tilde{a}_1^{l-1} + \ldots + m^p \tilde{a}_p^{l-1} + m^{p+1}\tilde{a}_{p+1}^{l-1} + \ldots + m^n \tilde{a}_n^{l-1} = \tilde{a}_0^l, \\ \tilde{a}_1^{l-1} + \ldots + pm^{p-1}\tilde{a}_p^{l-1} + (p+1)m^p \tilde{a}_{p+1}^{l-1} + \ldots + nm^{n-1}\tilde{a}_n^{l-1} = \tilde{a}_1^l, \\ \vdots \\ \tilde{a}_p^{l-1} + C_{p+1}^p m\tilde{a}_{p+1}^{l-1} + \ldots + C_n^p m^{n-p}\tilde{a}_n^{l-1} = \tilde{a}_p^l. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Уравнения б) из системы(8) имеют вид:

$$\begin{cases} S_{p+1}\tilde{a}_0^l + \ldots + S_{2p+1}\tilde{a}_p^l + S_{2p+2}\tilde{a}_{p+1}^l + \ldots + S_{n+p+1}\tilde{a}_n^l &= P_1^l, \\ \vdots & \\ S_n\tilde{a}_0^l + \ldots + S_{n+p}\tilde{a}_p^l + S_{n+p+1}\tilde{a}_{p+1}^l + \ldots + S_{2n}\tilde{a}_n^l &= P_{n-p}^l, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$P_j^l = \sum_{k=0}^{M} y_{ml+k} k^{p+j}, \quad j = 1, \ldots, n-p. \tag{12}$$

Здесь $l = 0, \ldots, L-1$ — номер полинома, причем если $l = 0$, то в периодическом случае выражение $\tilde{a}_k^{l-1}$ означает $\tilde{a}_k^{L-1}$. В дальнейшем, если это не вызовет путаницы, мы будем опускать волну над переменными a_k^l.

Запишем полученную систему в матричной форме. Для этого обозначим через

$$A_0 = \left\| \begin{matrix} S_{p+1} & \ldots & S_{2p+1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ S_n & \ldots & S_{n+p} \end{matrix} \right\|, \quad A_1 = \left\| \begin{matrix} S_{2p+2} & \ldots & S_{n+p+1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ S_{n+p+1} & \ldots & S_{2n} \end{matrix} \right\|,$$

$$B_0 = \left\| \begin{matrix} 1 & m & m^2 \ldots & m^p \\ 0 & 1 & 2m \ldots & pm^{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \quad \ldots & 1 \end{matrix} \right\|, \quad B_1 = \left\| \begin{matrix} m^{p+1} & m^{p+2} & \ldots & m^n \\ (p+1)m^p & (p+2)m^{p+1} & \ldots & nm^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ C_{p+1}^p m & C_{p+2}^p m^2 & \ldots & C_n^p m^{n-p} \end{matrix} \right\|.$$

Здесь прямоугольные матрицы A_0 и B_1 имеют размерности $(n-p) \times (p+1)$ и $(p+1) \times (n-p)$ соответственно, размерности квадратных матриц A_1 и B_0 $(n-p) \times (n-p)$ и $(p+1) \times (p+1)$. Пусть, кроме того,

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ \vdots \\ P_{n-p}^l \end{pmatrix} \text{ и } X_0^l = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ \vdots \\ a_p^l \end{pmatrix}, \quad X_1^l = \begin{pmatrix} a_{p+1}^l \\ a_{p+2}^l \\ \vdots \\ a_n^l \end{pmatrix}, \text{ где } \quad l = 0, 1, \ldots, L-1. \tag{13}$$

Тогда уравнения а)из системы(11)примут вид:

$$B_0 X_0^l + B_1 X_1^l = X_0^{l+1}, \tag{14}$$

а уравнения б) из системы(11) :

$$A_0 X_0^l + A_1 X_1^l = P^l. \tag{15}$$

Существование и единственность S-сплайна класса C^p

Предположим, что m и M таковы, что матрица A_1 имеет обратную. Тогда из (15) получаем, что

$$X_1^l = A_1^{-1} P^l - A X_0^l, \tag{16}$$

где $A = A_1^{-1}A_0$. Подставим выражение для X_l^1 в (14). Тогда получим рекуррентное соотношение, связывающее $p+1$ младших коэффициентов $l+1$ полинома через $p+1$ младших коэффициентов l полинома:

$$X_0^{l+1} = UX_0^l + \Psi^l, \tag{17}$$

где $\Psi^l = B_1A_1^{-1}P^l$, матрица устойчивости $U = B_0 - B_1A_1^{-1}A_0$ имеет размерность $(p+1)\times(p+1)$.

Рассмотрим сначала непериодический случай. Зададим начальный вектор

$$X_0^0 = \left(\; y_0, hy_0', \ldots, \tfrac{1}{p!}h^p y_0^{(p)} \; \right)^T,$$

где значения производных, входящих в X_0^0, могут быть вычислены приближенно с высокой степенью точности с помощью формул численного дифференцирования (см. формулы (3)–(7)).

Теорема 1. *Пусть числа m, M, p, n таковы, что $detA_1 \neq 0$. Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a+kh, h = (b-a)/K$ и начального вектора X_0^0 существует единственный непериодический сплайн $S_{m,M}^n[y](x)$ класса $\boldsymbol{C}^p$.*

Доказательство. Пользуясь формулами (16), (17), последовательно находим $X_1^0, X_0^1, \ldots, X_1^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих сплайн, однозначно определены. □

Теорема 2. *Пусть числа m, M, p, n таковы, что $detA_1 \neq 0$ и собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (здесь L— число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a + kh, h = (b - a)/K$ существует единственный периодический сплайн $S_{m,M}^n[y](x)$ класса $\boldsymbol{C}^p$.*

Доказательство. В периодическом случае применяя рекуррентную формулу (17) $L - 1$ раз, получим:

$$X_0^0 = X_0^L = UX_0^{L-1} + \Psi^{L-1} = U(UX_0^{L-2} + \Psi^{L-2}) + \Psi^{L-1} = \ldots = U^L X_0^0 + \sum_{s=1}^{L} U^{L-s}\Psi^{s-1},$$

откуда

$$X_0^0 = (E - U^L)^{-1} \sum_{s=1}^{L} U^{L-s}\Psi^{s-1}.$$

Затем последовательно находим $X_1^0, X_0^1, \ldots, X_1^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих периодический сплайн, однозначно определены. □

Сходимость S-сплайна класса $\boldsymbol{C}^p$

Пусть функция $f(x) \in \mathbf{C}^{n+1}[a, b]$ и $\mid f(x_k) - y_k \mid \leq Ch^{n+1+\varepsilon}, \varepsilon \geq 0$. Обозначим через $\varphi(x) = f(x) - S_{m,M}^n(x)$, $\quad q_r^l = \frac{1}{r!}f^{(r)}(\xi_l)h^r - \widetilde{a}_r^l, \quad r = 0, 1, \ldots, n$. Пусть

$$Q_0^l = \begin{pmatrix} q_0^l \\ \vdots \\ q_p^l \end{pmatrix}, \quad Q_1^l = \begin{pmatrix} q_{p+1}^l \\ \vdots \\ q_n^l \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выражение (12). По формуле Тейлора имеем:

$$P_j^l = \sum_{k=0}^{M} y_{ml+k} k^{p+j} = \sum_{k=0}^{M} (y_{ml+k} - f_{ml+k}) k^{p+j} + \sum_{k=0}^{M} f_{ml+k} k^{p+j} = \sum_{k=0}^{M} \delta_k^l k^{p+j} + f(\xi_l) S_{p+j} +$$

$$+ f'(\xi_l) h S_{p+j+1} + \ldots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(\xi_l) h^p S_{2p+j} + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi_l) h^{(p+1)} S_{2p+j+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_l) h^n S_{p+n+j} + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_l) h^{(n+1)} S_{p+n+j+1} + o(h^{n+1}). \tag{18}$$

Здесь $\delta_k^l = y_{ml+k} - f_{ml+k}$, $f_{ml+k} = f(\xi_l + kh)$ — точное значение функции, $j = 1, \ldots, n-p$. Подставляя (18) в (11), получим

$$A_0 Q_0^l + A_1 Q_1^l = -\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} h^{(n+1)} T_{n,p} - \delta_{n,p}^l + \overline{o}(h^{(n+1)}), \tag{19}$$

где

$$T_{n,p} = \begin{pmatrix} S_{n+p+2} \\ \vdots \\ S_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad \delta_{n,p}^l = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{M} \delta_k^l k^{p+1} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{M} \delta_k^l k^n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $\varphi(x)$. Пусть $x \in [\xi_l, \xi_{l+1}]$, $\xi \in [0, H]$, $x = \xi_l + \xi$. По формуле Тейлора имеем:

$$\varphi(x) = f(\xi_l + \xi) - S_{m,M}^n(\xi_l + \xi) = f(\xi_l + \xi) - a_0^l - a_1^l \xi - \ldots - a_n^l \xi^n =$$

$$= (f(\xi_l) - \widetilde{a}_0^l) + (f'(\xi_l) h - \widetilde{a}_1^l) \frac{x - \xi_l}{h} + \ldots + (\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_l) h^n - \widetilde{a}_n^l) \left(\frac{x - \xi_l}{h}\right)^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_l) h^{(n+1)} \left(\frac{x - \xi_l}{h}\right)^{(n+1)} + o((x - \xi_l)^{(n+1)}). \tag{20}$$

Продифференцируем выражение (20) по x r раз:

$$\varphi^{(r)}(x) = \frac{r!}{h^r} q_r^l + \ldots + n(n-1)\ldots(n-r+1) \frac{1}{h^r} q_n^l \left(\frac{x - \xi_l}{h}\right)^{n-r} +$$

$$+ \frac{1}{(n-r+1)!} f^{(n+1)}(\xi_l) h^{(n-r+1)} \left(\frac{x - \xi_l}{h}\right)^{(n-r+1)} + o((x - \xi_l)^{(n-r+1)}). \tag{21}$$

Умножим равенство (21) на $\frac{h^r}{r!}$. В точке $x = \xi_l + H = \xi_{l+1}$ получим:

$$q_r^{l+1} = q_r^l + \ldots + C_n^r q_n^l m^{n-r} + C_{n+1}^r m^{n-r+1} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_l) h^{(n+1)} + o((n)^{(n+1)}),$$

или в векторном виде

$$Q_0^{l+1} = B_0 Q_0^l + B_1 Q_1^l + \frac{f^{(n+1)}(\xi_l)}{(n+1)!} h^{n+1} T_{n,p}^1 + \overline{o}(h^{n+1}), \tag{22}$$

где

$$T_{n,p}^1 = \begin{pmatrix} m^{n+1} \\ (n+1) m^n \\ \vdots \\ C_{n+1}^p m^{n-p+1} \end{pmatrix}.$$

Из (19) Q_1^l и подставим в (22). Получим:

$$Q_0^{l+1} = UQ_0^l + \frac{f^{(n+1)}(\xi_l)}{(n+1)!} h^{n+1}(T_{n,p}^1 - B_1 A_1^{-1} T_{n,p}) + B_1 A_1^{-1} \delta_{n,p}^l + \overline{o}(h^{n+1}). \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть периодическая функция $f(x) \in \boldsymbol{C}^{n+1}[a,b]$ и пусть выполнено условие*

$$|f(x_k) - y_k| \le C_0 h^{n+1+\varepsilon}, \quad \varepsilon \ge 0. \tag{24}$$

Пусть, кроме того, числа m, M, p, n таковы, что $detA_1 \neq 0$ и собственные значения матрицы U по модулю меньше единицы, т.е.

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, p+1. \tag{25}$$

Тогда для периодического сплайна $S_{m,M}^n \in C^p[a,b]$ с узлами на равномерной сетке для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:

$$|f^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} S_{m,M}^n(x)| \le C_r h^{n+1-r}, \quad \textit{для} \quad r = 0, 1, \ldots, n; \tag{26}$$

$x \neq \xi_l$ *при* $r = p+1, \ldots, n;$ *в этом случае* $\varphi^{(r)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(r)}(\xi_l + 0)$.

Доказательство. Из формулы (23) следует равенство

$$Q_0^0 = Q_0^L = \sum_{k=0}^{L-1} U^k \overline{w}_{L-1-k} + U^L Q_0^0, \quad Q_0^0 = (E - U^L)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{L-1} U^k \overline{w}_{L-1-k} \right),$$

где

$$\overline{w}_l = \frac{f^{(n+1)}(\xi_l)}{(n+1)!} h^{n+1}(T_{n,p}^1 - B_1 A_1^{-1} T_{n,p}) + B_1 A_1^{-1} \delta_{n,p}^l + \overline{o}(h^{n+1}). \tag{27}$$

Из (27) и условий теоремы следует, что

$$|\overline{w}_l| \le C h^{n+1},$$

где $C = C(max|f^{n+1}|, C_0)$. Обозначим $\rho = \|U\|$. Тогда

$$\|(E - U^L)^{-1}\| \le 1 + \|U^L\| + \ldots + \|U^L\|^s + \ldots \le \frac{1}{1 - \rho^L},$$

$$\|\sum_{k=0}^{L-1} U^k \overline{w}_{L-1-k}\| \le \sum_{k=0}^{L-1} \|U^k\| C h^{n+1} \le \frac{C h^{n+1}}{1 - \rho}.$$

Отсюда следуют оценки для Q_0^0 или

$$|\ q_r^0\ | \le C_r h^{n+1} \quad \text{при } r = 0, 1, \ldots, p. \tag{28}$$

Из формулы (19) следуют оценки для Q_0^1 или оценки (28) при $r = p+1, \ldots, n$. Так как правая часть неравенства (28) не зависит от индекса l, то оценки (28) верны для любого l. Используя формулы (20) и (21), получаем оценки (26) и для всех промежуточных точек x. Теорема доказана. □

Аналогичные утверждения справедливы и для непериодического случая.

Собственные числа матрицы U определяются из уравнения

$$\det(U - \lambda E) = 0. \quad (29)$$

Для случая малых значений M (при $3 \leq M \leq 20$ в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M, при которых достигаются наименьшие значения $max|\lambda_i|$ и аппроксимация S-сплайнами устойчива, представлены в таблице.

Таблица 1. Собственные числа матрицы U

n	p	M	m	m/M	$max\lvert\lambda_i\rvert$	n	p	M	m	m/M	$max\lvert\lambda_i\rvert$
5	0	5	1..5	0,2..1,0	0	5	1	4	2	0,5	0,167
6	0	6	1..5	0,16..0,83	0	5	1	5	1	0,2	0,126
7	0	7	1..6	0,14..0,86	0	5	1	5	2	0,4	0,0952
8	0	8	1..7	0,125..0,875	0	5	1	7	5	0,714	0,0431
9	0	9	1..8	0,11..0,89	0	5	3	4	1	0,25	0,712
10	0	10	1..9	0,1..0,9	0	5	3	5	2	0,4	0,646
5	2	4	2	0,5	0,266	5	3	6	2	0,333	0,663
5	2	5	3	0,6	0,208	5	3	7	3	0,429	0,658
5	2	7	4	0,571	0,226	6	1	5	1,4	0,2..0,8	0,2
5	2	8	5	0,625	0,205	6	1	5	2,3	0,4..0,6	0,1
6	0	7	2,5	0,28..0,71	0,0061	6	1	6	2	0,333	0,0405
6	2	5	1	0,2	0,312	6	3	6	3	0,5	0,467
6	2	5	2	0,4	0,186	6	3	7	4	0,571	0,429
6	2	7	5	0,714	0,125	7	1	7	2	0,286	0,0253
6	4	5	1	0,2	0,894	7	2	6	1	0,167	0,272
6	4	7	2	0,286	0,886	7	3	6	1	0,167	0,499
7	3	6	4	0,667	0,305	7	4	7	2	0,286	0,693
8	1	7	3;4	0,429;0,571	0,0286	8	2	7	3	0,429	0,0791
8	3	7	4	0,571	0,184	8	4	7	3	0,429	0,494
8	5	7	1	0,143	0,894	8	5	8	2	0,25	0,893
9	1	8	4	0,5	0,0143	9	2	8	3	0,375	0,0584
9	3	8	5	0,625	0,136	9	4	8	3	0,375	0,36
9	5	8	1	0,125	0,792	9	5	9	2	0,222	0,736
9	6	12	1	0,0833	0,9998	9	6	13	1	0,0769	0,999

Показано, что в случае $p = 0$ и $n = M$, $1 \leq m \leq M - 1$ матрица U есть число, равное 0. В этих случаях S-сплайны обладают высокими аппроксимационными свойствами и удобны, например, для построения формул численного интегрирования (квадратурных, кубатурных). Как показано в случаях $n = 3$, $p = 1$ и $n = 5$, $p = 2$ [Силаев, 2009; Силаев и др., 2007; Силаев, Якушина, 2007; Silaev et al, 2007], для обеспечения условия устойчивости, т. е. выполнения неравенства (25), необходимо перекрывание. Это означает, что имеются такие элементы исходной таблицы значений функции, которые участвуют в определении коэффициентов не менее двух соседних полиномов, составляющих сплайн. Если перекрывание достаточно большое, то это в ряде случаев является и достаточным условием. На практике наиболее употребительными являются те сплайны, для построения которых используется небольшое число точек осреднения M.

Вычисление собственных чисел матрицы устойчивости U выполнил студент ВМК МГУ Кочнев Ю. К.

Список литературы

Silaev D. A., Amiliyushenko A. V., Luk'janov A. I., Korotaev D. O. Semilocal smoothing spline of class C^1 // Journal of Mathematical Sciences — ISSN 1072-3374 — Vol. 143, No. 4 — June 2007 — p. 3401–3414.

Силаев Д. А. Дважды непрерывно дифференцируемый полулокальный сглаживающий сплайн // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1, математика, механика — 2009 — № 5 — с. 11–19.

Силаев Д. А., Амилющенко А. В., Лукьянов А. И., Коротаев Д. О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 // В кн.: Труды семинара имени И.Г.Петровского — Вып. 26 — 2007 — с. 347–367.

Силаев Д. А., Якушина Г. И. Приближение S-сплайнами гладких функций // В кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып.10 — М.: Изд-во МГУ, 1984 — с. 197.